1.– Se pide obtener el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ de dos maneras.

1. Derivando 3 veces y aplicando la fórmula.
2. Utilizando los desarrollos de e^y y de $y = \operatorname{sen} x$ (desarrollos deducidos de otros).

2.– Ejercicio propuesto sobre la función $y = \operatorname{sen} x$ en el apartado 8.3 del tema.

---

1 Buscamos el P. de Mc. Laurin, aunque no se dice en el enunciado.

1.- Derivando:

$f(x) = e^{\operatorname{sen} x} \Rightarrow f(0) = e^{\operatorname{sen} 0} = e^0 = 1$

$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \Rightarrow f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$

$f''(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot \cos x + e^{\operatorname{sen} x}(-\operatorname{sen} x) \Rightarrow f''(0) = e^0 \cdot 1 \cdot 1 + e^0(-0) = 1$

$f'''(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos^3 x + e^{\operatorname{sen} x} \, 2 \cdot \cos x(-\operatorname{sen} x) - [e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x + e^{\operatorname{sen} x} \cos x] \Rightarrow$

$f'''(0) = e^0 \cdot 1 + e^0 \, 2 \cdot 1 \cdot 0 - [e^0 \cdot 1 \cdot 0 + e^0 \cdot 1] = 1 - 1 = 0$

$\boxed{P_3(x)} = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{1 \cdot x^2}{2!} + 0 = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2}}$

2.- Utilizando los desarrollos de e^x y de $\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow y = x - \frac{x^3}{6}$ (hasta grado 3)

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \Rightarrow z = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}$ (hasta grado 3)

$e^{\operatorname{sen} x} = e^y\Big|_{y = \operatorname{sen} x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \dots$ (desarrollo de $g(f(x))$)

$\Rightarrow Z(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 + \cancel{\frac{x^6}{36}} - \cancel{\frac{2x^4}{6}}\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 - \cancel{3\frac{x^5}{6}} + \cancel{3 \cdot \frac{x^7}{36}} - \cancel{\frac{x^9}{6^3}}\right) \Rightarrow$

$\boxed{P_3(x)} = 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{1}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{6}x^3} = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2}}$ (hasta grado 3)

(2) Hallar una cota del error al aproximar $y = \operatorname{Sen} x$ por su desarrollo.

- $f^{(n}(x) = \operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2})^{(*)} \Rightarrow f^{(n+1}(\xi) = \operatorname{Sen}[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}] \leq 1 \qquad \xi \in (0, x)$
- $T_n(x) : \frac{f^{(n+1}(\xi) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ (cota superior del error cometido)
- Con $n=9$ (10 términos)

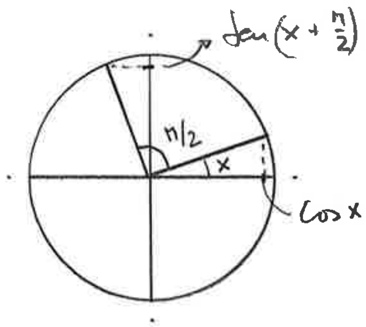
  $x = 1 \Rightarrow T_n(x) \leq 3 \cdot 10^{-7}$ } $\Rightarrow$ aproximación buena

  $x = 2 \Rightarrow T_n(x) \leq 3 \cdot 10^{-4}$

  $x = 5 \Rightarrow T_n(x) \leq 2.7 \Rightarrow$ aproximación no aceptable ($\operatorname{sen} x \leq 1$)
- Tanteamos (para $x = 5$) el nº de términos de $P(x)$ con que $T_n(x) < 10^{-3}$

  - $n = 10 \Rightarrow \frac{5^{11}}{11!} = 1.22 \ldots$
  - $n = 15 \Rightarrow \frac{5^{16}}{16!} = 7.29 \cdot 10^{-3}$
  - $n = 16 \Rightarrow \frac{5^{17}}{17!} = 2.1 \cdot 10^{-3}$
  - $n = 17 \Rightarrow \frac{5^{18}}{18!} = 5.6 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}$

Necesitamos 18 términos en el desarrollo para asegurar que el error cometido sea $< 10^{-3}$.



(*) $y = \operatorname{sen} x$

$y' = \cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$

$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x + 2\frac{\pi}{2})$

$y''' = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x + 3\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow y^{(n} = \operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2})$