1.- Calcular: $I = \displaystyle\int \frac{a^{\ln \mathrm{Ch}\, x}}{\mathrm{Coth}\, x}\, dx,\ a > 0.$

$(\ln \mathrm{Ch}\, x)' = \dfrac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}\, x} = \dfrac{1}{\mathrm{Coth}\, x} \Longrightarrow I = \displaystyle\int a^u du = \frac{1}{\ln a}\, a^{\ln \mathrm{Ch}\, x} + C.$

En el caso particular $a = e$: $I = \displaystyle\int \frac{e^{\ln \mathrm{Ch}\, x}}{\mathrm{Coth}\, x}\, dx = \int \frac{\mathrm{Ch}\, x}{\mathrm{Coth}\, x}\, dx = \int \mathrm{Sh}\, x\, dx = \mathrm{Ch}\, x + C.$

Como era de esperar, esta solución coincide con la solución general, haciendo en ella $a = e$.

2.- Obtener la fórmula de reducción para: $I(n) = \displaystyle\int \mathrm{cotg}^n\, x\, dx,\quad n \in \mathbb{N}.$

$I(n) = \displaystyle\int \mathrm{cotg}^{n-2}\, x\, \mathrm{cotg}^2\, x\ dx = \int \mathrm{cotg}^{n-2}\, x(1 + \mathrm{cotg}^2\, x - 1)\ dx = -\int \mathrm{cotg}^{n-2}\, x\,(-1 -$ $\mathrm{cotg}^2\, x)\ dx - \displaystyle\int \mathrm{cotg}^{n-2}\, x\ dx = -\frac{\mathrm{cotg}^{n-1}\, x}{n-1} - I(n-2),\quad (n \neq 1).$

$I(1) = \displaystyle\int \mathrm{cotg}\, x\ dx = \int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x}\ dx = \ln|\mathrm{sen}\, x|.$

3.- Descomponer en fracciones simples $\dfrac{1}{x^p(x^p+1)}$ e integrar $\displaystyle\int \frac{1}{x^5(x^8+1)}\ dx.$

a) $\dfrac{1}{x^p(x^p+1)} = \dfrac{1 + x^p - x^p}{x^p(x^p+1)} = \dfrac{1}{x^p} - \dfrac{1}{x^p+1}.$

b) $\dfrac{1}{x^5(x^8+1)} = x^3 \dfrac{1}{x^8(x^8+1)} = x^3\left(\dfrac{1}{x^8} - \dfrac{1}{x^8+1}\right) = \dfrac{1}{x^5} - \dfrac{x^3}{x^8+1}.$

Entonces $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^5}\ dx - \int \frac{x^3}{1+x^8}\ dx = \frac{x^{-4}}{-4} - \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2}\ dx = -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{4}\,\mathrm{arc\,tg}(x^4) + C.$

4.- Integrar: $I = \displaystyle\int \cos^7 x\ dx.$

El integrando es impar en coseno $\Longrightarrow \mathrm{sen}\, x = t \Longrightarrow I = \displaystyle\int \left(1 - \mathrm{sen}^2\, x\right)^3 \cos x\ dx = \int \left(1 - t^2\right)^3 dt =$ $\displaystyle\int \left(1 - 3\,t^2 + 3\,t^4 - t^6\right)\ dt = t - t^3 + \frac{3}{5}\,t^5 - \frac{1}{7}\,t^7 = \mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}^3\, x + \frac{3}{5}\,\mathrm{sen}^5\, x - \frac{1}{7}\,\mathrm{sen}^7\, x + C.$

5.- Integrar: $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}},\ a \in \mathbb{R}.$

Cambio: $x = \dfrac{1}{t},\ dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, con lo que

$a \neq 0: \quad I = \cdots = \displaystyle\int \frac{-t\, dt}{\sqrt{1 - a^2t^2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{-2a^2t\, dt}{2\sqrt{1 - a^2t^2}} = \frac{1}{a^2}\sqrt{1 - a^2t^2} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2x} + C.$

$a = 0: \quad I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C.$

Otro posible cambio: $x = \dfrac{a}{\cos t},\ dx = \dfrac{a\, \mathrm{sen}\, t\, dt}{\cos^2 t}$, y $\mathrm{sen}\, t = \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}}$, resultando

$a \neq 0: \quad I = \cdots = \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{sen}\, t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2x} + C.$

con el mismo resultado que antes para el caso $a = 0$.