Aplicación reiterada de la regla de L´Hôpital (19.07.2022)

Si al aplicar la regla de L'Hôpital a un cociente, resulta otro límite indeterminado, puede reiterarse el método si se siguen cumpliendo las condiciones exigidas para ello.

Ejemplo. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x - \operatorname{sen} x}$.

a) Es un límite del tipo $0/0$, que cumple las condiciones para la aplicación de la regla de L'Hôpital, por lo que calculamos el límite del cociente de derivadas

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2/\left(1+x^3\right)}{1-\cos x} \overset{\text{Si }\exists}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x}\cdot 1$$

que sigue siendo indeterminado, del tipo $0/0$.

b) Como el numerador y el denominador siguen siendo funciones derivables y la derivada del denominador no se anula fuera del origen, derivamos de nuevo (con ello **no** estamos calculando las derivadas segundas de f y g, pues hemos simplificado el límite de f'/g').

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(3x^2\right)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\operatorname{sen} x}$$

c) Para resolver este límite indeterminado derivamos por tercera vez.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(6x)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{\cos x} = 6$$

d) Tenemos pues que, según la regla de L'Hôpital,

$$6 = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e) Lo anterior puede resumirse como:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{si }\exists}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{si }\exists}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} \overset{\text{si }\exists}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\operatorname{sen} x} \overset{\text{si }\exists}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6}{\cos x} = 6$$

No existencia del límite del cociente de derivadas

La regla de L'Hôpital dice que, en ciertas condiciones, si existe el límite del cociente de derivadas, existe el límite del cociente de funciones y vale lo mismo. Pero puede no existir el límite del cociente de derivadas y sí el del cociente de funciones.

Ejemplo. Sean $g(x) = \operatorname{sen} x,\ f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

a) Calculamos el límite de f'/g' en el origen.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots = \lim_{x\to 0} \Big(-\cos(1/x) \Big), \text{ que no existe}$$

b) Sin embargo, calculando el límite de f/g directamente, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)}_{\to 1} \underbrace{\Big(x \operatorname{sen}(1/x)\Big)}_{\to 0} = 0$$