1.– Escribir en función de intervalos el conjunto A $\subset$ ℝ definido por: $|x+4|+|x-4|<10$.

- Las expresiones que están en valor absoluto cambian de signo en los puntos $x = \pm 4$, lo que permite distinguir 3 zonas:

a) $\boxed{x<-4}$ $\quad x+4<0 \Rightarrow \boxed{|x+4| = -(x+4) = -x-4}$
$\quad x-4<0 \Rightarrow \boxed{|x-4| = -(x-4) = -x+4}$

b) $\boxed{-4\le x\le 4}$ $\quad x+4\geq 0 \Rightarrow \boxed{|x+4| = x+4}$
$\quad x-4\le 0 \Rightarrow \boxed{|x-4| = -(x-4) = -x+4}$

c) $\boxed{x>4}$ $\quad x+4>0 \Rightarrow \boxed{|x+4| = x+4}$
$\quad x-4>0 \Rightarrow \boxed{|x-4| = x-4}$

- Entonces, sustituyendo en la inecuación:

a') $x<-4 \Rightarrow -x-\cancel{4}-x+\cancel{4}<10 \Rightarrow -2x<10 \Rightarrow x>-5 \xRightarrow{x<-4} x\in(-5,-4)$

b') $-4\le x\le 4 \Rightarrow \cancel{x}+4-\cancel{x}+4<10 \Rightarrow 8<10$ (se cumple $\forall x$) $\xRightarrow{-4\le x\le 4} x\in[-4,4]$

c') $x>4 \Rightarrow x+\cancel{4}+x-\cancel{4}<10 \Rightarrow 2x<10 \Rightarrow x<5 \underset{x>4}{\Rightarrow} x\in(4,5)$

- La solución será la $\cup$ de los intervalos: $A=(-5,-4)\cup[-4,4]\cup(4,5)=(-5,5)$

$$\boxed{A=(-5,5)}$$

2.– Demostrar, aplicando la definición teórica de límite y considerando ℝ como espacio métrico, que la sucesión de término general $a_n = \dfrac{5n+20}{n+\sqrt{2}}$ converge a $a=5$.

Si ahora el espacio métrico en el que está definida la sucesión $\{a_n\}$ es el conjunto A del apartado 1, razonar si se puede considerar que $\{a_n\}$ sigue siendo convergente.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N} \,/\, \left|\dfrac{5m+20}{m+\sqrt2}-5\right|<\varepsilon \quad \forall m\geq n$

$$\left|\frac{5m+20}{m+\sqrt2}-5\right| = \left|\frac{\cancel{5m}+20-\cancel{5m}-5\sqrt2}{m+\sqrt2}\right| = \left|\frac{20-5\sqrt2}{m+\sqrt2}\right|<\varepsilon \Rightarrow m>\frac{20-5\sqrt2}{\varepsilon}-\sqrt2$$
$(m\in\mathbb{N})$

- Dado ε, basta tomar como n el primer número natural superior al valor $\alpha = \dfrac{20-5\sqrt2}{\varepsilon}-\sqrt2$. Es decir, si $\alpha>0$, $n=E(\alpha)+1$

Ej: $\varepsilon=0.1 \Rightarrow \alpha = 10(20-5\sqrt2)-\sqrt2 = 127.87 \Rightarrow n=128$
$\varepsilon = 10^{-3} \Rightarrow \alpha = 10^3(20-5\sqrt2)-\sqrt2 = 12927.52 \Rightarrow n = 12{,}928.$

- Si el EM en que está definida $\{a_n\}$ es el intervalo $(-5,5)$ $\{a_n\}$ no converge, pues $a\notin A$, no existe límite de $\{a_n\}$ en el espacio métrico considerado.

<u>NOTA</u>: al no indicar nada, estamos tomando como $d(x,y)=|x-y|$