

Solución Ej. voluntario

① Demostración de que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$. Dos maneras:

a) Por R. al A. Supongamos $\sqrt{ab} > \frac{a+b}{2} \Rightarrow 4ab > a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 > a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$. Aburrido, pues $(a-b)^2 \geq 0$.

b) a partir de lo que queremos obtener, usando equivalencias:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow$$
$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2, \text{ lo cual se cumple } \forall a, b \in \mathbb{R}^+.$$

② Suma de n t^{os} de una S.G. $a_n = a_{n-1} \cdot r$

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1}$$

$$\cdot r \cdot S_n = a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

$$S_n(1-r) = a_1 - a_1 r^n \Rightarrow \boxed{S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}} \quad (r \neq 1). \text{ Si } r=1 \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$$

$$\text{Si } |r| < 1: \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}} \text{ pues } r^n \rightarrow 0 \text{ (} \forall |r| < 1 \text{)}$$

③ Dado $\alpha \in (0,1)$ y $\{a_n\} / |a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \alpha |a_{n+1} - a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$a) \boxed{|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha |a_n - a_{n-1}| \leq \alpha^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \dots \leq \alpha^{n-1} |a_2 - a_1|}$$

$$b) \text{ Dado } n > m \geq 1, |a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_{m+1} - a_m|$$
$$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \dots + |a_{m+1} - a_m| \leq$$
$$\alpha^{n-2} |a_2 - a_1| + \alpha^{n-3} |a_2 - a_1| + \dots + \alpha^{m-1} |a_2 - a_1| =$$
$$\alpha^{m-1} |a_2 - a_1| \left(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{\overbrace{n-2-(m-1)}^{n-m-1}} \right)$$

Según el ej. ② $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-m-1}$ ($n-m$ sumandos) vale

$$S_{n-m} = \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha} - \frac{\alpha^{n-m}}{\underbrace{1 - \alpha}_{> 0}} < \frac{1}{1 - \alpha}$$

$$\text{Entonces: } \boxed{|a_n - a_m| \leq |a_2 - a_1| \cdot \alpha^{m-1} \cdot S_{n-m} < \frac{\alpha^{m-1}}{1 - \alpha} |a_2 - a_1| \quad \text{c.q.d.}}$$
