CÁLCULO INFINITESIMAL 1

CUESTIONES Y PROBLEMAS DE EXAMEN

(desde el curso 2010/11)

Jaime Fe Marqués
ETSI Caminos - A Coruña

Índice

1. Cuestiones de examen

Curso 10/11

1.– Justifíquese la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: "La suma de dos números irracionales iguales es irracional" (*enero 2011*).

2.– El conjunto A, no vacío, es biyectivo con un subconjunto suyo propio B. ¿Qué puede deducirse respecto al número de elementos de A? (*julio 2011*).
Nota: B es subconjunto propio de A si $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ y $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$.

Curso 11/12

3.– Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a > b > c > 0$. Demuéstrese que $|a - b| < |a - c|$ (*enero 2012*).

4.– Sea la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $I = [1, 2]$. Se pide analizar si se cumplen en I (o algún subintervalo suyo) las condiciones para la aplicación de cada uno de los siguientes teoremas, enunciándolo y aplicándolo a dos puntos del intervalo, en caso afirmativo (*julio 2012*).

a) El Teorema de Bolzano (de los ceros).

b) La Propiedad de Darboux (del valor intermedio).

c) El Teorema de Weierstrass (de la existencia de extremos).

d) El Teorema del Valor Medio de Rolle.

e) El Teorema del Valor Medio de Cauchy.

f) El Teorema de Lagrange (de los incrementos finitos).

Curso 12/13

5.– Sea K un cuerpo y 0 el elemento neutro de K con respecto a la suma. Se pide demostrar que se verifica: $x, y \in \mathrm{K},\ x \cdot y = 0 \Longrightarrow x = 0$ ó $y = 0$. (*enero 2013*)
Nota: Si se utiliza la propiedad $0 \cdot a = 0,\ \forall a \in K$, no es preciso demostrarla.

6.– Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$. Demuéstrese que, si $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ es cerrado, contiene a su frontera (*enero 2013*).

7.– Sea la sucesión de números reales $\{a_n\}$, de límite α, tal que todos sus elementos son distintos entre sí y $\alpha \neq a_n\, \forall n \in \mathbb{N}$. Se considera el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$ y el conjunto A, formado por los elementos de la sucesión. Razónese brevemente la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones (*julio 2013*):

a) El valor α es un punto de acumulación de A.

b) El valor α es un punto frontera de A.

c) El interior del conjunto A es vacío.

Curso 13/14

8.– Define función monótona creciente y función monótona decreciente. Sea f una función monótona creciente en todo $\mathbb{R}$. Sea $g(x) = f(-x)$. Demuestra que g es monótona decreciente en todo $\mathbb{R}$ (*enero 2014*).

9.– Sea la función f, continua en $[a, b]$, tal que $f(a) = -1$, $f(b) = 2$. Razona si existe siempre $\alpha \in (a, b)$ tal que: **a)** $f(\alpha) = \sqrt{2}$; **b)** $f(\alpha) = 2$; **c)** $f(\alpha)$ es el máximo de f en $[a, b]$ (*enero 2014*).

10.– Sea la sucesión $\{a_n\}$ de límite $l \in \mathbb{R}$.

a) Si $l = 0$, razónese qué podemos afirmar del signo de sus términos.

b) Si $l > 0$ y $\{a_n\}$ creciente, razónese si $\exists n \,/\, 0 < a_m \leq a_{m+1} \leq l, \ \forall m \geq n$ (*julio 2014*).

11.– Sea el intervalo $I \in \mathbb{R}$ de extremos $a, b \in \mathbb{R}, \ a < b$. Sea el conjunto A, formado por los irracionales contenidos en I. En el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$, se pide expresar, del modo más simplificado posible y razonando la respuesta, los conjuntos **a) A, b)** $\overline{\mathrm{A}}$, **c)** A' **y d)** $Fr(\mathrm{A})$ (*julio 2014*).

Curso 14/15

12.– Sea $k \in \mathbb{R}, \ 0 < k < 1$. Se pide justificar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) La raíz n-ésima de k tiene límite 1.

b) La raíz n-ésima de $k^{\ln n}$ tiene límite 1.

c) La raíz n-ésima de $(\ln n)^k$ tiene límite 1 (*enero 2015*).

13.– Sea una función $f : I \to \mathbb{R}$, derivable en $I \setminus \{a\}$.

a) ¿De qué maneras podemos demostrar su derivabilidad en a?

b) Aplíquese lo anterior al caso $f(x) = x \operatorname{sen} |x|$ en el punto $a = 0$ (*enero 2015*).

14.– Razona la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: "Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Si f es continua en I, posee un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo" (*julio 2015*).

15.– Sea un intervalo $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$. Sea $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$, derivable en A. Si f tiene un extremo relativo en $a \in \mathring{\mathrm{A}}$, razona qué podemos afirmar de $f'(a)$, así como de la posición de los extremos relativos de una función cualquiera en un intervalo en el que está definida (*julio 2015*).

Curso 15/16

16.– Sea la función f, definida en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, en el que es continua. Se pide razonar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) La función f está acotada en I.

b) Si f es derivable en $a \in I$ y tiene un extremo en a, se cumple $f'(a) = 0$ (*enero 2016*).

17.– Obtener razonadamente el conjunto interior de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ con la métrica usual (*julio 2016*).

Curso 16/17

18.– Sean a_n, b_n dos infinitésimos equivalentes de orden p. Se pide justificar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) $a_n + b_n$ es un infinitésimo de orden p.

a) $a_n - b_n$ es un infinitésimo de orden p.

a) $e^{a_n} - e^{b_n}$ es un infinitésimo de orden p (*enero 2017*).

19.– Obtener la derivada de la función inversa de $\tanh x$ (*enero 2017*).

20.– Sea el intervalo $I = [-1, 1]$. En cada uno de los 4 primeros apartados, halla una función que verifique en I las condiciones del teorema correspondiente, justificando que se cumplen dichas condiciones y obteniendo los puntos en los que lo hacen, o un ejemplo de ellos (las funciones deben ser distintas en cada apartado).

a) Teorema de Bolzano (o de los ceros).

b) Teorema de Weierstrass (existencia de extremos).

c) Teorema del valor medio de Rolle.

d) Teorema de Lagrange (o de los incrementos finitos).

e) ¿Sabrías encontrar una función que verifique los cuatro apartados anteriores? (*julio 2017*).

Curso 17/18

21.– Obtener un infinitésimo equivalente a $\sqrt{x} - 1$ cuando $x \to 1$, en la forma general $k(x-1)^p$ (*enero 2018*).

22.– Sea la sucesión de término general $a_n \in \mathbb{R}$. que puede converger o diverger. Se pide estudiar la relación entre su límite y el de la sucesión de término general $\sqrt[4]{a_n}$ (*enero 2018*).

23.– Justifica la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: "Sean dos sucesiones monótonas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Si $0 < a_n < b_n \ \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$" (*julio 2018*).

24.– Justifica la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: "Si $x \in \mathbb{Q}$, $x + \pi$ es irracional, pero $x \cdot \pi$ puede no serlo" (*julio 2018*).

Curso 18/19

25.– Razona la verdad o falsedad de las afirmaciones: "En $\mathbb{R}$, un conjunto finito es acotado, un conjunto infinito puede ser numerable, un conjunto acotado es numerable" (*enero 2019*).

26.– Sea la función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuya gráfica es una curva simétrica respecto a OY. Se pide demostrar que la recta tangente a la curva en el origen es horizontal (*enero 2019*).

27.– Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$, siendo d_2 la distancia euclídea. Se pide:

a) Expresión que define cualquier bola abierta centrada en el punto $P(1,2)$.

b) De las bolas anteriores, hallar la de radio mínimo.

c) Sea el conjunto A formado por los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuya ordenada es mayor que su abscisa y ésta mayor que su ordenada cambiada de signo. Exprésalo de la forma más sencilla posible.

d) Razona si el conjunto A es abierto y si es entorno de P (*julio 2019*).

Curso 19/20

28.– Sea $0 \leq a \leq b + c$. Demuestra que $\dfrac{a}{1+a} \leq \dfrac{b+c}{1+b+c}$ (*enero 2020*).

29.– Sean A, B, C conjuntos de un espacio métrico. La diferencia A\B entre los conjuntos A y B, B $\subset$ A, es el conjunto de elementos de A que no pertenecen a B. Justifica la verdad o falsedad de $\mathrm{A}\backslash\mathrm{B} \subset \mathrm{C} \Longrightarrow \mathrm{A} \subset \mathrm{C}$ (*enero 2020*).

30.– Sean tres números naturales tales que su suma vale 20 y el producto de dos de ellos, 4. Demuestra que la suma de los cuadrados de los números es menor que 265 (*julio 2020*).

31.– En un espacio métrico (E, d), se considera el conjunto $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. Razona la verdad o falsedad de la relación: $\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}} \iff \mathring{\mathrm{A}} \cap Fr(\mathrm{A}) = \phi$ (*julio 2020*).

Curso 20/21

32.– Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Razona si $\{a_n\}$ puede no ser convergente ni divergente ni acotada. En caso afirmativo, pon un ejemplo (*enero 2021*).

33.– A partir de las propiedades de un cuerpo ordenado, demuestra: (*enero 2021*)

$$\textbf{a)}\ \left.\begin{array}{l} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{array}\right\} \Longrightarrow ac < bd\,; \quad \textbf{b)}\ \left.\begin{array}{l} a < b < 0 \\ c < d < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow ac > bd$$

34.– Demuestra que la raíz cuadrada positiva de un número real comprendido entre 0 y 1 es mayor que el número, mientras que la de un real mayor que 1 es menor que él (*julio 2021*).

35.– Sean las funciones f y g definidas de la siguiente manera

$$f(x) = x^2\,; \qquad g(x) = x + x + \cdots + x\ (x \text{ veces}) \Longrightarrow g(x) = x \cdot x = x^2$$

Derivando resulta que $f'(x) = 2x$, mientras que

$$g'(x) = (x + x + \cdots + x)' = (1 + 1 + \cdots + 1) = x$$

Explica a qué se debe la diferencia entre ambos resultados (*julio 2021*).

Curso 21/22

36.– Demuestra que, $\forall a, b > 0$, se cumple $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ (*enero 2022*).

37.– Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Obtén razonadamente los conjuntos adherente e interior de $\mathbb{Q}$ (*enero 2022*).

38.– Sean a y b números reales no nulos, tales que $a < b$. Estudia la relación que existe entre sus inversos $\dfrac{1}{a}$ y $\dfrac{1}{b}$ (*julio 2022*).

Curso 22/23

39.– Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que, para todo natural q, existe un entero p tal que: (*enero 2023*)

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

40.– Sabiendo que los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ tienen estructura de cuerpo, razona si el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ posee dicha estructura (*julio 2023*).

41.– Se desea calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{n}$$

Se pide razonar si los métodos que se indican son válidos para calcularlo y obtenerlo por aquel o aquellos que lo sean: **a)** Media aritmética. **b)** Stolz. **c)** L'hôpital (*julio 2023*).

Curso 23/24

42.– Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Razona la verdad o falsedad de: $b - a < b$ (*enero 2024*).

43.– Se considera el conjunto siguiente.

$$\mathrm{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{1}{(n+1)^2} < x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2},\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

a) Interpreta geométricamente el conjunto A.

b) Razona si A es abierto y calcula su conjunto exterior.

c) Razona si es posible obtener la intersección de A con su frontera, sin necesidad de calcular ésta (*enero 2024*).

44.– Sea n un número primo mayor que 2. Razona si $n^2 + 1$ puede ser primo (*julio 2024*).

45.– Demuestra que $P(x) = 2x^3 - 6x + 3$ tiene tres raíces reales y obtén intervalos en los que podamos asegurar su existencia (*julio 2024*).

---

2. Soluciones a las cuestiones

1.– La afirmación es verdadera. Se justifica por reducción al absurdo:
Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y supongamos que $x + x \in \mathbb{Q}$. Entonces

$$x + x = 2x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x = \frac{m}{2n} \in \mathbb{Q}$$

contra la hipótesis. Concluimos que la suma de dos irracionales iguales es irracional.

2.– Puede deducirse que A posee infinitos elementos, como se justifica a continuación:
El número de elementos de A sólo puede ser finito o infinito. Supongamos que es finito y $n \in \mathbb{N}$ es su número de elementos.
Si B $\subset$ A, todo elemento de B está en A, por lo que el número de elementos de B será $m \leq n$. Como B $\neq$ A (A posee algún elemento que no es de B), entonces $m < n$ y no se puede establecer una biyección entre ambos conjuntos, lo que contradice el enunciado. Concluimos que el número de elementos de A es infinito.

3.– Lo demostraremos de dos maneras: directamente y por reducción al absurdo.

a) $a > b \Longrightarrow a - b > 0 \Longrightarrow a - b = |a - b|$.

$a > c \Longrightarrow a - c > 0 \Longrightarrow a - c = |a - c|$.

$b > c \Longrightarrow -b < -c \Longrightarrow a - b < a - c \Longrightarrow |a - b| < |a - c|$.

b) $a > b \Longrightarrow a - b > 0 \Longrightarrow a - b = |a - b|$.

$a > c \Longrightarrow a - c > 0 \Longrightarrow a - c = |a - c|$.

Supongamos $|a - b| \geq |a - c|$. Entonces

$$a - b \geq a - c \Longrightarrow -b \geq -c \Longrightarrow b \leq c$$

lo que contradice el enunciado. Concluimos que $|a - b| < |a - c|$.

4.–

a) **Teorema de Bolzano**: "Si una función continua toma distinto signo en los extremos de un intervalo cerrado, existe un punto intermedio en el que la función se anula".

En este caso, f es continua en un intervalo cerrado pero su valor es la raiz cuadrada positiva de x, por lo que no toma valor negativo en ningún punto y el teorema no se puede aplicar.

b) **Propiedad de Darboux**: "Si una función continua toma distinto valor en los extremos de un intervalo cerrado, toma todos los valores intermedios al menos una vez".

La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[1, 2]$, por lo que alcanza todos los valores entre 1 y $\sqrt{2}$:

$$\forall y \ / \ 1 < y < \sqrt{2}, \ \exists \xi \in (1, 2) \ / \ \sqrt{\xi} = y \Longrightarrow \xi = y^2$$

c) **Teorema de Weierstrass**: "Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza en él un máximo y un mínimo".

Al ser f continua en $I = [1, 2]$ alcanza extremos en I. Como es creciente, alcanzará el mínimo en $x = 1$, $(f(1) = 1)$, y el máximo en $x = 2$, $(f(2) = \sqrt{2})$.

d) Teorema de Rolle: "Si una función, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), toma el mismo valor en los extremos del intervalo, existe un punto intermedio en que su derivada se anula".

La función es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$ pero, al ser estrictamente creciente, no existen dos puntos en los que tome el mismo valor, por lo que no se puede aplicar el teorema.

e) Teorema de Cauchy. "Sean dos funciones f y g, continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces $\exists\xi \in (a,b)\ /\ f'(\xi)\,[g(b)-g(a)] = g'(\xi)\,[f(b)-f(a)]$".

En el intervalo $[1,2]$, la función $f(x)=\sqrt{x}$ cumple las condiciones del teorema pero, sin definir una segunda función, no puede asegurarse nada.

f) Teorema de Lagrange. "Sea f, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces $\exists\xi \in (a,b)/f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

La función es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$, por lo que el teorema puede aplicarse:

$$\exists\xi \in (1,2)/f'(\xi) = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1 \Longrightarrow f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \sqrt{2}-1 \Longrightarrow \xi = \cdots = \frac{1}{12-8\sqrt{2}}$$

5.– Sea $x\cdot y = 0$ y queremos demostrar que alguno de los factores es nulo. Si $x=0$, ya está demostrado. Si $x\neq 0$, entonces $\exists\, x^{-1}\in K\,/\,x^{-1}\cdot x = 1$. Multiplicando ambos miembros por x^{-1} y sabiendo que $0\cdot y = y\cdot 0 = 0,\ \forall y\in K$, resulta:

$$x\cdot y = 0 \Longrightarrow x^{-1}\cdot x\cdot y = x^{-1}\cdot 0 \Longrightarrow 1\cdot y = 0 \Longrightarrow y = 0$$

luego uno de los dos es nulo.
También puede demostrarse por reducción al absurdo, suponiendo que ninguno es nulo, por ejemplo x. Llegamos a la contradicción de que y es nulo. Si suponemos $y\neq 0$, resulta análogamente $x=0$. Luego alguno de los dos debe ser nulo.

6.– Por la definición de conjunto cerrado, $\mathrm{A}=\overline{\mathrm{A}}$. Por las propiedades de la frontera $Fr(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus\mathrm{A}} \subset \overline{\mathrm{A}}$ (o bien $Fr(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}}\setminus\mathring{\mathrm{A}} \subset \overline{\mathrm{A}}$). Entonces $Fr(\mathrm{A}) \subset \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \Longrightarrow Fr(\mathrm{A})\subset \mathrm{A}$.

7.–

a) Verdadera. Un punto de acumulación de A es el que tiene puntos de A distintos de él, tan cerca como se quiera. Al ser α el límite, tiene elementos de la sucesión tan cerca como se quiera. Como los elementos son distintos de α, éste cumple la condición de punto de acumulación.

b) Verdadera. Un punto frontera de A es el que tiene puntos de A y de su complementario tan cerca como se quiera. Al ser α el límite, cumple la primera condición. Por otro lado, al ser $\alpha\neq a_n\,\forall n$, los puntos de la sucesión son aislados, por lo que entre dos cualesquiera de ellos –por próximos que estén a A– habrá infinitos puntos de $\mathbb{R}\setminus\mathrm{A}$. Entonces α tiene también puntos de $\mathbb{R}\setminus\mathrm{A}$ tan cerca como queramos y se cumple la condición de punto frontera.

c) Verdadera. Un punto es interior de A si existe una bola abierta centrada en él contenida en A. Al ser aislados los puntos de A, existe una bola centrada en cada uno de ellos que no contiene ningún otro punto de A, por lo que contiene infinitos puntos de $\mathbb{R}\setminus\mathrm{A}$. Luego todo punto de A tiene puntos de $\mathbb{R}\setminus\mathrm{A}$ tan cerca como queramos. Entonces no puede existir una bola centrada en dicho punto y contenida en A pues, por pequeño que sea su radio, siempre contendrá puntos de $\mathbb{R}\setminus\mathrm{A}$. Luego no existen puntos interiores de A.

8.–

a) La función f es monótona creciente $\Longleftrightarrow\ \forall x_1 < x_2,\ f(x_1 \leq f(x_2))$

b) La función f es monótona decreciente $\Longleftrightarrow\ \forall x_1 < x_2,\ f(x_1 \geq f(x_2))$

c) Demostración. $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_2 < -x_1$.

Entonces, al ser f monótona creciente, $\forall x_1 < x_2,\ f(-x_2) \leq f(-x_1) \Rightarrow g(x_2) \leq g(x_1) \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$. Luego g es monótona decreciente.

9.–

a) **Verdadero**. Por la Propiedad de Darboux (del valor intermedio), una función continua alcanza cualquier valor intermedio entre dos dados. Como $f(a) = -1,\ f(b) = 2$ y se cumple $-1 < \sqrt{2} < 2$, entonces $\exists \alpha \,/\, f((\alpha) = \sqrt{2}$.

b) **Falso**. La propiedad anterior no asegura que f alcance el valor 2 en el interior del intervalo, pues no es intermedio entre $--1$ y 2.

Contraejemplo: si consideramos la función $y = x$ en el intervalo $[a, b] = [-1, 2]$, no alcanza el valor 2 en el interior del intervalo, sino sólo en su extremo b.

c) **Falso**. El Teorema de Weierstrass asegura que f, continua en $[a, b]$, alcanza en él un máximo y un mínimo. Pero no asegura que estos valores se alcancen en el interior del intervalo.

Contraejemplo: si consideramos la función $y = x$ en $[a, b] = [-1, 2]$, no alcanza el máximo en el interior del intervalo, sino en su extremo b.

10.–

a) No se puede afirmar nada. Sus términos pueden ser positivos, por ejemplo $a_n = \dfrac{1}{n}$; negativos, por ejemplo $a_n = -\dfrac{1}{n}$; o sin signo definido, por ejemplo $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

b) La expresión es cierta y se justifica en tres pasos:

1. Si $l > 0$, a partir de un cierto índice los términos son también mayores que 0 (propiedades de los límites). Luego $\exists n \,/\, 0 < a_m,\ \forall m \geq n$.
2. Por ser $\{a_n\}$ creciente, $a_m \leq a_{m+1},\ \forall m$.
3. Por ser $\{a_n\}$ creciente, $a_{m+1} \leq l$, $\forall m$. De lo contrario (reducción al absurdo) existirá un $m \,/\, a_{m+1} > l$. Como la sucesión es creciente, los siguientes términos cumplirán

$$l < a_{m+1} \leq a_{m+2} \leq a_{m+3} \ldots \Longrightarrow 0 < a_{m+1} - l \leq a_{m+2} - l \leq a_{m+3} - l \ldots$$

luego la distancia de los términos de $\{a_n\}$ a l no tiende a 0 y l no puede ser el límite.

11.–

a) Según contenga o no a sus extremos, I tomará una de las siguientes expresiones:

$$(a, b)\,,\ \ [a, b]\,,\ \ [a, b),\ \ (a, b]$$

El conjunto A puede expresarse de las siguientes formas

$$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,/\, x \in I\} \ = \ \{x \in I \,/\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \ = \ I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

b) En el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$, todo número real tiene números irracionales tan cerca como queramos, luego: 1) Los números reales de (a, b) tienen irracionales de I (elementos de A) tan cerca como queramos, luego pertenecen a $\overline{\mathrm{A}}$. 2) Los extremos a y b del intervalo, pertenezcan a I o no, tienen irracionales de I tan cerca como queramos, luego pertenecen a $\overline{\mathrm{A}}$. 3) Por otro lado, ningún real $x < a$ o $x > b$ pertenece a $\overline{\mathrm{A}}$, pues podemos encontrar una bola centrada en él que no contenga puntos de I. Entonces $\overline{\mathrm{A}} = [a, b]$.

c) Ningún punto de A es aislado pues todo irracional tiene otros tan cerca como queramos. Entonces $\mathrm{A}' = \overline{\mathrm{A}} \setminus Aisl(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}} = [a, b]$.

d) Ningún punto de A es interior pues todo irracional tiene racionales tan cerca como queramos. Entonces $Fr(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{A}} = [a, b]$.

12.–

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = \lim\limits_{n\to\infty} k^{1/n} = k^0 = 1$, pues $\dfrac{1}{n} \to 0$. La afirmación es verdadera.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k^{\ln n}} = \lim\limits_{n\to\infty} k^{\frac{\ln n}{n}} = k^0 = 1$, pues $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$, ya que el neperiano de n es despreciable frente a n (infinito logarítmico despreciable frente al potencial). La afirmación es verdadera.

c) $\sqrt[n]{(\ln n)^k} = (\ln n)^{k/n} = e^{\left(\ln(\ln n)^{k/n}\right)} = e^{\frac{k}{n}\ln(\ln n)}$. El exponente $\dfrac{k\ln(\ln n)}{n}$ tiende a 0, ya que el neperiano de $\ln n$ es despreciable frente a $\ln n$, luego es despreciable frente a n. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\ln n)^k} = e^0$ y la afirmación es verdadera.

13.–

a) Podemos demostrarla de dos maneras: **1)** por la definición de derivada y **2)** si f es continua, a partir del teorema de “la derivada como límite de derivadas”.

b1) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h \operatorname{sen}|h| - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \operatorname{sen}|h| = 0 = f'(0)$. Luego f es derivable en $a = 0$ y su derivada vale $f'(0) = 0$.

b2) La función f es continua en $a = 0$, pues las funciones seno y valor absoluto son continuas en $\mathbb{R}$ y la composición y el producto de funciones continuas es continua.

- Si $x > 0$, $f(x) = x \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sen} x + x\cos x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 + 0 \cdot 1 = 0 = f'(0^+)$.
- Si $x < 0$, $f(x) = -x \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x - x\cos x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 - 0 \cdot 1 = 0 = f'(0^-)$.

Como $f'(0^+) = f'(0^-)$, f es derivable en $a = 0$ y se cumple $f'(0) = 0$.

14.– El Teorema de Weierstrass afirma que “toda función continua en un intervalo cerrado alcanza en él un máximo y un mínimo”. Como el enunciado no asegura que I sea cerrado, no podemos asegurar nada a partir del teorema. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ en el intervalo $(0, 1)$ es continua, pero no tiene máximo ni mínimo. Luego la afirmación es falsa.

15.– El Teorema del Extremo Relativo dice que “si f es derivable en I y posee un extremo relativo en un punto a, interior de I, entonces $f'(a) = 0$”. En este caso podemos asegurar que $f'(a) = 0$.
En las condiciones del teorema no se considera la frontera del dominio (extremos del intervalo de definición), ni los puntos en que f no sea derivable. Luego los posibles extremos de una función f se encuentran en: a) puntos interiores del dominio en los que $f' = 0$; b) la frontera del dominio; c) puntos en que f no sea derivable.

16.–

a) El Teorema de Weierstrass afirma que "toda función continua en un intervalo cerrado, alcanza en él en máximo y un mínimo", luego dicha función tendrá supremo e ínfimo, por lo que estará acotada. Como el enunciado no dice que I sea cerrado, no podemos asegurar la acotación de f a partir del teorema. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $(0,1)$ es continua, pero tiende a ∞ cuando $x \to 0$. Luego la afirmación es falsa.

b) El Teorema del Extremo Relativo dice que "si f es derivable en I y posee un extremo relativo en un punto a, interior de I, entonces $f'(a) = 0$". El enunciado no asegura que a sea interior de I, luego no podemos asegurar que $f'(a) = 0$ a partir del teorema. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ en $[0,1]$ tiene un mínimo en $x = 0$ y un máximo en $x = 1$, pero en ambos puntos $f'(x) = 1 \neq 0$, luego la afirmación es falsa.

17.– Dado un espacio métrico (E, d) y un conjunto $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, un punto $x \in \mathrm{E}$ es interior de A si y sólo si existe una bola abierta centrada en x y contenida en A, es decir si

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ \,/\, B(x,r) \subset \mathrm{A}$$

En (E, d), el conjunto interior de A, $\mathring{\mathrm{A}}$, está formado por los puntos interiores de A.
El conjunto $\mathrm{A} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ está formado por los irracionales de la recta real. Dicho conjunto no tiene puntos interiores, pues no existe ninguna bola centrada en un irracional y contenida en A, es decir, formada sólo por irracionales. Esto se debe a que, entre dos irracionales (por tanto, reales), siempre existe algún racional (Propiedades de los números reales). Entonces

$$(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})^\circ = \phi$$

18.–

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} + 1 = 2$, pues $a_n \sim b_n$.

"Si el cociente de dos infinitésimos tiene límite finito y no nulo, ambos tienen el mismo orden", luego la afirmación es verdadera.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} - 1 = 0$, pues $a_n \sim b_n$.

"Si el cociente de dos infinitésimos es un infinitésimo, el numerador es de mayor orden", luego la afirmación es falsa.

c) $e^{a_n} - e^{b_n} = \underbrace{e^{b_n}}_{\to 1} \left(e^{a_n - b_n} - 1\right) \sim e^{a_n - b_n} - 1 \sim a_n - b_n.$

"La diferencia de dos infinitésimos equivalentes de orden p es de orden superior a p", luego la afirmación es falsa.

19.– Un modo de resolver el problema es obtener la derivada de la función $y = \operatorname{argth} x$ expresada en forma logarítmica:

$$y' = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' : \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

La derivada puede también obtenerse a partir de la definición de función inversa:

$$y = \operatorname{argth} x \Rightarrow x = \tanh y \Rightarrow 1 = \left(1 - \tanh^2 y\right) y' \Rightarrow y' = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$$

20.–

a) Condición: f continua en $[a,b]$, tal que $f(a)\cdot f(c)<0 \Rightarrow \exists\xi\in(a,b) \,/\, f(\xi)=0$.
Ejemplo: $f(x)=x$ (es continua, por ser polinómica).
Comprobación: $f(-1)=-1,\ f(1)=1;\ \exists\xi=0 \,/\, f(\xi)=0$.

b) Condición: f, continua en $[a,b]$, alcanza en él un máximo y un mínimo.
Ejemplo: $f(x)=x^2$ (es continua, por ser polinómica).
Comprobación: $x_m=0\Rightarrow f(x_m)=0$ (mínimo); $x_M=\pm1\Rightarrow f(x_M)=1$ (máximo).

c) Condición: f continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b) \,/\, f(a)=f(b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b) \,/\, f'(\xi)=0$.
Ejemplo: $f(x)=x^4$ (es continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser polinómica).
Comprobación: $f(-1)=f(1)=1;\ \exists\xi=0 \,/\, f'(\xi)=0$

d) Condición: f continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)\Rightarrow\exists\xi\in(a,b) \,/\, f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Ejemplo: $f(x)=x^3$ (es continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser polinómica).
Comprobación: $f'(x)=3x^2;\ 3\xi^2=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=1\Rightarrow\xi=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

e) El Teorema de Bolzano (apdo. **a)**) exige que la función tome valores de distinto signo en los extremos del intervalo, mientras que el de Rolle (apdo. **c)**) exige que ambos valores sean iguales. Luego no existe ninguna función válida para los cuatro casos en el mismo intervalo.

Por ejemplo, la función $f(x)=x^2-\dfrac{1}{4}$ verifica las condiciones de los apartados **b), c)** y **d)** y toma valores de distinto signo en el intervalo, aunque no en los extremos. Para que se verifique también la condición de **a)**, usamos para ese caso el subintervalo $[0,1]\subset[-1,1]$. Entonces:

a.- $f(0)\cdot f(1)<0;\ \xi^2-\dfrac{1}{4}=0\Rightarrow\xi=\dfrac{1}{2}$, pues la solución $\xi=-\dfrac{1}{2}\notin[0,1]$.

b.- Los extremos se dan en $x_m=0\Rightarrow f(x_m)=-\dfrac{1}{4}$ y en $x_M=\pm1\Rightarrow f(x_M)=\dfrac{3}{4}$.

c.- $f(-1)=f(1)=\dfrac{3}{4};\ \exists\xi=0 \,/\, f'(\xi)=0$.

d.- $f'(x)=2x;\ 2\xi=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=0\Rightarrow\xi=0$.

21.– Lo hacemos de tres maneras.

a) A partir de la tabla de equivalencias:

$$\textbf{a.1.}\ \sqrt[p]{1+\theta(x)}-1\sim\frac{\theta(x)}{p}\Longrightarrow\sqrt{x}-1=\sqrt{1+x-1}-1\sim\frac{x-1}{2}$$
$$\textbf{a.2.}\ \theta(x)\sim\ln\big(1+\theta(x)\big)\Longrightarrow\sqrt{x}-1\sim\ln\big(1+\sqrt{x}-1\big)=\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x\sim\frac{1}{2}(x-1)$$

b) Utilizando conjugados. Escribimos $\sqrt{x}-1$, en función de $x-1$:

$$\sqrt{x}-1=(\sqrt{x}-1)\,\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}\Longrightarrow\sqrt{x}-1\sim\frac{1}{2}(x-1)=\frac{x-1}{2}$$

22.– Tenemos dos opciones: $\{a_n\}$ converge a $l \in \mathbb{R}$ o bien $\{a_n\}$ diverge, es decir $|a_n| \to \infty$.

a) Si $a_n \to l$, puede ser $l \gtreqless 0$. Entonces:

a.1 Si $l > 0$, los términos serán positivos a partir de uno dado, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{a_n} = \sqrt[4]{l}$.

a.2 Si $l = 0$, o $a_n \to 0^+$ o $a_n \not\to 0^+$. Si $a_n \to 0^+$, todos sus términos son no negativos, por lo que $\sqrt[4]{a_n} \to 0$; si $a_n \not\to 0^+$, tendrá ∞ términos negativos, por lo que $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{a_n}$.

a.3 Si $l < 0$, los términos serán negativos a partir de uno dado, por lo que $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{a_n}$.

b) Si $|a_n| \to \infty$, o bien $a_n \to \pm\infty$ o bien a_n no tiene signo constante. Entonces:

b.1 Si $a_n \to +\infty$, los términos serán positivos a partir de uno dado y $\sqrt[4]{a_n} \to +\infty$

b.2 Si $a_n \to -\infty$, los términos serán negativos a partir de uno dado, por lo que $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{a_n}$.

b.3 Si a_n no tiene signo constante, $\nexists \sqrt[4]{a_n}$ para ∞ valores de n, por lo que $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{a_n}$.

En definitiva, si a_n tiende a $l > 0$ o bien a $l = 0$ por la derecha, entonces $\sqrt[4]{a_n}$ tiende a $\sqrt[4]{l}$. Si $a_n \to +\infty$, entonces $\sqrt[4]{a_n} \to +\infty$. En los demás casos no existe límite, finito o infinito.

23.– La afirmación es falsa pues, al ser nulo el límite de ambas sucesiones, el límite del cociente es indeterminado en general. Como $0 < a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, podemos dividir y resulta

$$\frac{a_n}{b_n} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq 1$$

Es decir, sólo podemos asegurar que el límite del cociente será menor o igual que 1.

Como contraejemplos buscamos sucesiones monótonas de límite 0, que cumplan $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1) $a_n = \dfrac{1}{n+1}, \ b_n = \dfrac{1}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1.$

2) $a_n = \dfrac{1}{n}, \ b_n = \dfrac{2}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{2}.$

3) $a_n = \dfrac{1}{n^2}, \ b_n = \dfrac{1}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0.$

24.– La afirmación es verdadera. Demostramos la primera parte por reducción al absurdo y la segunda con un ejemplo.

a) Si $x \in \mathbb{Q}, \ x + \pi$ es irracional. De lo contrario, sería racional y tendríamos

$$x + \pi = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \pi = \frac{m}{n} - x \in \mathbb{Q}$$

con lo que concluiríamos que π es racional, lo cual es falso.

b) Si $x \in \mathbb{Q}, \ x \cdot \pi$ puede ser racional, por ejemplo si $x = 0$. En efecto, $0 \cdot \pi = 0 \in \mathbb{Q}$ (de hecho, este es el único caso en que el producto de un racional por un irracional es racional).

25.– Las dos primeras afirmaciones son verdaderas, la tercera es falsa:

a) Si el conjunto es finito (es decir, tiene un número finito de elementos), podemos comparar cada uno con todos los demás y obtener el máximo M y el mínimo m. Entonces M es una cota superior del conjunto y m una cota inferior, por lo que el conjunto está acotado.

b) Un conjunto infinito (es decir, con infinitos elementos) puede ser numerable (es decir, biyectivo con $\mathbb{N}$). El ejemplo más sencillo es el propio $\mathbb{N}$. También son numerables el conjunto de los pares, el de los impares, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}\ldots$

c) Un ejemplo de conjunto acotado no numerable es el intervalo $(0,1)$. Como se demuestra en clase por reducción al absurdo (demostración debida a Cantor), no podemos establecer una biyección entre sus infinitos elementos y los números naturales, luego dicho conjunto no es numerable. Por supuesto, tampoco lo es cualquier intervalo no vacío en $\mathbb{R}$.

26.– Que la recta tangente a la curva en el origen sea horizontal equivale a que su pendiente sea nula. Dicha pendiente viene dada por el valor de la derivada de f en $x = 0$. Demostraremos en tres pasos que $f'(0) = 0$:

1. Si la gráfica es simétrica, $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, luego f es una función par.
2. Si f es par, entonces $f'(-x) = \dfrac{df(-x)}{d(-x)} = \dfrac{df(x)}{-\,dx} = -\dfrac{df(x)}{dx} = -f'(x)$, luego f' es impar.
3. Si f' es impar, se cumple $f'(0) = f'(-0) = -f'(0) \Longrightarrow 2f'(0) = 0 \Longrightarrow f'(0) = 0$.

27.–

a) $B(P,r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \,/\, \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < r\right\}$.

b) Como la distancia entre P y (x,y) (que es ≥ 0) es menor que r, éste valor ha de ser positivo. El ínfimo de los números reales positivos es el 0, que no pertenece a $\mathbb{R}^+$. Entonces $\mathbb{R}^+$ no tiene mínimo y no existe la bola abierta de radio mínimo.

Nota: Si se tratara de una bola cerrada la condición sería $0 \leq d(P,(x,y)) \leq r$, por lo que r podría valer 0. La bola cerrada de centro P y radio mínimo (nulo) es el punto P.

c) $\mathrm{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \,/\, -y < x < y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \,/\, y > |x|\}$

d) La frontera de A es el conjunto de puntos (x,y) tales que $y = |x|$. Como este conjunto tiene intersección vacía con A, resulta que A es abierto, luego todos sus puntos son interiores. Entonces para cada punto existe una bola abierta centrada en él y contenida en A, por lo que se cumple la condición de entorno, luego A es entorno de todos sus puntos.

El punto $P(1,2)$ cumple $y > |x|$, luego $P \in \mathrm{A}$, luego A es entorno de P.

Nota. El resultado obtenido es una propiedad de los abiertos: *Un abierto es entorno de todos sus puntos.*

28.– Se puede demostrar de varias maneras: 1) directamente; 2) partiendo de lo que hay que demostrar, hasta llegar a la condición inicial por medio de relaciones de equivalencia; 3) por reducción al absurdo. Lo hacemos de este último modo.

Para demostrar que $\dfrac{a}{1+a} \leq \dfrac{b+c}{1+b+c}$ (1), suponemos lo contrario, es decir

$$\frac{a}{1+a} > \frac{b+c}{1+b+c}$$

de donde resulta

$$a(1+b+c) > (1+a)(b+c) \Longrightarrow a + a(b+c) > b + c + a(b+c) \Longrightarrow a > b + c$$

que contradice la hipótesis, con lo que queda demostrada la desigualdad (1).

29.– Sabemos que B está contenido en A, pero no se dice nada de la relación entre B y C. Entonces, si B $\not\subset$ C, los elementos de A que pertenecen a B tampoco formarán parte de C, por lo que A no estará contenido en C. Luego la afirmación es falsa.

Ejemplos: 1) $\mathrm{A} = \{1,2\}$, $\mathrm{B} = \{2\}$, $\mathrm{C} = \{1\}$. 2) $\mathrm{A} = \mathbb{R}$, $\mathrm{B} = \mathbb{Q}$, $\mathrm{C} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. 3) $\mathrm{A} = \mathrm{B} \neq \phi$, $\mathrm{C} = \phi$.

30.– Sean a, b, c los tres números. Al ser naturales, las dos únicas opciones para que el producto valga 4 son que ambos valgan 2 o que uno de ellos valga 1 y el otro 4. Analizamos ambas:

1. $a = b = 2 \Longrightarrow c = 20 - 2 - 2 = 16$. Entonces $a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 2^2 + 16^2 = 264 < 265$.
2. $a = 1,\ b = 4 \Longrightarrow c = 20 - 1 - 4 = 15$. Entonces $a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 4^2 + 15^2 = 242 < 265$.

con lo que queda demostrado que la suma de los cuadrados es menor que 265.

31.– La relación contiene dos igualdades. Analizamos cada una.

1. $\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}}$ es la condición de conjunto abierto ("aquel que coincide con su interior").
2. $\mathring{\mathrm{A}} \cap\ Fr(\mathrm{A}) = \phi$ es una propiedad general de los conjuntos en un espacio métrico ("el interior y la frontera no tienen puntos en común", pues "un punto frontera no es ni interior ni exterior").

Entonces las dos igualdades no pueden ser equivalentes, por lo que la relación es falsa.

Ejemplo (sirve cualquier conjunto no abierto). Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$ y el conjunto $\mathrm{A} = [1, 2]$. Entonces $\mathring{\mathrm{A}} = (1, 2) \Longrightarrow \mathrm{A} \neq \mathring{\mathrm{A}}$ y no se cumple la primera igualdad. Sin embargo, $Fr(\mathrm{A}) = \{1, 2\} \Longrightarrow \mathring{\mathrm{A}} \cap\ Fr(\mathrm{A}) = \phi$, luego se cumple la segunda, por lo que las dos igualdades no son equivalentes.

32.– Para que la sucesión no sea convergente ni divergente, ha de ser oscilante. Para que no sea acotada ha de tener al menos una subsucesión de términos no acotados. Entonces cumplirá las tres condiciones, por ejemplo, una sucesión oscilante, tal que la subsucesión de los pares sea divergente y la de los impares converja, como la siguiente:

$$\{a_n\} = 1, 2, 1, 4, 1, 6, \dots, 1, n \dots, \text{ es decir } a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ impar} \\ n, & n \text{ par} \end{cases}$$

33.– Usaremos en el apartado **a)** la compatibilidad del orden con el producto, en **b)** la propiedad d) de un cuerpo ordenado (producto por un número negativo) y en ambos la propiedad transitiva de la relación de orden.

a) A partir del enunciado: $\left\{ \begin{array}{c} a < b,\ c > 0 \Longrightarrow ac < bc \\ c < d,\ b > 0 \Longrightarrow bc < bd \end{array} \right\} \Longrightarrow ac < bd$

b) A partir del enunciado: $\left\{ \begin{array}{c} a < b,\ c < 0 \Longrightarrow ac > bc \\ c < d,\ b < 0 \Longrightarrow bc > bd \end{array} \right\} \Longrightarrow ac > bd$

34.– Para demostrar lo que se pide utilizaremos dos propiedades de las desigualdades en $\mathbb{R}$:

1. Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por un número positivo, ésta se mantiene (orden compatible con el producto).
2. Si aplicamos una función estrictamente creciente a los dos miembros de una desigualdad, ésta se mantiene (razonado en clase).

Entonces, teniendo en cuenta que x es positivo y que la función raíz cuadrada es estrictamente creciente:

a) $0 < x < 1 \overset{\cdot x}{\Longrightarrow} x^2 < x \overset{\sqrt{\ }}{\Longrightarrow} |x| < \sqrt{x} \overset{x>0}{\Longrightarrow} x < \sqrt{x}$.

b) $x > 1 \overset{\cdot x}{\Longrightarrow} x^2 > x \overset{\sqrt{\ }}{\Longrightarrow} |x| > \sqrt{x} \overset{x>0}{\Longrightarrow} x > \sqrt{x}$.

35.– Del enunciado se deduce que f es una función derivable, mientras que g está definida sólo para valores naturales de x, por lo que no es una función continua, luego no es derivable. Entonces no tiene sentido aplicar a g la regla habitual de derivación.

36.– Lo demostramos a través de equivalencias, tomando neperianos en ambos lados:

$$a^{\ln b} = b^{\ln a} \iff \ln\left(a^{\ln b}\right) = \ln\left(b^{\ln a}\right) \iff \ln b \ln a = \ln a \ln b,$$

lo cual es cierto, pues el producto de números reales es conmutativo.

37.– Nota previa: En $\mathbb{R}, ||$, una bola abierta $B(x,r)$ es el intervalo $(x-r, x+r)$.

a) Adherencia de $\mathbb{Q}$. Veamos que todo número real es de adherencia de $\mathbb{Q}$.

Un punto $x \in \mathbb{R}$ es de adherencia de $\mathbb{Q} \iff \forall r > 0,\ B(x,r) \cap \mathbb{Q} \neq \phi$ (en toda bola centrada en x existen números racionales).

Sea un número real x. Tomamos un elemento cualquiera de la bola, p. ej. $x + r/2$. Sabemos que entre x y $x + r/2$ (ambos reales) existen infinitos racionales, luego x es de adherencia de $\mathbb{Q}$. Es decir, todo real es de adherencia de $\mathbb{Q}$, luego $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

b) Interior de $\mathbb{Q}$. Veamos que ningún real es interior de $\mathbb{Q}$.

Un punto $x \in \mathbb{R}$ es interior de $\mathbb{Q} \iff \exists r > 0,\ B(x,r) \subset \mathbb{Q}$ (en alguna bola centrada en x sólo existen racionales, luego no hay ningún irracional).

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $B(x,r)$ una bola con centro en x. Tomamos un elemento cualquiera de la bola, p. ej. $x + r/2$. Sabemos que entre x y $x + r/2$ (ambos reales) existen infinitos irracionales, luego $B(x,r)$ no está contenida en $\mathbb{Q}$. Entonces ningún real puede ser interior de $\mathbb{Q}$, por lo que $\mathring{\mathbb{Q}} = \phi$.

38.– Usaremos dos propiedades de un cuerpo ordenado:

1. Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por $k > 0$, la desigualdad se mantiene. Si $k < 0$, la desigualdad cambia de sentido.

2. El inverso de un número positivo es positivo y el de un número negativo es negativo (se demuestra por reducción al absurdo).

Teniendo en cuenta lo anterior, estudiamos tres opciones: a) ambos positivos, b) ambos negativos, c) de distinto signo.

a) $0 < a < b \overset{\frac{1}{a}>0}{\Longrightarrow} a \cdot \dfrac{1}{a} < b \cdot \dfrac{1}{a} \Longrightarrow 1 < \dfrac{b}{a} \overset{\frac{1}{b}>0}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{b} < \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{1}{b} \Longrightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

b) $a < b < 0 \overset{\frac{1}{a}<0}{\Longrightarrow} a \cdot \dfrac{1}{a} > b \cdot \dfrac{1}{a} \Longrightarrow 1 > \dfrac{b}{a} \overset{\frac{1}{b}<0}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{b} < \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{1}{b} \Longrightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

c) $a < 0 < b \Longrightarrow \dfrac{1}{a} < 0,\ \dfrac{1}{b} > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{b}$

Es decir, si a y b tienen igual signo, $a < b \Longrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$. Si tienen distinto signo, $a < b \Longrightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

39.– Al ser $q \in \mathbb{N}$, multiplicando los tres miembros de la desigualdad por q, obtenemos una desigualdad equivalente:

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q} \overset{\cdot q}{\iff} p \leq xq \leq p+1$$

que se cumple $\forall xq \in \mathbb{R}$, tomando como p la parte entera de xq.

Es decir: dado $x \in \mathbb{R}$, para todo $q \in \mathbb{N}$ existe $p = E(x\,q)$, tal que se cumple la desigualdad.

40.– Las condiciones que debe cumplir un conjunto para ser cuerpo son: a) existencia de dos operaciones cerradas ($+$ y $\cdot$); b) respecto a $+$, cumplir las propiedades asociativa, conmutativa, existencia de neutro y de opuesto; c) respecto a $\cdot$, cumplir las propiedades asociativa, existencia de unidad y de inverso; d) cumplir las propiedad distributiva de $\cdot$ respecto a $+$.

El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de los irracionales posee la propiedad asociativa tanto respecto a $+$ como a $\cdot$, así como la conmutativa respecto a $+$, pues sus elementos son números reales. También existen y son irracionales el opuesto y el inverso de cualquier irracional.

Sin embargo, no se cumplen varias condiciones:

1. La suma de irracionales puede no serlo. Ejemplo: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, que suman $0 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. El producto de irracionales puede no serlo. Ejemplo: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, cuyo producto es $2 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Los elementos neutro y unidad de los reales (0 y 1) no son irracionales, luego en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no existe elemento neutro ni elemento unidad.

En consecuencia, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no tiene estructura de cuerpo.

41.–

a) El cociente representa la media aritmética de los n primeros términos de la sucesión $\{1/n\}$, por lo que el método de la media aritmética es válido para calcular el límite.

Si $\{a_n\}$ tiene límite a, la media aritmética de sus términos tiene el mismo límite. Como $\{1/n\} \to 0$, el límite propuesto vale 0.

b) El denominador n es el término general de una sucesión de términos positivos, estrictamente creciente y divergente, luego cumple las condiciones para aplicar el criterio de Stolz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{\text{Si}\exists}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \cdots + \dfrac{1}{n} - \left(1 + \cdots + \dfrac{1}{n-1}\right)}{n - (n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0$$

luego el límite es igual a 0.

c) La regla de L'hôpital sirve para calcular límites indeterminados del cociente de funciones, de la forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso, se trata de un límite del cociente de sucesiones, por lo que no es válido. Además, no conocemos en principio el valor del numerador. Aunque el denominador tiende a ∞, no se trata de un cociente de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

42.– La relación es falsa. Un modo general de probarlo es utilizando equivalencias, es decir:

$$b - a < b \Longleftrightarrow b < b + a \Longleftrightarrow 0 < a$$

La inecuación se cumple **si y sólo si** $a > 0$. Si $a \leq 0$ no se cumplirá, luego la relación es falsa.

Puede probarse también utilizando implicaciones:

$$b - a < b \Longrightarrow b < b + a \Longrightarrow 0 < a$$

lo que nos dice que $a > 0$ es condición necesaria para la relación propuesta. Así pues, si $a \leq 0$, la inecuación no se cumple.

Por último, basta usar un contraejemplo. El más sencillo es dar a a el valor nulo, con lo que quedaría $b < b$, que es falso.

43.–

a) Interpretación geométrica. La curva $x^2+y^2=1/n^2$ es la circunferencia de radio $1/n$, mientras que $x^2+y^2=1/(n+1)^2$ es la de radio $1/(n+1)$. Entonces el conjunto A está formado por coronas circulares, de radios interior y exterior respectivamente

$$r_{int}=\frac{1}{(n+1)} \quad ; \quad r_{ext}=\frac{1}{n}\,, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

sin incluir las circunferencias que las delimitan.

b) A abierto y cálculo de $Ext(\mathrm{A})$. Puesto que las circunferencias que delimitan las coronas no pertenecen al conjunto, todo punto $x\in\mathrm{A}$ puede ser el centro de una bola contenida en A (basta que el radio sea menor que la distancia de x a la circunferencia más próxima), con lo que cumple la condición de punto interior. Así pues, $\forall x\in\mathrm{A}$, tenemos

$$x\in\mathrm{A}\Longrightarrow x\in\mathring{\mathrm{A}}\Longrightarrow \mathrm{A}\subset\mathring{\mathrm{A}}\Longrightarrow \mathrm{A}=\mathring{\mathrm{A}}$$

con lo que A es abierto.

Para calcular el conjunto $Ext(\mathrm{A})$, obtenemos antes la adherencia. Para ello añadimos al conjunto las circunferencias, así como el punto $(0,0)$, que tiene puntos de A tan próximos como se quiera. Resulta:

$$\overline{\mathrm{A}}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,\frac{1}{(n+1)^2}\le x^2+y^2\le\frac{1}{n^2},\,\forall n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{(0,0)\right\}$$

Pero este conjunto incluye las circunferencias, de radio tan pequeño como se quiera, las coronas entre circunferencias y el origen (circunferencia de radio nulo). Es decir, resulta el círculo de radio unidad:

$$\overline{\mathrm{A}}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\le 1\right\}$$

Calculamos ahora el conjunto exterior, como complementario de la adherencia:

$$Ext(\mathrm{A})=\mathbb{R}^2\setminus\overline{\mathrm{A}}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2>1\right\}$$

c) Intersección de A con su frontera sin calcularla. Sabemos que todo conjunto abierto tiene intersección vacía con su frontera. Al ser A abierto, dicha intersección será vacía.

Nota: La frontera está formada por las circunferencias de radio $1/n$, $n\in\mathbb{N}$

$$Fr(\mathrm{A})=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2=\frac{1}{n^2},n\in\mathbb{N}\right\}$$

44.– Si n es primo mayor que 2, debe ser impar, o no sería primo, pues contendría al factor 2. Si n es impar, n^2 también lo es. En efecto:

$$n=2k-1,\,k\in\mathbb{N}\Longrightarrow n^2=4k^2-4k+1\Longrightarrow \text{par}-\text{par}+1\Longrightarrow\text{impar}$$

Entonces n^2+1 es par, por lo que no es primo.

45.– Consideramos el polinomio $P(x)=2x^3-6x+3$. Derivamos y factorizamos:

$$P'(x)=6x^2-6x=6(x^2-1)=6(x+1)(x-1)$$

luego P' tiene 2 raíces reales ($=\pm1$). Como se razonó en clase a partir del T. de Rolle, P tendrá a lo sumo 3. Además, si tuviera más de 3, al descomponerlo en factores resultaría un polinomio de grado mayor que 3. (También podríamos utilizar el T. Fundamental del Álgebra, que se estudia en Cálculo Infinitesimal 2).

Buscamos ahora intervalos en cuyos extremos $P(x)$ tenga distinto signo. Resulta:

$$P(-2)=-1;\quad P(-1)=7;\quad P(0)=3;\quad P(1)=-1;\quad P(2)=7;$$

luego hay cambio de signo entre $x=-2$ y $x=-1$; $x=0$ y $x=1$; $x=1$ y $x=2$.

Al ser $P(x)$ una función continua, por el T. de Bolzano, podemos asegurar que se anula en los intervalos $(-2,-1)$, $(0,1)$, $(1,2)$. Con lo que queda probado que $P(x)$ tiene tres raíces reales.

---

3. Problemas de examen

Curso 10/11. Examen de enero

1.– Sea el conjunto $\mathrm{A}_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, n-1 < x < n,\ 1 < y < x\right\}$. Se considera el conjunto A, formado por la unión de todos los posibles conjuntos A_n : $\mathrm{A} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. Se pide:

a) Obtener y dibujar el conjunto $Fr(\mathrm{A})$.

b) Obtener el conjunto $\overline{\mathrm{A}}$ en su expresión más simplificada posible.

2.– Sean $a_n = n^\alpha,\ b_n = \dfrac{1}{\ln n^\beta},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$. Estudia la convergencia de la sucesión de término general $c_n = a_n^{b_n}$.

3.– Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-3}{e^{1/x}}$, se pide:

a) Razonar si es posible aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $[1, 2]$.

b) Razonar si es posible aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$.

c) Si f es discontinua en algún punto, analícese el tipo de discontinuidad.

d) Calcular los extremos de f.

4.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Curso 10/11. Examen de julio

5.– Obtén el siguiente límite: $\lim\limits_{n\to\infty} (n+2^n)^{1/3n}$.

6.– Se consideran todos los posibles rectángulos de perímetro dado P. Llamaremos k a la relación entre la base y la altura de cada uno de ellos ($h = k\,b$). Se pide expresar el área del rectángulo en función de k y obtener por derivación el valor de k que produce un área máxima, demostrando que se trata de un máximo y calculando dicha área.

7.– Calcula $\displaystyle\int \frac{\ln x^6}{\sqrt{x^2\,(1+(\ln x)^2)}}\,dx$.

Curso 11/12. Examen de enero

8.– Calcula: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}+\sqrt[n]{d}}{4}\right)^n \quad ; \quad a, b, c, d > 0.$

9.– Sea A el conjunto de ceros de la función $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$. Determina los siguientes conjuntos, justificando las respuestas: $\mathrm{A},\ \overline{\mathrm{A}},\ \mathrm{A}',\ \mathring{\mathrm{A}},\ Fr(\mathrm{A})$.

10.– Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a^2 - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcula $a \in \mathbb{R}$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Estudia la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

c) Se define ahora

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^3 + x + 1, & x > 0, \end{cases}$$

Obtén el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = 0$.

11.– Obtén los 5 primeros términos no nulos del desarrollo de Mac Laurin de $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x^3$. Si al aplicar la expresión obtenida resulta un error mayor que el deseado, ¿qué podemos hacer para conseguir una aproximación más precisa?

12.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{e^{2+\cos x} \operatorname{sen} x}{1 + e^{2\cos x}}\, dx.$

Curso 11/12. Examen de julio

13.– Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x, & x \geq 0 \\ \dfrac{2x}{2-x}, & x < 0 \end{cases}$

a) Calcula $f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Si existe algún punto en donde la función no sea derivable, explíca el motivo y calcula las derivadas laterales de f en él.

c) Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, sea cual sea el valor de b (se recomienda utilizar el método de reducción al absurdo).

14.– Calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/n)}{\ln n^2 + \ln(n+1)^2}.$

15.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{dx}{4e^x + e^{-x}}.$

Curso 12/13. Examen de enero

16.– Dada la función $f(x) = \begin{cases} \left(ax^2 + 2b\right)^{1/x^2}, & x \neq 0 \\ e^2, & x = 0 \end{cases}$

a) Indica para qué valores de a, $b \in \mathbb{R}^+$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Obtén el valor de la derivada de f para $x \neq 0$.

c) Obtén una aproximación polinómica de cuarto orden de la función $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{1 - x^2}$ en un entorno del punto $x = 0$.

17.– Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $\quad 1 < a \le b$.

18.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - 1}\, dx$.

19.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

Curso 12/13. Examen de julio

20.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} a - 1 + \operatorname{sen}(x), & x \ge 0 \\[2ex] \dfrac{ax}{2-x}, & x < 0, \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Se pide obtener el valor de la derivada de $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

21.– Calcula una aproximación polinómica de cuarto orden en un entorno del punto $x = 0$, para la función $g(x) = \dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

22.– Obtén $\displaystyle\int \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$.

Curso 13/14. Examen de enero

23.– Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|, & x \ne 0 \\[2ex] 0, & x = 0 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de $f(x)$.

b) Razona si f satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo [-1,0] y, en su caso, determina todos los posibles valores medios dados por el teorema.

c) Razona si f satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right]$ y, en su caso, determina todos los valores de x para los que se cumple el teorema.

d) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo [-4,4].

24.– Calcula el límite, cuando $n \to \infty$, de la sucesión de término general:

$$a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln\left(n^3 + 2n\right)}$$

25.– Sean el conjunto $H_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ n < x < n+1; \ n < y < n+1\}$ y el conjunto $Z_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y = -n\}$. Se considera el conjunto $\mathrm{A} = \mathrm{H} \cup \mathrm{Z}$, siendo H el conjunto formado por la unión de todos los posibles H_n y Z el conjunto formado por la unión de todos los posibles Z_n, es decir

$$\mathrm{H} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n, \quad \mathrm{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$$

Se pide:

a) Dibujar de forma esquemática el conjunto $Fr(\mathrm{A})$.

b) Obtener el conjunto $\overline{\mathrm{A}}$ y $Aisl(\mathrm{A})$ en su expresión más simplificada.

c) Razonar si A es un conjunto cerrado.

d) Razonar si A es un conjunto abierto.

e) Razonar si A es un conjunto compacto.

26.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

27.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \cos x - 1}\, dx$

Curso 13/14. Examen de julio

28.– Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 1 - \operatorname{sen} x^2}{\operatorname{tg}^3 x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de a para que $f(x)$ es continua en el punto $x = 0$.

b) Encuentra una sucesión $\{a_n\}$ cuyo límite sea a. Razona si esa sucesión es única.

29.– Calcula el límite, cuando $n \to \infty$, de la sucesión de término general a_n, discutiendo el resultado para todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

$$a_n = \frac{(e^x)^n x + e}{(e^x)^n + 1}$$

Una vez calculado el límite, determina el conjunto A de valores de x para los que dicho límite es negativo, así como su adherencia $\overline{\mathrm{A}}$.

30.– Sea el conjunto B constituido por los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que h existe y pertenece a $\mathbb{R}$, siendo h el valor definido por la expresión:

$$h = \sqrt{(x-y)(x+y)} + \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$$

Se pide:

a) Obtener la expresión analítica que define el conjunto B.

b) Dibujar de forma esquemática el conjunto B.

c) Dibujar de forma esquemática el conjunto $Fr(\mathrm{B})$ y sólo dicho conjunto.

31.– Determina, mediante derivaciones sucesivas, el polinomio de Taylor de tercer grado en el punto $a = 0$ correspondiente a la función $f(x) = \operatorname{sen} 3x$. Halla el error que se comete al calcular el valor de $f(x)$ en $x = \pi/3$ mediante el polinomio obtenido.

32.– Calcula $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\, dx$.

33.– Obtén la fórmula de reducción de $I(n) = \displaystyle\int \operatorname{tg}^n x\, dx,\ n \in \mathbb{N}$.

Curso 14/15. Examen de enero

34.– Sea la función $f(x) = \operatorname{sen} x\, e^{-x},\ x \in [0, \infty)$. Se pide

a) Estudiar su continuidad.

b) Determinar el conjunto A de puntos en que la gráfica de la función corta el eje x.

c) Determinar el conjunto B de puntos en que la gráfica de $f(x)$ tiene tangente horizontal.

d) Dado el conjunto $\mathrm{H} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, razonar si es compacto en el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$.

e) Representar de forma esquemática la gráfica de la función $f(x)$.

35.– Dados $a, b \in \mathbb{N}$, calcula el límite, cuando $n \to \infty$, de la sucesión de término general:

$$a_n = \frac{\ln n}{n \ln\left(n^2 + 2n + \sqrt{3}\right) \ln\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)}$$

Llamando L al límite anterior, se define el conjunto J formado por los pares $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tales que $L \in \mathbb{R}$. En el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$ se pide:

a) Determinar el conjunto J y representarlo esquemáticamente.

b) Determinar el conjunto $\overline{\mathrm{J}}$.

c) Determinar el conjunto J'.

d) Determinar el conjunto $Fr(\mathrm{J})$.

36.– Descompón el número 6 en dos sumandos positivos tales que la suma de sus logaritmos en base 6 sea máxima.

37.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$.

38.– Integra $I = \displaystyle\int \cos\sqrt{x}\, dx$.

Curso 14/15. Examen de julio

39.– Sea la función $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x^2}}$. Se pide:

a) Estudiar su continuidad, especificando el tipo de discontinuidad, en su caso.

b) Estudiar los máximos, mínimos y asíntotas de la función y dibujar su gráfica.

40.– Sea la sucesión de término general $a_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(5i-1)$ y sean a_1, a_2, a_3 sus tres primeros términos. Se define el conjunto $\mathrm{W} = \Big\{ x \in \mathbb{R} / \; x \in (a_2, a_1] \cup \{a_3\} \Big\}$. Se pide:

a) Dibujar de forma esquemática el conjunto W.

b) Obtener la expresión más simplificada posible de los conjuntos $\overline{\mathrm{W}}$, $Aisl(\mathrm{W})$ y $Fr(\mathrm{W})$.

c) Razonar si W es un conjunto cerrado, abierto o compacto.

d) Calcular el límite de a_n cuando $n \to \infty$.

41.– Integra $I = \displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx$.

42.– Integra $I = \displaystyle\int \cos x \operatorname{sen} x \sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}\; dx$.

Curso 15/16. Examen de enero

43.– Sean las funciones $h(x) = \operatorname{sen} x^2$, $g(x) = \ln x^2$, $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$. Se pide:

a) Estudiar el dominio de $f(x)$.

b) Estudiar la continuidad de $f(x)$. Si existen discontinuidades, determinar su tipo.

c) Calcular: $\dfrac{h''(x)}{g'(x)} - x^3\, h(x)\, g''(x)$.

d) Obtener una aproximación polinómica de tercer orden a $g(x)$ en el entorno de $a = 1$.

44.– Sean las sucesiones de término general a_n, b_n y c_n:

$$a_n = 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right) \; ; \; b_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} \; ; \; c_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$$

a) Calcula los límites: $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

b) En el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$, se consideran los conjuntos $\mathrm{A} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathrm{B} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathrm{C} = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathrm{D} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$. Se pide:

b.1) Obtener los conjuntos D' y $Fr(\mathrm{D})$.

b.2) Analizar si $\overline{\mathrm{D}} \subset Fr(\mathrm{D})$ y si $Fr(\mathrm{D}) \subset \overline{\mathrm{D}}$.

b.3) Determinar de forma justificada si D es abierto y si es no cerrado.

b.4) Determinar si el conjunto D es compacto.

45.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}\, dx$.

46.– Obtén la fórmula de reducción para $I(n) = \displaystyle\int x^n \operatorname{sen} x\; dx$.

Curso 15/16. Examen de julio

47.– Sean las funciones $f(x) = 3 - x^2$; $g(x) = \dfrac{6}{\sqrt{2}} \cos x$. Llamamos P a un punto del primer cuadrante perteneciente a la gráfica de $f(x)$; M al punto de corte con el eje x de la recta paralela al eje y que pasa por P; N al punto de corte con el eje y de la recta paralela al eje x que pasa por P; y O al origen de coordenadas.

a) Determina las coordenadas de P tales que el rectángulo $OPMN$ sea de área máxima.

b) Sea H el punto intersección de la gráfica de $f(x)$ con el eje x para $x < 0$. Sean x_H y x_P las abscisa de H y P respectivamente. Definido el intervalo $[x_H, x_P]$, estudia si se satisfacen las condiciones del Teorema de Lagrange para $f(x)$. En caso afirmativo, determina los valores de x para los que se cumple el mismo.

c) Determina el polinomio de Taylor de segundo grado de $g(x)$ en el punto $a = \dfrac{\pi}{4} \cdot x_P$. Considerando la función $f(x)$ como otra aproximación polinómica de $g(x)$ en $x = a$, determina cual de las dos aproxima con más precisión el valor de $g(x)$ en el origen.

48.– Calcula los límite de las sucesiones cuyos términos generales son:

a) $a_n = \dfrac{n^2 - 3n^7 + e}{5 + n^3 + 5n + 8n^2 + 3n^3 + \pi n^6}$; **b)** $b_n = \dfrac{n^2 - 3n^7 + e}{5 + n^3 + 5n + 8n^2 + 3n^3 + \pi n^7}$

c) $c_n = \dfrac{n^8 - 3n^7 + e}{5 + n^9 + 5n + 8n^2 + 3n^3 + \pi n^7}$; **d)** $d_n = \dfrac{\sqrt[8]{5n^8 - 3n^7 + e}}{\sqrt[9]{8n^9 + 5n + 8n^2 + 3n^3 + \pi n^7}}$

e) $e_n = \dfrac{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}...}}{\sqrt{8\sqrt{8\sqrt{8}}\ldots}}$; **f)** $f_n = \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + ... + \dfrac{n}{n^2} \right)$

49.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{1 - (\cos x + \operatorname{sen} x)^2}\, dx$.

Curso 16/17. Examen de enero

50.– Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \cosh x - 1, & x \in [-1, 0] \\ \operatorname{tg} x, & x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ 2x - \left(\dfrac{\pi - 2}{2}\right), & x \in \left(\dfrac{\pi}{4}, 2\right] \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

b) Razona si f satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

c) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo [-1,2].

d) En el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$, se define el conjunto A=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [-1, 2]; y = f(x)\}$. Razona si A es abierto, cerrado o compacto.

51.– Calcula el límite, cuando $n \to \infty$, de las sucesiones de término general:

$$a_n = \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2n} \right)^{2n-1} \qquad b_n = \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{e n^2}$$

52.– La empresa Conservas Caminos S.A. (CCSA) desea diseñar una nueva lata con forma de prisma recto de base cuadrada y una capacidad de 640 cm^3. Para la tapa de la lata se emplea un aluminio fino, para facilitar la apertura, con un precio de 2 euros/cm^2; para la base y las superficies laterales se emplea un aluminio más grueso con un precio de 8 euros/cm^2. Diseña esa nueva lata para que su coste sea mínimo.

53.– Calcular la primitiva de $I = \displaystyle\int 2\sqrt{2x - x^2}\, dx$.

Curso 16/17. Examen de julio

54.– Dado el espacio métrico $\mathbb{R}^2$ dotado de la métrica euclídea, se define el conjunto $\text{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : |y| < \ln x\right\}$. Dibuja de forma esquemática el conjunto A, calcula su adherencia y determina si se trata de un conjunto cerrado.

55.– Calcula el límite, cuando $n \to \infty$, de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{\ln\left[(n+1)!\right]^e}{\ln\left[(n-1)!\right]^\pi}$

56.– Descompón el número 44 en suma de dos números H y J, tales que P tome el valor mínimo, siendo $P = 5H^2 + 6J^2$.

57.– Dada la ecuación $\operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{3}{4}x$, determina razonadamente el número de raíces de la misma, si las hubiera.

58.– Obtén la primitiva de $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}\,\sqrt{1 + \sqrt{\cos x}}}\, dx$.

Curso 17/18. Examen de enero

59.– Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \in (-\infty, 1) \\ 3x - (x-1)^{3/2}, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

b) Razona si f satisface las condiciones del teorema de los incrementos finitos en el intervalo $[-1, 1]$ y en su caso determinar todos los posibles valores medios dados por el teorema.

c) Calcula, si existen, los extremos de $f(x)$.

d) Dibuja aproximadamente la gráfica de la función en el intervalo $[-6, 6]$.

60.– Calcula el límite, cuando $n \to \infty$, de la sucesión cuyo término general se define a continuación, razonando si es una sucesión de Cauchy:

$$a_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 2)}{5n^2 + \pi n + e}$$

61.– Sea el conjunto $\mathrm{A}_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x-n)^2 + (y-n)^2 < 1\right\}$, siendo n un número natural. Se considera el conjunto A formado por la unión de todos los posibles $\mathrm{A}_n,\ n \in \mathbb{N}$. Se pide:

a) Dibujar de forma esquemática el conjunto $Fr(\mathrm{A})$ y sólo el conjunto $Fr(\mathrm{A})$.

b) Obtener el conjunto $\overline{\mathrm{A}}$ en su expresión más simplificada.

c) Razonar si A es un conjunto cerrado.

d) Razonar si A es un conjunto compacto.

e) Razonar si A es un conjunto abierto.

62.– Calcula $I = \displaystyle\int \left(\mathrm{tg}^{p-1}\, x + \mathrm{tg}^{p+1}\, x\right)\, dx, \quad p \in \mathbb{R}$

63.– Resuelve $I = \displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x\sqrt{x}}\, dx$

Curso 17/18. Examen de julio

64.– Dado el espacio métrico $\mathbb{R}^2$ dotado de la métrica euclídea, se define el conjunto

$$\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, E(x) < y < x\right\}$$

Dibuja el conjunto A, calcula su frontera y determina si se trata de un conjunto abierto.

65.– Calcula el límite, cuando $x \to 0$, de la función

$$f(x) = \frac{x - e^x \operatorname{sen} x}{1 - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}$$

Razona si la función es continua en $x = 0$, indicando en su caso el tipo de discontinuidad.

66.– Calcula el valor de A que hace máximo el cociente $\dfrac{A}{B}$, siendo $B = \left(A + \dfrac{5}{2}\right)^2 + 4$.

67.– Comprueba si la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7}$ cumple las condiciones del Teorema de Lagrange (o de los incrementos finitos) en el intervalo $[0, 6]$. En su caso, determinar los valores de x para los que se cumple el teorema.

68.– Calcula una aproximación polinómica de tercer orden en un entorno del punto $y = 1$ para la función $z(y) = \ln y^4$.

69.– Integra $I = \displaystyle\int x^5 e^{x^3}\, dx.$

70.– Resuelve $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$

Curso 18/19. Examen de enero

71.– Calcula el polinomio de MacLaurin de grado 8 de la función $f(x) = \cos(2x^2)$.

72.– Calcula los límites de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, siendo:

$$a_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n; \quad b_n = \left(1\cdot\tan\frac{1}{n^2+\sqrt{1}} + 2\cdot\tan\frac{1}{n^2+\sqrt{2}} + \cdots + n\cdot\tan\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}\right)$$

73.– Sea la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$. Se considera un rectángulo tal que su base está sobre OX y todo él está contenido entre la curva y dicho eje. Hacemos girar el rectángulo alrededor de OX. Se pide obtener las dimensiones del rectángulo que genera un cilindro de superficie lateral máxima, justificando que se trata de un máximo.

74.– Integra $I = \displaystyle\int \left(x^2+1\right) e^{2x}\, dx$.

75.– Obtén la primitiva $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}\, dx$.

Curso 18/19. Examen de julio

76.– Calcula el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, siendo a y b reales positivos.

77.– Calcula el polinomio de McLaurin de grado 3 de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}$

78.– Se desea construir un recipiente de volumen dado, $V = 45\pi$, formado por un cilindro de radio r y altura h, rematado por una semiesfera de radio r. Halla sus dimensiones de modo que la superficie total sea mínima, calculándola y justificando que se trata de un mínimo.

79.– Calcula la primitiva $I = \displaystyle\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

80.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$

Curso 19/20. Examen de enero

81.– Si $\theta_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, calcula: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\cos\theta_n)}{(1+\theta_n)^{\theta_n} - 1}$

82.– Se considera una escalera de longitud $L = 5$ m en reposo, apoyada contra un muro, de modo que el extremo superior A se encuentra a 4 m de altura. En un instante dado, el extremo B, apoyado en el suelo, comienza a resbalar a velocidad constante $v_x = 30$ cm/seg. Se pide:

a) Velocidad v_y a la que desciende el extremo A, en el momento en que su altura es de $3\,m$.

b) Distancia recorrida por el extremo A en el instante en que ambos deslizan con igual rapidez.

83.– Se considera un río, representado por la curva $y = x^2 + 1$. Se desea llevar una conducción de agua desde el río hasta un punto situado en el eje de abscisas a $5\,km$. de distancia del origen. Si el coste del canal es proporcional a su longitud, calcula la longitud del canal de coste mínimo, justificando que se trata de un mínimo.

84.– Dada la integral
$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx$$
Se pide:

a) Resolverla como trigonométrica impar en seno.

b) Plantearla como trigonométrica par en seno-coseno, llegando hasta la racional.

c) Resolverla como semiinmediata.

Curso 19/20. Examen de julio

85.– Resuelve el siguiente límite:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1} + 2\cdot 10^{2n-1}}$$

86.– Sea la curva $y = e^{-x}$. Se consideran los posibles rectángulos situados en el primer cuadrante, con un vértice en el origen y el opuesto en la curva. Se pide calcular lo siguiente, razonando los resultados:

a) Las dimensiones de los rectángulos de área máxima y de área mínima.

b) Las dimensiones de los rectángulos de perímetro máximo y de perímetro mínimo.

87.– Integra $\displaystyle\int x^7 \cos x^4 \, dx$.

88.– Integra $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\operatorname{cotg}\sqrt{x}}$.

Curso 20/21. Examen de enero

89.– Calcula L utilizando equivalencias
$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - a^{\ln\frac{n}{n+1}}\right), \quad a > 0$$

90.– Sea la ecuación: $x^5 - 80x + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Demostrar que no existe más de una raíz real en el intervalo $I = [-2, 2]$.

b) Buscar un valor de C no nulo para el que haya una raíz y obtenerla.

91.– Sea un rectángulo de base b y altura h. Sobre el lado superior se adosa un triángulo equilátero de modo que la base del triángulo coincide exactamente con el lado del rectángulo. Si se dispone de 1 m de alambre para el perímetro del pentágono descrito, halla los valores de b y h que producen un área máxima, justificando que se trata de un máximo.

92.– Resuelve la integral de reducción $I(n) = \displaystyle\int x^{2n} e^x \, dx$

93.– Integra $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotan} x}{\sec x}\, dx$

Curso 20/21. Examen de julio

94.– En $(\mathbb{R},||)$, se define el conjunto $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \le x \le 2,\ x \ne 1\} \cup \{3\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \,/\, 4 < x < 5\}$. Se pide obtener: **a)** $\overline{\mathrm{A}}$; **b)** $\mathring{\mathrm{A}}$; **c)** $\mathring{\overline{\mathrm{A}}}$; **d)** A'; **e)** $Fr(\mathrm{A})$; **f)** $\mathrm{Ext}(\mathrm{A})$

95.– Calcula $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} \right)^n$

96.– Una pieza cilíndrica de metal sufre un alargamiento, manteniendo el volumen constante de $100\,\pi$ cm^3, de manera que la longitud varía a razón de 1 cm/seg. Calcula con qué velocidad disminuye el radio cuando la longitud de la pieza es de 100 cm.

97.– Demuestra que, para todo $x \ge 1$, se verifica: $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1} + \operatorname{arc\,sen}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

98.– Calcula la primitiva $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

99.– Integra $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

Curso 21/22. Examen de enero

100.– Calcula $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left(k + \dfrac{1}{kn} \right)^{kn}, \quad k > 0$

101.– Un avión se desplaza en vuelo horizontal a una altura $h = 8$ km (suponemos la Tierra plana). La ruta de vuelo pasa por la vertical de un punto P del suelo. La distancia l entre el avión y el punto P disminuye a razón de 4 km por minuto en el instante en que esta distancia es de 10 km. Calcula la velocidad del avión en km/h en ese instante.

102.– Integra $I = \displaystyle\int (\cos x + \sec x)^2 \; dx$

103.– Integra $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^7}$

Curso 21/22. Examen de julio

104.– Calcula $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^k+1} - \sqrt{n^k} \right), \quad k \in \mathbb{R}$

105.– Sea el conjunto

$$\mathrm{A} = \left\{ \frac{n-1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \,/\, 1 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \le x \le 3\}$$

Se pide obtener los conjuntos Adherencia, Derivado, Conjunto de puntos aislados, Interior, Frontera y Exterior de A; así como razonar si A es abierto o cerrado.

106.– Sea un bosque rectangular de vértices ABCD, siendo A el vértice superior izquierdo y los otros situados en sentido horario. Las longitudes de los lados son $\overline{\mathrm{AB}} = 10$ km; $\overline{\mathrm{BC}} = 5$ km.
El bosque está bordeado inferiormente por una carretera (lado DC). Un excursionista quiere llegar de A a C en el tiempo más breve posible. Su camino se compone de dos tramos rectos: el primero, dentro del bosque, desde A hasta un punto P de la carretera situado a x km del vértice D. El segundo, a lo largo de la carretera, desde P hasta el vértice C. La velocidad de desplazamiento del excursionista es de 1 km/h por el bosque y de 5 km/h por la carretera. Calcula el valor de tiempo mínimo necesario, justificando que se trata de un mínimo.
Nota. Hay que estudiar también los extremos del intervalo de variación de la variable.

107.– Obtén la fórmula de reducción de: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

Curso 22/23. Examen de enero

108.– Se define la función f como

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2}$$

Se pide redefinirla –si es posible– de modo que sea continua en todo $\mathbb{R}$.

109.– Calcula, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+\alpha)}{\ln n}\right)^{n \ln n}$

110.– Los centros de dos círculos tangentes exteriores están separados una distancia d. ¿Qué valores deben tener sus radios para que la suma de las áreas sea máxima?

111.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan\frac{1}{x}}$

112.– Integra $\displaystyle\int \frac{\cos x}{e^x}\,dx$

Curso 22/23. Examen de julio

113.– Sea el conjunto $\mathrm{A} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\, x^2+y^2 < \dfrac{1}{z^2},\ z > 1\right\}$. Se pide:

a) Dibujar de forma esquemática el conjunto $Fr(\mathrm{A})$.

b) Obtener la frontera, el interior y la adherencia de A.

c) Obtener el conjunto de puntos aislados y de acumulación de A.

d) Obtener de nuevo la frontera si se define el conjunto A para $z > 0$ en vez de $z > 1$.

114.– Obtén el polinomio de Taylor de orden 6 de la función $f(x) = \operatorname{senh}(x)\cosh(x)$ en el punto $a = 0$, sin necesidad de derivar las funciones $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$.

115.– Un vertido accidental de combustible en el mar tiene forma circular. Se considera que el espesor de la mancha es constante y de valor 1/50 metros. Si el combustible continúa siendo vertido a una razón de 2 metros cúbicos por segundo, se pide:

a) ¿A qué razón crece el radio r de la mancha en el instante en que $r = 50$ metros?

b) Plantea el problema si el espesor es cualquier función derivable del radio, $h = f(r)$.

c) Resuelve el apartado **a)** si el espesor depende del radio según la relación $h = 1/r$, $r > 0$.

116.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}}$

117.– Integra $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^4 x}\,dx$

Curso 23/24. Examen de enero

118.– Calcula el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^2\,\mathrm{sen}(\theta)+2^2\,\mathrm{sen}(\theta/2)+\ldots+n^2\,\mathrm{sen}(\theta/n)}{n^2}$

119.– Obtén los tres primeros términos no nulos del desarrollo de McLaurin de la función:

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

120.– Obtén los puntos de la parábola $y = 4 - x^2$ cuya distancias al punto $(0, 3)$ sean máxima y mínima en términos absolutos, dentro del intervalo $[-2, 2]$.

121.– Resuelve $I = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^4)\,(\arctan x^2)^2}\,dx.$

122.– Integra $I = \displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

Curso 23/24. Examen de julio

123.– Se consideran las sucesiones cuyos términos generales son:

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{(1+1)(2+1)\ldots(n+1)}}{\sqrt[n]{n!}}\,; \quad b_n = \frac{n+1}{n^2+n+5}\,; \quad c_n = \frac{1}{1+\ln n}$$

Se pide calcular: **a)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$; **b)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (b_n)^{c_n}$

124.– Sea la función siguiente, definida en $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$$

a) Estudia su continuidad en $\mathcal{D}$.

b) ¿Es posible redefinir f para que sea continua en $\mathbb{R}$?

125.– De los rectángulos de perímetro dado P, se pide obtener:

a) El de diagonal de longitud mínima.

b) El de área de valor mínimo.

126.– Sea la integral $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}\,x}{\cos^4 x}\,dx$. Se pide:

a) Resolverla por el método “integrando impar en seno”.

b) Escribir el integrando en función de $\mathrm{tg}\,x$ y resolver la integral utilizando el cambio $\mathrm{tg}\,x = t$.

c) Comprobar que ambas expresiones de la primitiva se diferencian en una constante.

---

4. Soluciones a los problemas

1.– $Fr(\mathrm{A}) = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\geq 1,\, y=1\big\}\cup\{(x,y)/x\geq 1,\, y=x\}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)/x=n,\, 1\leq y\leq x\}$.

$\overline{\mathrm{A}} = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/1\leq y\leq x\big\}$.

2.– Se trata de una sucesión constante de términos $e^{\frac{\alpha}{\beta}}$, por lo que su límite es $L = e^{\frac{\alpha}{\beta}}$.

3.– a) Se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Bolzano.

b) No se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Rolle.

c) Existe una discontinuidad no evitable de segunda especie en $x=0$.

d) La función posee un mínimo relativo en $x=1$. No existen extremos absolutos, aunque f alcanza valores, positivos y negativos, tan grandes como queramos en valor absoluto.

4.– $I = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C$.

5.– $L = \sqrt[3]{2}$.

6.– $A = \dfrac{P^2}{4}\dfrac{k}{(1+k)^2}$; $k_{max}=1$ (cuadrado); $A_{max} = \dfrac{P^2}{16}$.

7.– $I = 6\sqrt{1+\ln^2 x}+C$.

8.– $L = \sqrt[4]{abcd}$.

9.– $\mathrm{A} = \left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\pm\dfrac{1}{n\pi}, n\in\mathbb{N}\right\}$; $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}\cup\{0\}$; $\mathrm{A}' = \{0\}$; $\mathring{\mathrm{A}} = \phi$; $Fr(\mathrm{A}) = \mathrm{A}\cup\{0\}$.

10.– a) $a=\pm 1$; **b)** f no es derivable en $x=0$ para ningún valor de a; **c)** $f'(0)=1$.

11.– a) $P(x) = x^3 - \dfrac{x^9}{3}+\dfrac{x^{15}}{5}-\dfrac{x^{21}}{7}+\dfrac{x^{27}}{9}-\ldots$ **b)** Tomar un número mayor de términos.

12.– $I = -e^2\arctan e^{\cos x}+C$.

13.– a) $f'(x) = \begin{cases}\cos x, & x>0\\ \dfrac{4}{(2-x)^2}, & x<0\end{cases}$

b) f no es derivable en $x=0$, pues no es continua. $f'(0^+)=1$. No existe derivada en $x=0^-$, pues $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\infty$.

14.– $L = -\dfrac{1}{4}$.

15.– $I_1 = \dfrac{1}{2}\arctan 2e^x + C$. $I_2 = -\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\,e^{-x}\right)+C$.

16.– a) La función es continua en $x\neq 0$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$. En $x=0$, es continua sólo si $a=2$, $b=\dfrac{1}{2}$.

b) $f'(x) = \left(\dfrac{2a}{x(ax^2+2b)}-\dfrac{2}{x^3}\ln(ax^2+2b)\right)\left(ax^2+2b\right)^{\frac{1}{x}}$. **c)** $P_4(x) = 1+\dfrac{x^4}{2}$.

17.– $L = b$.

18.– $I = -\operatorname{tg} x + C$.

19.– $I = \dfrac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}-2\sqrt{1-x}+C$. Si se resuelve por partes, $I = -\dfrac{4}{3}\sqrt{(1-x)^3}-2x\sqrt{1-x}+C$.

20.– En $x = 0$, f no es derivable. Para $x \neq 0$, $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ \dfrac{2a}{(2-x)^2}, & x < 0 \end{cases}$

21.– $P_4(x) = 3 - 3x + 9x^2 - 15x^3 + 33x^4$. Puede obtenerse descomponiendo g en suma o producto de fracciones, o bien operando el denominador y dividiendo.

22.– $I = x \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left|1 - x^2\right| + C.$

23.– **a)** Simplificando su expresión, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty, -1] \\ -x-1, & x \in (-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$

f es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto el origen, donde tiene una discontinuidad de salto.

b) La función no satisface las condiciones del teorema, pues no es continua en $x = 0$.

c) La función no satisface las condiciones del teorema, pues no es derivable en $x = -1$.

24.– $L = \dfrac{1}{3}$.

25.– **b)** $\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{H}} \bigcup \overline{\mathrm{Z}}$, siendo $\overline{\mathrm{H}} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, n \leq x \leq n+1; \; n \leq y \leq n+1\right\}$ y

$\overline{\mathrm{Z}} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x = y = -n\right\}$. $\quad Aisl(\mathrm{A}) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x = y = -n\right\}$.

c) $\mathrm{A} \neq \overline{\mathrm{A}}$, luego no es cerrado.

d) $\mathrm{A} \neq \mathring{\mathrm{A}} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, n < x < n+1; \; n < y < n+1\right\}$, luego no es abierto.

e) A no es cerrado, luego no es compacto (Teorema de Heine-Borel). Nota: tampoco es acotado, pero no es preciso demostrarlo, pues basta con no ser cerrado para no ser compacto.

26.– $I = x - \sqrt{1 - x^2} \, \operatorname{arc\,sen} x + C$.

27.– $I = \ln|\cos x + 1| + C$.

28.– **a)** La función es continua si y sólo si $a = 0$.

b) Hay infinitas sucesiones de límite 0, por ejemplo $\{0\}$, $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$, $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\} \dots$

29.– Cuando $n \to \infty$, la expresión $(e^x)^n$ será constante, tenderá a ∞ o a 0, según e^x sea igual, mayor o menor que 1, es decir, según x sea igual, mayor o menor que 0. Entonces:

- $x = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow L = e/2$.

- $x > 0 \Longrightarrow e^x > 1 \Longrightarrow L = x$.

- $x < 0 \Longrightarrow e^x < 1 \Longrightarrow L = e$.

Como el límite L es siempre positivo, A será vacío y $\overline{\mathrm{A}} = \phi$.

30.– Para que h sea real debe cumplirse a) que el radicando sea ≥ 0, b) que el argumento del arco seno esté comprendido entre +1 y –1 y c) que el argumento del logaritmo sea positivo y distinto de 1. Entonces $\mathrm{B} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \geq |y|, \; |x| \leq 2, \; x^2 + y^2 > 1, \; x^2 + y^2 \neq 2\right\}$.

31.– $P_3(x) = 3x - \dfrac{9}{2}x^3$. El error cometido es $P_3\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{6\pi - \pi^3}{6}$.

32.– $I=-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C.$

33.– $I(n)=\dfrac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x-I(n-2),\ \forall n\neq 1.\ \ I(1)=-\ln|\cos x|\,.\ \ I(0)=x.$

34.– **a)** f es continua en $[0,\infty)$; **b)** $\mathrm{A}=\big\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=k\pi,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\big\}.$

c) $\mathrm{B}=\Big\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\Big\}.$

d) $\mathrm{H}=\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$. H no está acotado pues k puede ser tan grande como queramos. Por lo tanto H no es compacto, según el teorema de Heine-Borel.

35.– **a)** $\mathrm{J}=\big\{(a,b)\in\mathbb{N}^2\,/\,a\neq b\big\}$; **b)** $\overline{\mathrm{J}}=\mathrm{J}$; **c)** $\mathrm{J}'=\phi$; **d)** $Fr(\mathrm{J})=\overline{\mathrm{J}}.$

36.– La suma es máxima descomponiendo el número 6 en dos partes iguales.

37.– La solución tiene distintas expresiones: $I_1=\operatorname{arc\,sen}(2x-1)+C$; $I_2=2\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}+C$; $I_3=-2\operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x}+C.$

38.– $I=2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C.$

39.– **a)** La función es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en los puntos $x=\pm 1$. En $x=+1$ presenta una discontinuidad no evitable de segunda especie. En $x=-1$ hay discontinuidad evitable, que se evita asignando a f el valor $\sqrt{e}$.

b) No hay máximos ni mínimos (la función es creciente en todo su dominio). Existe una asíntota vertical en $x=1$ y una horizontal $y=1$.

40.– **a)** $\mathrm{W}=\{3\}\cup\left(\dfrac{13}{4},4\right].$

b) $\overline{\mathrm{W}}=\{3\}\cup\left[\dfrac{13}{4},4\right]$; $Aisl(\mathrm{W})=\{3\}$; $Fr(\mathrm{W})=\{3\}\cup\left\{\dfrac{13}{4}\right\}\cup\{4\}.$

c) W no es cerrado pues no coincide con su adherencia; no es abierto pues no coincide con su interior; no es compacto pues no es cerrado, aunque sí acotado.

d) $L=\dfrac{5}{2}.$

41.– $I=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C.$

42.– $I=-\dfrac{1}{6}\sqrt{\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)^3}+C.$

43.– **a)** $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$

b) Existe una discontinuidad evitable en $x=0$, que puede evitarse definiendo $f(0)=0$. En $x=\pm 1$ existen discontinuidades no evitables de segunda especie (de salto infinito).

c) La expresión pedida es: $x\cos x^2+2x^3\operatorname{sen}x^2-2x\operatorname{sen}x^2.$

d) $P_3(x)=2(x-1)-(x-1)^2+\dfrac{2}{3}(x-1)^3.$

44.– **a)** $\alpha=\dfrac{3}{2},\ \beta=e^{-4},\ \gamma=\dfrac{4}{e}.$

b.1) $\mathrm{D}'=\{\alpha,\beta,\gamma\}$; $Fr(\mathrm{D})=\mathrm{D}\cup\mathrm{D}'.$

b.2) $\mathring{\mathrm{D}}=\phi\Longrightarrow Fr(\mathrm{D})=\overline{\mathrm{D}}\setminus\mathring{\mathrm{D}}=\overline{\mathrm{D}}\Longrightarrow Fr(\mathrm{D})\subset\overline{\mathrm{D}}$ y $\overline{\mathrm{D}}\subset Fr(\mathrm{D}).$

b.3) $\mathrm{D}\neq\mathring{\mathrm{D}}\Longrightarrow$ D no es abierto; $\overline{\mathrm{D}}=\mathrm{D}\cup\mathrm{D}'\neq\mathrm{D}\Longrightarrow$ D no es cerrado.

b.4) D no es cerrado, aunque sí acotado, luego no es compacto.

45.– $I = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + C.$

46.– $I(n) = -x^n \cos x + n x^{n-1} \operatorname{sen} x - n(n-1)I(n-2)$. $I(0) = -\cos x,\ I(1) = \operatorname{sen} x - x\cos x$. $I(0)$ e $I(1)$ son casos particulares de la fórmula general.

47.– **a)** $P(1,2)$.

b) $x_H = -\sqrt{3},\ x_P = 1$. f cumple las condiciones del teorema, siendo $\xi = \dfrac{-1}{1+\sqrt{3}}$.

c) $P_2(x) = 3 - 3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2$.

48.– **a)** $L = -\infty$; **b)** $L = -\dfrac{3}{\pi}$; **c)** $L = 0$; **d)** $L = \dfrac{\sqrt[8]{5}}{\sqrt[9]{8}}$; **e)** $L = \dfrac{5}{8}$; **f)** $L = \dfrac{1}{2}$.

49.– $I = x - \dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x| + C$, o bien $I = x + \dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cotg} 2x| + C$.

50.– **a)** f es continua en $[-1,2]$. Es derivable en $[-1,0)$ y $(0,2]$. En $x=0$ tiene derivadas laterales distintas.

b) Las satisface por ser continua en $\left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset [-1,2]$ y derivable en $\left(\frac{1}{2}, 2\right) \subset (0,2]$.

d) $\mathring{\mathrm{A}} = \phi \neq \mathrm{A}$, luego no es abierto. $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$, luego es cerrado. A puede encerrarse en una bola de radio finito, luego es acotado. Al ser cerrado y acotado, es compacto.

51.– $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-10}$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2e}$.

52.– Dimensiones de coste mínimo: lado de la base $b = 8\sqrt[3]{2}$ cm, altura $h = \dfrac{10}{\sqrt[3]{4}}$ cm.

53.– $I = \operatorname{arc\,sen}(x-1) + (x-1)\sqrt{2x - x^2} + C$.

54.– $\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -\ln x < y < \ln x\right\}$; $\overline{\mathrm{A}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -\ln x \leq y \leq \ln x\right\}$; $\mathrm{A} \neq \overline{\mathrm{A}}$, por lo que A no es cerrado.

55.– $L = \dfrac{e}{\pi}$.

56.– Los dos números son 20 y 24.

57.– Existen tres raíces: $x_0 = 0,\ x_1 > \dfrac{1}{\sqrt{3}};\ x_2 < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

58.– $I = -4\sqrt{1 + \sqrt{\cos x}} + C$.

59.– **a)** La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) A partir del apartado anterior, f es continua en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$, por lo que cumple las condiciones del teorema. El único valor medio que existe es $\xi = 0$.

c) La función tiene un mínimo en $x = 1/2$ y un máximo en $x = 5$.

60.– Aplicando el criterio de Stolz, obtenemos que $a_n \to +\infty$. En $\mathbb{R}$ toda sucesión es de Cauchy si y sólo si es convergente, luego $\{a_n\}$ no es de Cauchy.

61.– **b)** $\overline{\mathrm{A}} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x-n)^2 + (y-n)^2 \leq 1\right\}$

c) $\mathrm{A} \neq \overline{\mathrm{A}}$, por lo que A no es cerrado.

d) En $(\mathbb{R}, ||)$ un compacto es cerrado y acotado. A no es cerrado, luego no es compacto.

e) $\mathring{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x-n)^2 + (y-n)^2 < 1\big\}$. $A = \mathring{A}$, luego es abierto.

62.– $I = \dfrac{1}{p}\tan^p x + C \ (p \neq 0)$. Si $p = 0,\ I = \ln|\tan x| + C$.

63.– $I = -2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + C$.

64.– $Fr(\mathrm{A}) = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y = x\big\} \bigcup \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y = E(x)\big\} \bigcup \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\in\mathbb{Z},\ x-1 \le y < x\big\}$
En la definición de A no existen puntos en que $y = x$ ni puntos en que $y = E(x)$. Además, si $x \in \mathbb{Z}$, será $x = E(x)$, por lo que $\nexists y \,/\, E(x) < y < x$. Luego la frontera de A no contiene puntos de A. Entonces $\mathrm{A} \cap Fr(\mathrm{A}) = \phi \Longrightarrow$ A es abierto.

65.– Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital se obtiene $l = -1/2$. La función es discontinua en $x = 0$, pues la expresión con la que se ha definido no tiene sentido en ese punto. La discontinuidad es evitable. Basta para ello con definir $f(0) = -1/2$.

66.– Tras localizar los extremos relativos y estudiar los extremos del dominio, el valor que hace máximo el cociente $\dfrac{A}{B}$ es $A = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$.

67.– Al tratarse de un cociente de polinomios y no anularse el denominador en el intervalo, f es continua en $[0,6]$ y derivable en $(0,6)$, por lo que cumple las condiciones del teorema. El valor buscado es $\xi = 7 - \sqrt{7}$.

68.– $P_3(y) = 4(y-1) - 2(y-1)^2 + \dfrac{4}{3}(y-1)^3$.

69.– $I = \dfrac{1}{3}\left(x^3 - 1\right)e^{x^3} + C$.

70.– $I = \dfrac{1}{3}\arctan x - \dfrac{1}{6}\arctan\dfrac{x}{2} + C$.

71.– $P_8(x) = 1 - 2x^4 + \dfrac{2}{3}x^8$.

72.– $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\sqrt{e}}; \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$.

73.– $S_L = 2\pi r h = 2\pi y \cdot 2x = \dfrac{4\pi x}{1+x^2}$. La función S_L alcanza el máximo en $x = 1$. Dimensiones del rectángulo: base $2x = 2$, altura $y = \dfrac{1}{2}$.

74.– $I = \dfrac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 3\right) + C$.

75.– $I = -\dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C$.

76.– $L = \mathrm{Máx}(a,b)$.

77.– $P_3(x) = 1 + x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3$.

78.– $h_{min} = r_{min} = 3$. $S_{min} = 45\pi$. $S'' = 10\pi > 0 \Longrightarrow$ mínimo.

79.– $I = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{4}\,\mathrm{sen}\,2x - \dfrac{1}{8}\cos 2x + C$.

80.– $I = \mathrm{arc\,sen}\,x - \sqrt{1-x^2} + C$.

81.– $L = -\dfrac{1}{2}$.

82.– **a)** $v_y = -0.4\,m/s$; **b)** $d = \dfrac{4\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}}\,m$.

83.– $l = \sqrt{20}\,km$. Se trata de un mínimo, pues $d''(x)|_{x=1} = \dfrac{9}{\sqrt{2}} > 0$.

84.– **a)** $I = \dfrac{1}{2}\ln(1+\operatorname{sen}^2 x) + C$; **b)** $I_{rac} = \displaystyle\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)(1+2t^2)}$; **c)** Idem **a)**.

85.– $L = -15$.

86.– **a)** Rectángulo de área mínima: $b = 0$, $h = 1$, $A_{min} = 0$ (extremo izquierdo del dominio); rectángulo de área máxima: $b = 1$, $h = 1/e$, $A_{max} = 1/e$.

b) Rectángulo de perímetro mínimo: $b = 0$, $h = 1$, $P_{min} = 2$; no existe el rectángulo de perímetro máximo.

87.– $I = \dfrac{1}{4}(x^4 \operatorname{sen} x^4 + \cos x^4) + C$.

88.– $I = -2\ln|\cos\sqrt{x}\,| + C$.

89.– $L = \ln a$.

90.– **a)** Se demuestra por reducción al absurdo, definiendo $f(x) = x^5 - 80x + C$, suponiendo que se anula en dos o más puntos y aplicando el teorema de Rolle.

b) Se elige un valor para x en $[-2, 2]$, por ej. $x = 1$, se hace $f(1) = 0$ y resulta $C = 79$.

91.– Dimensiones que producen área máxima: $b = 1/(6-\sqrt{3})$, $h = (3-\sqrt{3})/(12-2\sqrt{3})$.

92.– $I(n) = e^x\left(x^{2n} - 2n\,x^{2n-1}\right) + 2n\,(2n-1)I(n-1)$. $I(0) = e^x$.

93.– $I = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + \cos x + C$.

94.– $\overline{\mathrm{A}} = [0,2]\cup\{3\}\cup[4,5]$; $\mathring{\mathrm{A}} = (0,1)\cup(1,2)$; $\mathring{\overline{\mathrm{A}}} = (0,2)\cup(4,5)$; $\mathrm{A}' = [0,2]\cup[4,5]$;
$Fr(\mathrm{A}) = \{0,1,2,3\}\cup[4,5]$; $Ext(\mathrm{A}) = (-\infty,0)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup(5,\infty)$.

95.– $L = e^{2/3}$.

96.– $V_r = -0.005\,cm/s$.

97.– Se puede demostrar de dos maneras:

a) Hacemos $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1} + \operatorname{arc\,sen}\dfrac{1}{x}$ y calculamos $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$. Comprobando que $\forall x \geq 1$, $f'(x) = 0$, resulta que $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, con lo que se cumple la ecuación.

b) Hacemos $\alpha = \arctan\sqrt{x^2-1}$ y calculamos, a partir de ello, el $\cos\alpha$. Observando que $\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ y despejando $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$, se comprueba que se cumple la ecuación.

98.– $I = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + C$.

99.– $I = x - \ln(e^x + 1) + C$.

100.– Si $k > 1$, $l = \infty$. Si $k = 1$, $l = e$. Si $k < 1$, $L = 0$.

101.– $V_a = 400$ km/h.

102.– $I = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \tan x + C$.

103.– $I = -\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2}\arctan x^2 + C.$

104.– Si $k > 0$, $l = 0$. Si $k = 0$, $l = \sqrt{2} - 1$. Si $k < 0$, $L = 1$.

105.– $\overline{\mathrm{A}} = \left\{\dfrac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup [1,3]$; $\mathrm{A}' = [1,3]$; $Aisl(\mathrm{A}) = \left\{\dfrac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\mathring{\mathrm{A}} = (2,3)$; $Fr(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}} = \left\{\dfrac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup [1,2] \cup \{3\}$;

$Ext(\mathrm{A}) = \mathbb{R} \setminus \overline{\mathrm{A}} = (-\infty, 0) \cup (3, \infty) \bigcup\limits_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}} \left(\dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n}{n+1}\right).$

A no es abierto, pues $\mathrm{A} \neq \mathring{\mathrm{A}}$. No es cerrado pues $\mathrm{A} \neq \overline{\mathrm{A}}$.

106.– $T_{min} = \sqrt{24} + 2$ horas.

107.– $I(n) = \dfrac{2n-3}{2n-2} I(n-1) + \dfrac{1}{2n-2} \dfrac{x}{(x^2+1)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$; $I(1) = \arctan x.$

108.– La redefinimos incluyendo el límite en el origen: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

109.– $L = e^{\alpha}.$

110.– El máximo valor para la suma de las dos áreas se obtiene con un círculo de radio d y otro de radio nulo (reducido a un punto).

111.– $I = -\ln\left|\arctan \dfrac{1}{x}\right| + C.$

112.– $I = \dfrac{1}{2} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{e^x} + C.$

113.– **b)** $Fr(\mathrm{A}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = \dfrac{1}{z^2}, z > 1\right\}$;

$\mathring{\mathrm{A}} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 < \dfrac{1}{z^2}, z > 1\right\}$; $\overline{\mathrm{A}} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq \dfrac{1}{z^2}, z > 1\right\}.$

c) $Aisl(\mathrm{A}) = \phi$; $\mathrm{A}' = \overline{\mathrm{A}}$.

d) $Fr(\mathrm{A}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = \dfrac{1}{z^2}, z > 1\right\} \cup \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\right\}.$

114.– $P(x) = x + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15}.$

115.– **a)** $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{\pi}$ m/s.

b) $V = \pi r^2 f(r) \Longrightarrow \dfrac{dV}{dt} = \left(2\pi r f(r) + \pi r^2 \dfrac{df}{dr}\right) \dfrac{dr}{dt}$, de donde se despeja $\dfrac{dr}{dt}$, con $\dfrac{dV}{dt} = 2.$

c.1) Sustituímos en **b)**: $f(r) = \dfrac{1}{r}$ y $\dfrac{df}{dr} = -\dfrac{1}{r^2}$. Resulta $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{2}{\pi}.$

c.2) Alternativa: como $V = \pi r^2 f(r) = \pi r \Longrightarrow r = \dfrac{V}{\pi}$. Obtenemos $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{2}{\pi}.$

116.– $I = 2\arctan\sqrt{x} + C.$

117.– $I = \dfrac{1}{4\cos^4 x} + C.$

118.– $L = \theta/2$.

119.– $P_3(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$.

120.– Son puntos críticos $x = 0, x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Son extremos de intervalo $x = \pm 2$. La distancia alcanza el máximo absoluto ($M = 13$) en $x = \pm 2$ y el mínimo absoluto ($m = 3/4$) en $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Tiene también un máximo relativo ($M' = 1$) en $x = 0$.

121.– $I = -\dfrac{1}{2\arctan x^2} + C$.

122.– Se puede resolver por partes o bien operando el numerador. Resultan dos soluciones, que se puede comprobar que coinciden sacando factor común la raíz cuadrada:

$$I = x^2\sqrt{x^2-1} - \frac{2}{3}(x^2-1)^{3/2} + C. \qquad I = \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + \sqrt{x^2-1} + C.$$

123.– **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^{c_n} = 1/e$.

124.– Fuera del origen, $1/x$ es continua, luego $e^{1/x}$ lo es por ser la exponencial de una continua. Entonces $1 + e^{1/x}$ es continua en $\mathcal{D}$ y también $f(x)$ por ser cociente de funciones continuas.

Estudiando los límites laterales de f en $x = 0$, resultan distintos. Entonces la discontinuidad no es evitable y f no se puede redefinir de modo que sea continua.

125.– **a)** Resulta el cuadrado de lado $P/4$.

b) Se obtiene el rectángulo de lados $b = P/2$, $h = 0$ o bien $b = 0$, $h = P/2$. Es decir, el rectángulo se convierte en un segmento de área nula.

126.– **a)** $\cos x = t \Longrightarrow I_1 = \dfrac{1}{4\cos^4 x} + C$.

b) $\operatorname{tg} x = t \Longrightarrow I_2 = \int (1+t^2)\, t\, dt \Longrightarrow I_2 = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$.

c) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \Longrightarrow I_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4} \Longrightarrow I_1 - I_2 = \dfrac{1}{4}$

5. Cuestiones tipo test (V-F)

1.– Sean r y s dos números irracionales cualesquiera. Entonces...

___• $\frac{r}{s}$ puede ser racional.

___• $\frac{r}{s}$ puede no existir.

___• $\frac{r}{s} \geq 1$ ó $\frac{r}{s} < 1$, siempre.

___• Existe al menos una sucesión de números racionales cuyo límite es $\frac{r}{s}$.

2.– Sean los conjunto $\mathrm{A} = \{a \in \mathbb{Q} \,/\, a^2 \leq 3\}$ y $\mathrm{B} = \{b \in \mathbb{R} \,/\, b^2 > 3\}$. Se cumple que:

___• A está acotado superiormente pero no inferiormente.

___• A tiene máximo.

___• A tiene supremo en $\mathbb{R}$, pero no máximo.

___• A tiene ínfimo en $\mathbb{R}$, pero no en $\mathbb{Q}$.

___• B está acotado inferiormente, pero no superiormente.

___• B no tiene mínimo, pero sí ínfimo.

___• A y B son complementarios, es decir $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathbb{R}$.

3.– Para poder aplicar el Principio de Inducción a un conjunto de infinitos elementos, con el fin de demostrar una propiedad, es necesario que:

___• Todos los elementos del conjunto sean números enteros.

___• Todos los elementos del conjunto sean números racionales.

___• El conjunto sea numerable.

___• El conjunto tenga estructura de cuerpo ordenado.

4.– Sean las sucesiones de término general $a_n = \dfrac{7^n - 1}{7^n}$ y $b_n = \dfrac{8n+1}{8n}$, $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que:

___• Son de Cauchy pero no convergen en $\mathbb{Q}$.

___• Definen los números reales inmediatamente anterior y posterior a 1.

___• Convergen a un mismo número racional.

___• No convergen en $\mathbb{Q}$ pero sí en $\mathbb{R}$.

5.– Entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ existe una correspondencia biunívoca. Esto significa que:

___• Puede asignarse un número de orden a cada número racional.

___• Dado un racional, siempre es posible hallar el racional que le sigue en la recta real.

___• Entre dos números naturales existe como máximo un número finito de racionales.

___• $\mathbb{Q}$ es numerable.

6.– Sea el espacio métrico (E, d) y el conjunto $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$.

___• Todo punto frontera de A es de acumulación de A.

___• Todo punto de acumulación de A es, o bien frontera, o bien interior de A.

___• Si $Fr(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$, entonces $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$.

___• Si $Fr(\mathrm{A}) \cap \mathrm{A} = \phi$, entonces $\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}}$.

7.– De la frontera de un conjunto $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, podemos afirmar que:

___• Es un cerrado sólo si el conjunto A es abierto.

___• Es siempre un abierto.

___• Es siempre un cerrado.

___• No contiene ningún punto aislado de A.

8.– Sea (E, d) un espacio métrico y $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathrm{E}$. Se cumple:

___• Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} = \overline{\mathrm{B}}$, entonces A es cerrado.

___• $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$, siempre.

___• $\overline{\mathrm{A}}$ puede no contener algún punto de A.

___• $\overline{\left(\mathring{\mathrm{A}}\right)} = \mathrm{A}$.

9.– Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$. Podemos afirmar que:

___• $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es abierto.

___• $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es cerrado.

___• El conjunto $\mathrm{X} = \{x \in \mathbb{R} / \ 1 < x \leq 2\}$ es abierto y cerrado.

___• Todo cerrado es intervalo cerrado.

10.– Consideramos el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la métrica natural.

___• Todo abierto en $\mathbb{R}$ es intervalo abierto.

___• Todo intervalo cerrado es cerrado.

___• El conjunto de los naturales es cerrado.

___• $\mathbb{R}$ coincide con su adherencia.

11.– A partir de la definición de entorno podemos asegurar que:

___• Un entorno del punto x es todo conjunto que contiene a x.

___• Un entorno de un punto es siempre abierto.

___• Todo conjunto abierto que contiene al punto x es entorno suyo.

___• La adherencia de un conjunto A es entorno de todos los puntos interiores de A.

12.– Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n < 0$ y $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión...

___• Tiene límite 0.

___• Diverge a $-\infty$.

___• Está acotada inferiormente pero no superiormente.

___• Es convergente en $\mathbb{R}$.

13.– Dada la sucesión $\{a_n\}$, si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$, puede demostrarse que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$...

___• A partir de las propiedades de los límites.

___• A partir del límite de la media geométrica.

___• Sólo en el caso de que a_n se mantenga positivo a partir de un cierto término.

___• A partir del criterio de Stolz.

14.– Dadas las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, donde $b_n = a_n^2$, si existe $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, podemos afirmar que:

___• El límite de la sucesión $\{a_n\}$ es $a = \sqrt{b}$.

___• El límite de la sucesión $\{a_n\}$ es $a = -\sqrt{b}$.

___• El límite de la sucesión $\{a_n\}$ es $a = \sqrt{b}$ ó bien $a = -\sqrt{b}$, pero necesitamos conocer la sucesión para saber cual es el verdadero.

___• La sucesión $\{c_n\}$, con $c_n = \cosh(a_n)$, es convergente en cualquier caso.

15.– Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones nulas de términos positivos. Para obtener los límites que se indican a continuación podemos sustituir a_n, b_n y c_n por sus infinitésimos equivalentes.

___• $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n \cdot b_n}{c_n}$

___• $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{c_n}$

___• $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n - c_n}$

___• $\lim_{n\to\infty} a_n \ln b_n$

16.– Dadas las sucesiones de números reales $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$, donde $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Si existe $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, podemos afirmar de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que:

___• No pueden ser divergentes las dos.

___• Pueden no ser convergentes las dos.

___• $\{a_n\}$ converge y $\{b_n\}$ está acotada inferiormente por un número positivo.

___• Pueden ser oscilantes las dos.

17.– Sea la función $f : I \to \mathbb{R},\ I = (-a, a) \subset \mathbb{R}$.

___• f puede descomponerse siempre en suma de una función par y una impar.

___• Si $f(x)$ es monótona creciente, $|f(x)|$ también lo es.

___• Si $f \in C^1$, la función y su derivada son continuas.

___• Si f es una función impar, su gráfica es una curva simétrica respecto al eje OY.

18.– La función $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$ verifica:

___• Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

___• Es continua en todo $\mathbb{R}$.

___• No está acotada en $\mathbb{R}$.

___• $f(1) = f(-1)$, luego $f'(x) = 0$ en algún punto de $[-1, 1]$.

19.– Sea la función $f : D \to \mathbb{R}$, siendo $D \subset \mathbb{R}$ su dominio.

___• Si f tiene límite en el punto $c \in \mathbb{R}$, está definida en ese punto.

___• Si f tiene límite en el punto $c \in D$, está acotada en un entorno de ese punto.

___• Si f es continua en el punto $c \in D$, tiene límites laterales iguales en c.

___• Si $|f(x)|$ es continua, $f(x)$ también lo es.

20.– Sean f y g funciones de I en $\mathbb{R}$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

___• Si f y g son continuas en I, f/g es continua en I.

___• Si f y $f \cdot g$ son continuas en I, g es continua en I.

___• Si $f + g$ es continua en I, f y g son continuas en I.

___• Si f y $f + g$ son continuas en I, g es continua en I.

21.– Sea la función continua $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

___• La imagen de $[a, b]$ será también un intervalo cerrado.

___• f es uniformemente continua.

___• Si f es monótona, es derivable.

___• Si f es derivable, es diferenciable.

22.– La función $y = e^{\frac{1}{x}} \ldots$

___• Pasa por el origen.

___• Su mínimo absoluto es 0.

___• Su recorrido tiene ínfimo.

___• Tiene una sola asíntota y es horizontal.

23.– Sea $E(x)$ la parte entera de x. La función $f(x) = E(|x|) \ldots$

___• Es una función par.

___• Es discontinua en los valores enteros de x.

___• Existen infinitos intervalos no vacíos en los que la función es derivable.

___• Es monótóna creciente.

24.– Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

___• Si f no está acotada en (a, b), entonces no es continua en (a, b).

___• Si g es una función par, derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces $g'(0) = 0$.

___• Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - g(x) = 0$.

___• Si f es continua en $[a, b]$ y se anula en un punto interior de dicho intervalo, entonces tiene distinto signo en los extremos.

25.– Sea la función f, derivable en todo $\mathbb{R}$. Si $f(1) = 1$ y $f(2) = 2$, entonces…

___• $\exists \xi \in (1, 2) / \ f(\xi) = \xi$.

___• $\exists \xi \in (1, 2) / \ f(\xi) = 1$.

___• $\exists \xi \in (1, 2) / \ f(\xi) = \sqrt{2}$.

___• $\forall \xi \in (1, 2) / \ f^{'}(\xi) > 0$.

---

6. Soluciones a las cuestiones tipo test

Ejercicio	**Respuestas válidas**
1	a, c, d
2	c, d
3	c
4	c
5	a, d
6	b, c, d
7	c
8	b
9	Ninguna
10	b, c, d
11	c, d
12	d
13	Ninguna
14	d
15	a, d
16	b, d
17	a, c
18	b, c
19	b, c
20	d
21	a, b, d
22	c
23	a, c
24	b
25	c