

Espacios métricos. Solución a los ejercicios

① f) Demostrar $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^{\circ}$.

$$\boxed{\text{Sea } x \in \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \Rightarrow \begin{cases} x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists r_1 / \overset{\circ}{B}(x, r_1) \subset A \subset A \cup B \\ x \in \overset{\circ}{B} \Rightarrow \exists r_2 / \overset{\circ}{B}(x, r_2) \subset B \subset A \cup B \end{cases}}$$

Luego en ambos casos $\exists r / \overset{\circ}{B}(x, r) \subset A \cup B \Rightarrow \boxed{x \in (A \cup B)^{\circ}}$

En sentido contrario puede no cumplirse la inclusión: Ej. $A = [0, 1]$
 $B = [1, 2]$

$$\begin{matrix} \overset{\circ}{A} = (0, 1) \\ \overset{\circ}{B} = (1, 2) \\ (A \cup B)^{\circ} = (0, 2) \end{matrix} \quad \left\{ \quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \not\subset (A \cup B)^{\circ} \right.$$

③ f) Dar ejemplo (o demostrar que es imposible) de que $\bar{A}$ es un subconjunto propio de $(\bar{A})^{\circ}$. DEMOSTRAREMOS QUE ES IMPOSIBLE.

Decimos que B es un subconjunto propio de $D \Leftrightarrow B \subset D, B \neq D$.

Por las propiedades de los conjuntos interiores $(\bar{A})^{\circ} \subset \bar{A}, \forall A$.

Entonces $\bar{A}$ no puede ser un subconjunto propio de $(\bar{A})^{\circ}$

pues se darían a la vez $\begin{cases} (\bar{A})^{\circ} \subset \bar{A} \\ \bar{A} \subset (\bar{A})^{\circ} \end{cases} \Leftrightarrow \bar{A} = (\bar{A})^{\circ}$ lo que contradice la definición de subconjunto propio.

⑤ a) Si A, B son acotados, $A \cup B$ lo es ¿V o F? (V)

$$\begin{matrix} A \text{ es acotado} \Leftrightarrow \exists a \in E, \exists r_1 > 0 / A \subset \overset{\circ}{B}(a, r_1) \\ B \text{ " " " } \Leftrightarrow \exists b \in E, \exists r_2 > 0 / B \subset \overset{\circ}{B}(b, r_2) \end{matrix}$$

Para obtener una bola que contenga a $A \cup B$, basta usar el punto a y el radio $p / p = d(a, b) + \max(r_1, r_2)$. Entonces:

$$\forall x \in A \cup B, \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \in A \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}(a, r_1) \subset \overset{\circ}{B}(a, p), \text{ pues } p > r_1 \\ \text{Si } x \in B \Rightarrow d(a, x) \leq d(a, b) + d(b, x) < d(a, b) + r_2 \leq p \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}(a, p) \end{array} \right.$$

$$\text{Luego } \boxed{A \cup B \subset \overset{\circ}{B}(a, p)}$$

⑥ e) $\bar{A} = A$; $\overset{\circ}{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$; $\text{Int}(A) = \emptyset$; $A' = \bar{A} \setminus \text{Int}(A) = \bar{A}$

$$\text{Fr}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 4\}; \quad \partial(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

No es abierto ($A \neq \overset{\circ}{A}$), ni cerrado ($\bar{A} \neq A$), no acotado, luego tampoco es compacto, por no ser acotado.