Término general de la sucesión de los enteros (18.09.2018)

Existen sucesiones cuyo término general tiene expresiones distintas para n par o impar, por ejemplo: $\dfrac{1}{1}, 2, \dfrac{1}{3}, 4, \dots$, donde a_n vale n, para n par y $1/n$, para n impar. En estos casos podemos obtener una expresión única para el término general. Para ello, a partir de las sucesivas potencias de -1, definimos las sucesiones $\{i_n\}$ y $\{p_n\}$:

$$\{(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\} = -1, 1, -1, 1, \dots \Longrightarrow \begin{cases} \{i_n\} = \left\{\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right\} = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \\[2ex] \{p_n\} = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\} = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots \end{cases}$$

Dada la sucesión obtenida reordenando los enteros, $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$, se pide:

a) Obtener las expresiones del término general para n par e impar.

b) Obtener una única expresión para el término general.

Solución.

a) Observando la sucesión de los enteros, vemos que:

- Para n par $(2, 4, 6 \dots)$, los términos son $1, 2, 3 \dots$, luego $a_n = \dfrac{n}{2}$.

- Para n impar, los términos son $0, -1, -2, \dots$. Su valor se incrementa en -1 cuando n se incrementa en 2. Luego a_n será de la forma $k - \dfrac{n}{2}$. Como $a_1 = 0$,

$$k - \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow k = \frac{1}{2} \Longrightarrow a_n = \frac{1-n}{2}$$

Esto puede plantearse de un modo más general: tanto para n par como impar, los incrementos del valor de a_n son constantes con cada incremento de n, por lo que a_n será de la forma $\alpha\, n + \beta$. Sustituyendo n por sus dos 2 primeros valores, resultan dos ecuaciones con dos incógnitas, que nos dan los valores de α y β.

b) Queremos obtener una expresión de a_n que valga $\forall n$, para lo que usaremos las sucesiones $\{i_n\}$ y $\{p_n\}$ definidas al principio.

- Si multiplicamos por i_n la expresión de a_n para n impar, los términos de la sucesión resultante tomarán el valor correcto para n impar y valdrán 0 en caso contrario.

- Si multiplicamos por p_n la expresión de a_n para n par, los términos de la sucesión resultante tomarán el valor correcto para n par y valdrán 0 en caso contrario.

- Sumando ambas expresiones, el resultado nos dará el valor de a_n $\forall n$.

$$a_n = \left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\frac{1-n}{2} + \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)\frac{n}{2} = \frac{1-n-(-1)^n+(-1)^n n}{4} + \frac{n+(-1)^n n}{4} =$$

$$= \frac{1+(-1)^n(-1+n+n)}{4} = \frac{2n-1}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}$$