Entre dos reales existe un racional (24.09.2018)

Del enunciado -que se demuestra a continuación- se deduce que entre cada uno de los dos reales y el racional (que también es real), existe un nuevo número racional. Reiterando el razonamiento, concluimos que **entre dos reales existen infinitos racionales**. Esta propiedad se expresa también diciendo que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ (J. Burgos, pg. 58).

D: Sean $x, y \in \mathbb{R},\ x < y$.

- Como $x < y \Longrightarrow y - x > 0$. Tomamos $\dfrac{1}{y-x}$. Como el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado, podemos asegurar que

$$\exists n \in \mathbb{N}\ /\ n > \frac{1}{y-x}; \quad \text{es decir,} \quad \underbrace{y - x > \frac{1}{n}}_{(1)}.$$

- Sea $p \in \mathbb{Z}$ la parte entera de nx. Entonces

$$p \leq nx < p+1 \Longrightarrow \underbrace{\frac{p}{n} \leq x}_{(2)} \quad \text{y} \quad \underbrace{x < \frac{p+1}{n}}_{(3)}.$$

- Aplicando las relaciones (1), (2) y (3) se cumple

$$y = x + (y-x) \underbrace{>}_{(1)\ \text{y}\ (2)} \frac{p}{n} + \frac{1}{n} = \frac{p+1}{n} \underbrace{>}_{(3)} x$$

  Es decir,

$$x < \frac{p+1}{n} < y, \ \text{siendo} \ \frac{p+1}{n} \ \text{ un número racional.}$$

Entre dos reales existe un irracional

Del enunciado se deduce que entre cada uno de los dos reales y el irracional (que también es real), existe un nuevo número irracional. Reiterando el razonamiento, concluimos que **entre dos reales existen infinitos irracionales**. Esta propiedad se expresa también diciendo que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ (J. Burgos, pg. 58).

D: Sean $x, y \in \mathbb{R},\ x < y$.

- Por las propiedades de la relación de orden se cumplirá

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

- Por la demostración anterior

$$\exists r \in \mathbb{Q}\ /\ \frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$$

  de donde

$$x < \sqrt{2}\, r < y, \ \text{siendo} \ \sqrt{2}\, r \ \text{ un número irracional.}$$