1.– Demostrar que, dados dos números positivos a y b, su media aritmética es siempre mayor o igual que su media geométrica, es decir

$$\sqrt{a\,b} \leq \frac{a+b}{2}, \ \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

2.– Se dice que los términos de una sucesión están en progresión geométrica si cada uno se obtiene multiplicando por una constante (razón) al anterior, por ejemplo

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^{n-1}} \cdots$$

Se pide obtener la expresión de la suma de los n primeros términos de una progresión o serie geométrica de razón r y primer término a_1. Calcular el límite de dicha expresión cuando n tiende a ∞, si $|r| < 1$.

3.– Dado un número real $\alpha \in (0,1)$ y una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \alpha\,|a_{n+1} - a_n| \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

se pide:

a) Demostrar que $|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha^{n-1}\,|a_2 - a_1| \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Demostrar que $|a_n - a_m| < \dfrac{\alpha^{m-1}}{1-\alpha}\,|a_2 - a_1| \ \ \forall n > m \geq 1$.
