1.– Sean f y g dos funciones definidas en todo $\mathbb{R}$. Se pide demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > \beta$, demostrar que existe un entorno de a en el que $f(x) > \beta$.

b) Si $\lim_{x\to a} g(x) = \gamma < \beta$, demostrar que existe un entorno de a en el que $g(x) < \beta$.

c) Si ambas tienen límite en a y se cumple $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$, demostrar que existe un entorno de a en el que $f(x) > g(x)$.

Solución (véanse las demostraciones de las propiedades 2) y 3) de los límites de sucesiones).

a) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \; (\alpha > \beta) \Longrightarrow \boxed{\forall\varepsilon\ \exists\delta \,/\, 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon}$.
Entonces $-\varepsilon < f(x) - \alpha < \varepsilon \Longrightarrow \alpha - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + \alpha$.
Es decir, dado un ε cualquiera, existe un entorno U_a^* en el que $f(x) > \alpha - \varepsilon$.
Basta tomar un $\varepsilon < \alpha - \beta \Longrightarrow \beta < \alpha - \varepsilon$ para que se cumpla $f(x) > \alpha - \varepsilon > \beta$, c.q.d.

b) $\lim_{x\to a} g(x) = \gamma \; (\gamma < \beta) \Longrightarrow \boxed{\forall\varepsilon\ \exists\delta \,/\, 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |g(x)-\gamma| < \varepsilon}$.
Entonces $-\varepsilon < g(x) - \gamma < \varepsilon \Longrightarrow \gamma - \varepsilon < g(x) < \gamma + \varepsilon$.
Es decir, dado un ε cualquiera, existe un entorno V_a^* en el que $g(x) < \gamma + \varepsilon$.
Basta tomar un $\varepsilon < \beta - \gamma \Longrightarrow \beta > \gamma + \varepsilon$ para que se cumpla $g(x) < \gamma + \varepsilon < \beta$, c.q.d.

c) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > \gamma = \lim_{x\to a} g(x)$, tomamos $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. Entonces se cumplirá:
$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > \beta > \gamma = \lim_{x\to a} g(x)$, o sea $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > \beta$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \gamma < \beta$.
Entonces se verifican las condiciones de **a)** y **b)**, por lo que existe un U_a^* en que $f(x) > \beta$ y también un V_a^* en que $g(x) < \beta$. Por lo tanto, tomando la intersección de U_a^* y V_a^* tendremos un entorno reducido de a en que se verifica $f(x) > g(x)$, c.q.d.

2.– Calcular la función derivada de $v(x) = x^{x^x}$

Solución.

a) Sea $u(x) = x^x \Longrightarrow u' = x x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(\ln x + 1)$.

b) Sea ahora $v(x) = x^{x^x} = x^u \Longrightarrow v' = u x^{u-1} + x^u \ln x \, u' = x^x x^{(x^x-1)} + x^{x^x} \ln x \, x^x(\ln x + 1) = x^{x^x+x-1} + x^{x^x} x^x \left(\ln^2 x + \ln x\right) = x^{x^x} x^x \left[\ln^2 x + \ln x + \dfrac{1}{x}\right]$.

3.– Dada la función :

$$g(x) = \begin{cases} x^m \cos \dfrac{1}{x} & x \neq 0, \ m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Analizar, según los valores de m:

a) Su dominio.

b) La continuidad de la función.

c) La derivabilidad de g y calcular su derivada.

Solución.

a) La función g existe fuera del origen, pues es producto de x^m, que existe $\forall x \in \mathbb{R}$, y del $\cos \dfrac{1}{x}$, que existe $\forall x \neq 0$. Como g está definida en $x = 0$, $g(0) = 0$, existe en todo $\mathbb{R}$.

b) La función es continua fuera del origen por ser producto de funciones continuas, luego estudiamos su límite en $x = 0$. Por ser el coseno una función acotada entre -1 y $+1$, tenemos que

$$m > 0 \Longrightarrow \lim_{x \to 0} g(x) = 0; \quad m \neq 0 \Longrightarrow \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} (\nexists)$$

Luego g es continua en todo $\mathbb{R}$ si $m \in \mathbb{N}$ y es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\} \, \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

c) La función es derivable fuera del origen por ser producto de funciones derivables. Estudiamos su derivada en $x = 0$, solo si es continua, es decir para $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^m \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{m-1} \cos \frac{1}{x} = 0 \text{ (si } m - 1 > 0),$$

por estar acotado el coseno, mientras que el límite no existe si $m = 1$.

Entonces g es derivable en todo $\mathbb{R}$ si $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\} \, \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, siendo su derivada

$$g'(x) = m x^{m-1} \cos \frac{1}{x} + x^{m-2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \ (x \neq 0); \quad g'(0) = 0.$$