# Cálculo Infinitesimal 1 — Solución ejercicio 5

**Integrales y Curvas** (2 h.) **Diciembre de 2014**

**1.-** Sea la función $f(x) = \dfrac{x^n}{a^2 - x^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Se pide:

**a)** Fórmula de reducción para $I(n) = \displaystyle\int f(x)\, dx$.

$$\boxed{I(n)} = \int \frac{x^{n-2}\cdot x^2}{a^2-x^2}\,dx = -\int \frac{x^{n-2}(-x^2+a^2-a^2)}{a^2-x^2}\,dx = -\int x^{n-2}dx + a^2 \underbrace{\int \frac{x^{n-2}}{a^2-x^2}\,dx}_{I(n-2)} =$$

$$= \boxed{-\frac{x^{n-1}}{n-1} + a^2\, I(n-2)} \quad (n \neq 1)$$

$$\boxed{I(0)} = \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{argth}\,\frac{x}{a} = \boxed{\frac{1}{2a}\, L\left|\frac{a+x}{a-x}\right|}$$

$$\boxed{I(1)} = \int \frac{x}{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{a^2-x^2} = \boxed{-\frac{1}{2}\, L|a^2-x^2|}$$

**b)** Dibujar la curva $y = f(x)$ para el caso $a = 2$, $n = 3$. $\quad y = \dfrac{x^3}{4-x^2} = \dfrac{x^3}{(2+x)(2-x)}$

1.- Ceros: $x = 0$ (triple). $y(0^+) > 0$, $y(0^-) < 0$.

2. Asíntotas verticales $x = \pm 2$: $y(2^+) < 0$, $y(2^-) > 0$, $y(-2^+) < 0$, $y(-2^-) > 0$

3 Asíntotas horizontales $y = mx + n$

- $m = \lim\limits_{x\to\pm} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{(4-x^2)x} = \dots = -1$
- $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} y - mx = \lim\limits_{x\to\pm\infty} y-(-x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{4-x^2} + x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x^3}+4x-\cancel{x^3}}{4-x^2} = 0$

AH: $y = -x$

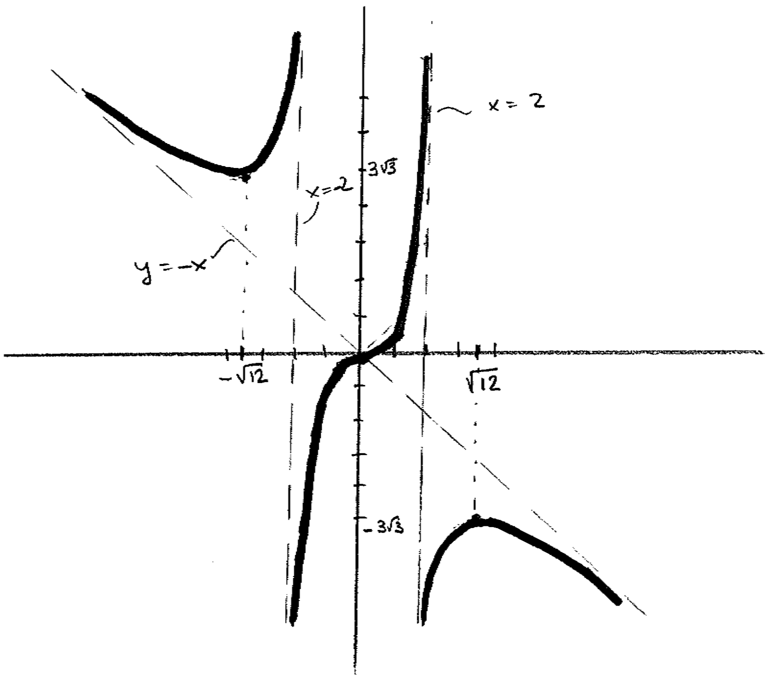
3. Extremos:

- $y' = \dfrac{3x^2(4-x^2)+x^3(2x)}{(4-x^2)^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$

- $y(\sqrt{12}) = \dfrac{12\sqrt{12}}{4-(\sqrt{2})^2} = -3\sqrt{3}$

$y(-\sqrt{12}) = \dfrac{-12\sqrt{12}}{4-(\sqrt{12})^2} = 3\sqrt{3}$



**2.-** Obtener la primitiva de $\displaystyle\int \frac{4\operatorname{arg\,th} x}{(1-x)^2}\,dx.$

- Escribiendo argth x en forma logarítmica, $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} L\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow$

$$I = \int \frac{2\,L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{(1-x)^2}\,dx.$$

- Calculo: $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

Haciendo $\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = t \Rightarrow \frac{2dx}{(1-x)^2} = dt \Rightarrow I = \int L(t)\cdot dt$

- Partes: $I = t\cdot Lt - \int dt = t\,Lt - t = \frac{1+x}{1-x}\, L\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1+x}{1-x}$

$u = Lt \Rightarrow du = \frac{dt}{t}$
$dv = dt \Rightarrow v = t$

$$\boxed{I = \frac{1+x}{1-x}\, L\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1+x}{1-x} + C}$$

ALTERNATIVA: $I = \frac{4}{1-x}\operatorname{argth} x - 4\underbrace{\int \frac{dx}{(1-x)^2(1+x)}}_{I_1}$

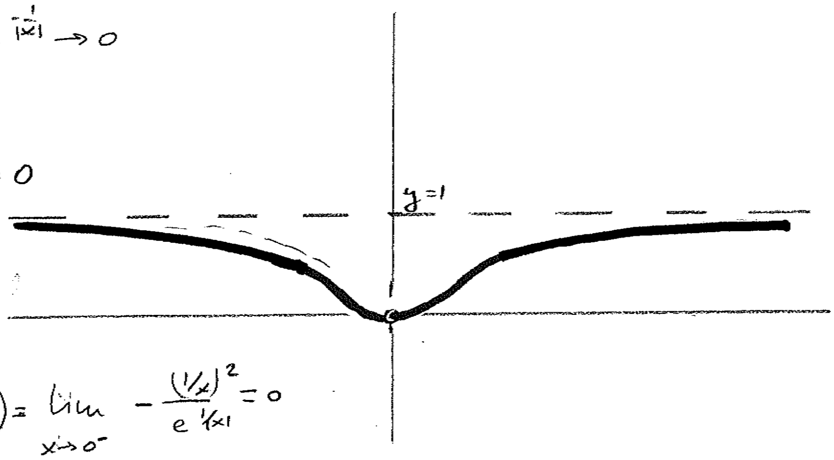
$u = 4\operatorname{argth} x \Rightarrow du = \frac{4}{1-x^2}\,dx$
$dv = \frac{dx}{(1-x)^2} \Rightarrow v = \frac{1}{1-x}$

Resolviendo $I_1$ por descomp. en f.s. $I_1 = \text{--} = -\frac{1}{4} L|1-x| + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} L|1+x|$

Resulta $\boxed{I = \frac{4\operatorname{arg\,th} x}{1-x} - L\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{2}{1-x} + C'}$ $\left(\text{NOTA: } \underbrace{-\frac{1+x}{1-x} = \frac{-1-x}{1-x} = \frac{-2+1-x}{1-x} = 1 - \frac{2}{1-x}}_{\text{se dif en una cte}}\right)$

**3.-** Representar la curva de ecuación $y = e^{-\frac{1}{|x|}}$.

- $e^{\frac{1}{|x|}} > 1 \quad \forall x \Rightarrow e^{-\frac{1}{|x|}} < 1$
- Si $x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{|x|} \to 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{|x|}} \to 1$
- Si $x \to 0^{\pm} \Rightarrow \frac{1}{|x|} \to +\infty \Rightarrow e^{-\frac{1}{|x|}} \to 0$
- En $x=0$, $f(x)\ \nexists$
- $\varphi^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\underbrace{x^2}_{\to 0}\underbrace{e^{1/x}}_{\to\infty}} = 0$




$\left(x^2 e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{1/x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \to \infty\right)$

- $\varphi^- = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{(1/x)^2}{e^{1/|x|}} = 0$

En el cálculo de $\varphi^+$ y $\varphi^-$ tenemos en cuenta los $\infty$ de distinto orden

NOTA: $f \nexists$ en $x=0$ por lo que no podemos calcular su derivada en el origen. Para dibujar la curva, estamos calculando el límite en $0^+$ y en $0^-$ de $f'$. Aunque coinciden y valen $0$, $\nexists f'(0)$ pues $\nexists f(0)$. Pero la tangente a la curva al acercarnos al origen tiende a la horizontal.