1.– Demostrar, aplicando el Principio de Inducción, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}} < 2$.

Solución. Para demostrarlo, llamamos

$$a_1=\sqrt{2},\ a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\dots\ a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ raíces}}.$$

a) Comprobamos que se cumple $a_1=\sqrt{2}<2$.

b) Suponemos $a_k=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}}_{k \text{ raíces}}<2$.

c) Hemos de demostrar $a_{k+1}<2$. Pero $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}$.

Entonces, $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+2}=2$ *c.q.d.*

2.– Razonar la verdad o falsedad de la afirmación: "la suma de dos irracionales es irracional".

Solución. La afirmación es falsa pues basta considerar -por ejemplo- la suma de un número irracional y su opuesto. Sean $\alpha,-\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Se cumple $\alpha+(-\alpha)=0\in\mathbb{Q}$.

3.– Se dice que un número es cuadrado perfecto si su raiz cuadrada positiva es un natural. ¿Puede ser cuadrado perfecto el producto de un número natural (n) por el siguiente ($n+1$)? ¿Y el de n por $n+2$?

Solución. Procedemos por reducción al absurdo.

a) Supongamos que existe algún $n\in\mathbb{N}$ que cumpla $n(n+1)=m^2,\ m\in\mathbb{N}$. Entonces

$$n^2<n^2+n<n^2+2n+1\Longrightarrow n^2<\underbrace{n(n+1)}_{m^2}<(n+1)^2\overset{\sqrt{}}{\Longrightarrow} n<m<n+1.$$

Con lo que llegamos al absurdo de que entre dos naturales consecutivos (n y $n+1$) existe otro natural. Luego no existe ningún n que verifique esta condición.

b) Suponiendo ahora que existe algún $n\in\mathbb{N}$ que verifique $n(n+2)=m^2,\ m\in\mathbb{N}$ resulta

$$n^2<n^2+2n<n^2+2n+1\Longrightarrow n^2<\underbrace{n(n+2)}_{m^2}<(n+1)^2\overset{\sqrt{}}{\Longrightarrow} n<m<n+1.$$

Luego tampoco existe ningún n que verifique esta condición.

4.– Dado el conjunto $A_n = \left\{ x \in \mathbb{Q} \ / \ x = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$, se pide calcular la expresión general para sus cotas, así como sus extremos, máximo y mínimo, en caso de que existan.

Solución. Los elementos de A_n son $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{4}}, \dfrac{1}{\sqrt{9}}, \dfrac{1}{\sqrt{16}}, \dfrac{1}{\sqrt{25}}, \dots \right\}$,

a) Cota superior: cualquier $\alpha \in \mathbb{R}/\alpha \geq \dfrac{1}{2}$.

b) Cota inferior: cualquier $\beta \in \mathbb{R}/\beta \leq 0$.

c) $\mathrm{Sup}(A_n) = \dfrac{1}{2}$.

d) $\mathrm{Inf}(A_n) = 0$.

e) Como el supremo pertenece a A_n, existe máximo, $M = \dfrac{1}{2}$.

f) Como $0 \notin A_n$, no existe mínimo.