Introducción a los cambios de variable (06.07.2023)

1. Cambio de variable explícito.

Sea la función $f : I \to \mathbb{R}$ continua en $I = [a, b]$, cuya primitiva queremos obtener. Sea $g : J \to \mathbb{R}$ una función con derivada continua y estrictamente monótona en $J = [c, d]$ (con el fin de que admita inversa). Si la imagen por g del intervalo J está contenida en I, entonces podemos realizar el cambio de variable $x = g(t)$, resultando

$$\int f(x)\, dx = \int f\left(g(t)\right) g'(t)\, dt = \int H(t)\, dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

Haremos el cambio si esta integral es más fácil de resolver que la inicial.

Ejemplo. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\, dx$. Con $x = \operatorname{sen} t$, la integral se convierte en $\displaystyle\int \cos^2 t\, dt$.

La función $x = \operatorname{sen} t$ es estrictamente monótona en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ o en $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

2. Cambio de variable implícito.

A veces resulta útil hacer el cambio $h(x) = t$ (o, lo que es lo mismo, $x = h^{-1}(t)$), con lo que $h'(x)\, dx = dt$. Escribimos entonces la integral como

$$\int f(x)\, dx = \int \frac{f(x)}{h'(x)}\, h'(x)\, dx,\ h'(x) \neq 0$$

Si $\dfrac{f(x)}{h'(x)}$ puede ponerse como función de t, la integral se convierte en $\displaystyle\int G(t)\, dt$.

La función h debe ser, como antes, de derivada continua y estrictamente monótona.

También aquí haremos el cambio si esta integral resulta más sencilla que la inicial.

Ejemplo. $\displaystyle\int x \cos x^2\, dx$. Con $t = h(x) = x^2$, $h'(x) = 2x$, la integral se convierte en

$$\int \frac{x \cos x^2}{2x}\, 2x\, dx = \int \frac{\cos t}{2}\, dt$$

En la práctica no hay necesidad de dividir y multiplicar por $h'(x)$. La derivada de h se obtiene multiplicando y dividiendo el integrando por el factor adecuado.

$$\int x \cos x^2\, dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2\, 2x\, dx = \frac{1}{2} \int \cos t\, dt$$

3. Combinación de ambos métodos.

Es frecuente iniciar el cambio de variable como implícito, eligiendo $h(x)$, despejar x $\big(x = h^{-1}(t)\big)$ y a partir de ahí obtener dx.

Ejemplo. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{2-\sqrt[3]{x}}$. Hacemos $2 - \sqrt[3]{x} = t \Longrightarrow x = (2-t)^3,\ dx = -3(2-t)^2 dt$.

La integral se convierte en $\displaystyle\int \frac{-3(2-t)^5}{t}\, dt$.

Nota. Es suficiente que la condición de monotonía estricta, impuesta para poder calcular la función inversa, se cumpla a trozos; es decir, que el intervalo J se pueda descomponer en subintervalos, en cada uno de los cuales se cumple la condición. Por ejemplo, la función $x = \operatorname{sen} t$ utilizada en el apartado **1.** no es estrictamente monótona en su dominio, pero sí en intervalos de longitud π como los indicados.

4. **Aplicación.** Se propone resolver los siguientes casos aplicando el cambio que se sugiere. En el caso **c)**, el ejercicio consiste en modificar el integrando para poder aplicar el cambio.

a) Cambio explícito.

1. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx \;\; (x = \alpha \operatorname{senh} t)$. Sol: $\displaystyle\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha^2}\right| + C.$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}\,dx \;\; (x = \alpha \cosh t)$. Sol: $\displaystyle\frac{x}{2}\sqrt{x^2-\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\alpha^2}\right| + C.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{\alpha^2-x^2}}\,dx \;\; (x = \alpha \operatorname{sen} t)$. Sol: $\displaystyle -\frac{1}{\alpha^2}\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x} + C.$

b) Cambio implícito.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \;\; \left(1+\sqrt{x} = t\right)$. Sol: $2(1+\sqrt{x}) - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$
2. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+3)\sqrt{e^x-1}}\,dx \;\; \left(\sqrt{e^x-1} = t\right)$. Sol: $\displaystyle\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{e^x-1}}{2} + C.$
3. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx \;\; \left(\sqrt{e^x+1} = t\right)$. Sol: $\displaystyle\frac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3} - 2\sqrt{e^x+1} + C.$

c) Convertir la integral en inmediata, por medio del cambio sugerido.

1. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}\,dx \;\; (\operatorname{sen} x - \cos x = t)$. Sol: $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{-1+3x^2-x^4}}\,dx \;\; \left(x - \frac{1}{x} = t\right)$. Sol: $\displaystyle\operatorname{arc\,sen}\left(x - \frac{1}{x}\right) + C.$