Cuestión: Sea $f \in \mathcal{F}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$. Se pide:

a) Condición de diferenciabilidad de la función f en el punto a.

- f es diferenciable en $a \Leftrightarrow \begin{cases} \exists c \in \mathbb{R} \\ \exists \varepsilon(h) / \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases} / \ f(x) - f(a) = [c + \varepsilon(x-a)](x-a)$
- Se demuestra $c = f'(a) \Rightarrow$ $\boxed{f(x) - f(a) = [f'(a) + \varepsilon(x-a)](x-a)}$

b) Si f es diferenciable en a, ¿a qué llamamos diferencial de f en a?

- $df(a) = f'(a) \cdot (x-a)$
- De aquí: $\Delta f = f(x) - f(a) = \underbrace{f'(a)(x-a)}_{df(a)} + \underbrace{\varepsilon(x-a)(x-a)}_{\to 0 \text{ más rápido que } (x-a)}$

c) ¿Cual es la relación entre derivabilidad y diferenciabilidad?

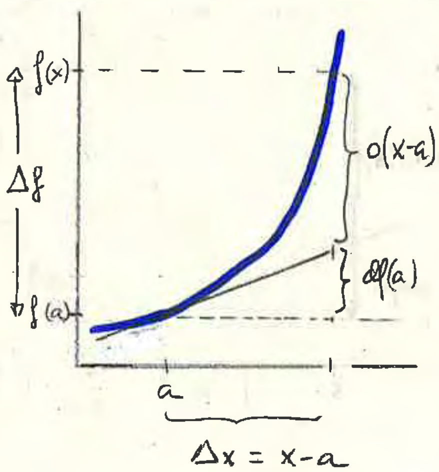
Una $f \in \mathcal{F}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ es diferenciable en un punto si y solo si es derivable en dicho punto.

d) Expresa $f'(a)$ en función de las diferenciales de f y de x. ¿Qué es dx?

- $f'(a) = \dfrac{df(a)}{dx}$. En general $\boxed{f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}}$
- $dx = x - a$. Es el incremento de la variable

e) ¿Cuanto vale la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$? ¿Cual es la ecuación de esta recta?

- La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ es la derivada $f'(a)$.
- Ecuación: $\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$



f) ¿Cual es la relación entre $\triangle f$ y df en términos de infinitésimos?

- Son infinitésimos equivalentes. Su diferencia es un infinitésimo de orden superior.
- $\Delta f = df + o(\Delta x) \quad \left(\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \right)$

1. **a)** $f(x) = \operatorname{sen} x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$

   b) $g(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \Longrightarrow g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x}$

2. **a)** $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

   b) $g(x) = \cos x^2 \Longrightarrow g'(x) = -2x \operatorname{sen} x^2$

3. **a)** $f(x) = \operatorname{tg} x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \left(= 1 + \operatorname{tg}^2 x\right)$

   b) $g(x) = \operatorname{tg} 2x \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x} \quad \left(= 2 + 2\operatorname{tg}^2 x\right)$

4. **a)** $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

   b) $g(x) = \operatorname{arc\,sen} x^{5/2} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^5}} \dfrac{5}{2} x^{3/2}$

5. **a)** $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

   b) $g(x) = \operatorname{arc\,tg} e^{x/2} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{1 + e^x} \dfrac{e^{x/2}}{2}$

6. **a)** $f(x) = \operatorname{senh} x \Longrightarrow f'(x) = \cosh x$

   b) $g(x) = \operatorname{senh}(-x^3) \Longrightarrow g'(x) = -3x^2 \cosh x^3$

7. **a)** $f(x) = \cosh x \Longrightarrow f'(x) = \operatorname{senh} x$

   b) $g(x) = \cosh \dfrac{1}{3x} \Longrightarrow g'(x) = -\dfrac{1}{3x^2} \operatorname{senh} \dfrac{1}{3x}$

8. **a)** $f(x) = \tanh x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} \quad \left(= 1 - \tanh^2 x\right)$

   b) $g(x) = \tanh \sqrt{x} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \dfrac{1}{\cosh^2 \sqrt{x}}$

9. **a)** $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln a$

   b) $g(x) = 2^{1/x} \Longrightarrow g'(x) = 2^{1/x} \ln 2 \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

10. **a)** $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

    b) $g(x) = \ln \operatorname{sen} x \Longrightarrow g'(x) = \operatorname{cotg} x$