

1.– Demostrar, aplicando el Principio de Inducción, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}} < 2$.

Solución. Para demostrarlo, llamamos

$$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \dots a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}}_{n \text{ raíces}}.$$

a) Comprobamos que se cumple $a_1 = \sqrt{2} < 2$.

b) Suponemos $a_k = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{k \text{ raíces}} < 2$.

c) Hemos de demostrar $a_{k+1} < 2$. Pero $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}$.

Entonces, $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$ c.q.d.

2.– Razonar la verdad o falsedad de la afirmación: “la suma de dos irracionales es irracional”.

Solución. La afirmación es falsa pues basta considerar -por ejemplo- la suma de un número irracional y su opuesto. Sean $\alpha, -\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Se cumple $\alpha + (-\alpha) = 0 \in \mathbb{Q}$.

3.– Se dice que un número es cuadrado perfecto si su raíz cuadrada positiva es un natural. ¿Puede ser cuadrado perfecto el producto de un número natural (n) por el siguiente ($n + 1$)? ¿Y el de n por $n + 2$?

Solución. Procedemos por reducción al absurdo.

a) Supongamos que existe algún $n \in \mathbb{N}$ que cumpla $n(n + 1) = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$n^2 < n^2 + n < n^2 + 2n + 1 \implies n^2 < \underbrace{n(n + 1)}_{m^2} < (n + 1)^2 \xrightarrow{\sqrt{}} n < m < n + 1.$$

Con lo que llegamos al absurdo de que entre dos naturales consecutivos (n y $n + 1$) existe otro natural. Luego no existe ningún n que verifique esta condición.

b) Suponiendo ahora que existe algún $n \in \mathbb{N}$ que verifique $n(n + 2) = m^2$, $m \in \mathbb{N}$ resulta

$$n^2 < n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \implies n^2 < \underbrace{n(n + 2)}_{m^2} < (n + 1)^2 \xrightarrow{\sqrt{}} n < m < n + 1.$$

Luego tampoco existe ningún n que verifique esta condición.

4.– Dado el conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, n \in \mathbb{N} \right\}$, se pide calcular sus cotas y extremos, así como el máximo y mínimo en caso de que existan.

Solución. Los elementos de A serán los números de la forma dada que sean racionales, es decir aquellos en los que el radicando sea un cuadrado perfecto (de lo contrario serían irracionales).

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{9}}, \frac{1}{\sqrt{16}}, \frac{1}{\sqrt{25}}, \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

- a) Cota superior: cualquier $\alpha \in \mathbb{R} / \alpha \geq \frac{1}{2}$.
 - b) Cota inferior: cualquier $\beta \in \mathbb{R} / \beta \leq 0$.
 - c) $\text{Sup}(A) = \frac{1}{2}$.
 - d) $\text{Inf}(A) = 0$.
 - e) Como el supremo pertenece a A , existe máximo, $M = \frac{1}{2}$.
 - f) Como el ínfimo no pertenece a A , no existe mínimo.
-