1.– Si una función tiene límite en un punto, sus valores se aproximan a dicho límite tanto como queramos, siempre que x esté suficientemente cerca del punto. A partir de esto se verifican las propiedades siguientes, que se pide demostrar (se recomienda consultar las propiedades de los límites de sucesiones).

Sean f y g dos funciones definidas en todo $\mathbb{R}$. Entonces:

a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha > \gamma$, existe un entorno de a en el que $f(x) > \gamma$.

b) Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \beta < \gamma$, existe un entorno de a en el que $g(x) < \gamma$.

c) Si ambas tienen límite en a y se cumple $\lim\limits_{x\to a} f(x) > \lim\limits_{x\to a} g(x)$, existe un entorno de a en el que $f(x) > g(x)$.

Solución (véanse las demostraciones de las propiedades 2) y 3) de los límites de sucesiones).

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha \ (\alpha > \gamma) \Longrightarrow \boxed{\forall\varepsilon\ \exists\delta \,/\, 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon}$.
Entonces $-\varepsilon < f(x)-\alpha < \varepsilon \Longrightarrow \alpha-\varepsilon < f(x) < \varepsilon+\alpha$.
Es decir, dado un ε cualquiera, existe un entorno U_a^* en el que $f(x) > \alpha-\varepsilon$.
Basta tomar un $\varepsilon < \alpha-\gamma \Longrightarrow \gamma < \alpha-\varepsilon$ para que se cumpla $f(x) > \alpha-\varepsilon > \gamma$, c.q.d.

b) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \beta \ (\beta < \gamma) \Longrightarrow \boxed{\forall\varepsilon\ \exists\delta \,/\, 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |g(x)-\beta| < \varepsilon}$.
Entonces $-\varepsilon < g(x)-\beta < \varepsilon \Longrightarrow \beta-\varepsilon < g(x) < \beta+\varepsilon$.
Es decir, dado un ε cualquiera, existe un entorno V_a^* en el que $g(x) < \beta+\varepsilon$.
Basta tomar un $\varepsilon < \gamma-\beta \Longrightarrow \gamma > \beta+\varepsilon$ para que se cumpla $g(x) < \beta+\varepsilon < \gamma$, c.q.d.

c) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha > \beta = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, tomamos $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Entonces se cumplirá:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha > \gamma > \beta = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, o sea $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha > \gamma$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \beta < \gamma$.
Entonces se verifican las condiciones de **a)** y **b)**, por lo que existe un U_a^* en que $f(x) > \gamma$ y también un V_a^* en que $g(x) < \gamma$. Por lo tanto, tomando la intersección de U_a^* y V_a^* tendremos un entorno reducido de a en que se verifica $f(x) > g(x)$, c.q.d.

2.– Calcular la función derivada de $v(x) = x^{x^x}$

Solución.

a) Sea $u(x) = x^x \Longrightarrow u' = xx^{x-1} + x^x \ln x = x^x(\ln x + 1)$.

b) Sea ahora $v(x) = x^{x^x} = x^u \Longrightarrow v' = ux^{u-1} + x^u \ln x\, u' = x^x x^{(x^x-1)} + x^{x^x} \ln x\, x^x(\ln x + 1) =$
$x^{x^x+x-1} + x^{x^x} x^x \left(\ln^2 x + \ln x\right) = x^{x^x} x^x \left[\ln^2 x + \ln x + \dfrac{1}{x}\right]$.

3.– Sea la función:

$$g(x)=\begin{cases} x^m\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0,\ m\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Se pide analizar, según los valores de m:

a) Su dominio.

b) La continuidad de la función.

c) La derivabilidad de g y calcular su derivada.

Solución.

a) La función g existe fuera del origen, pues es producto de x^m, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y del $\cos\dfrac{1}{x}$, que existen $\forall x\neq 0$. Como además está definida en el origen, existe en todo $\mathbb{R}$.

b) La función es continua fuera del origen por ser producto de funciones continuas, luego estudiamos su límite en $x=0$. Por ser el coseno una función acotada entre -1 y $+1$ tenemos que, para $m>0$, su límite es nulo, mientras, para $m=0$,

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

que no existe.

Luego g es continua en el origen si $m\in\mathbb{N}$ y fuera del origen $\forall m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

c) La función es derivable fuera del origen, para cualquier valor de m, por ser producto de funciones derivables. Estudiamos su derivada en $x=0$ sólo si es continua, es decir para $m\in\mathbb{N}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^m\cos\dfrac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{m-1}\cos\frac{1}{x}$$

De nuevo esta expresión tiene límite nulo si $m>1$, por estar acotado el coseno. Si $m=1$, el límite no existe.

Entonces g es derivable en $x=0$ si $m\in\mathbb{N}$, $m>1$ siendo su derivada nula. Para $x\neq 0$, la función es derivable $\forall m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y su derivada vale

$$g'(x)=mx^{m-1}\cos\frac{1}{x}+x^{m-2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$$