Principio de Inducción: ejemplo (19.09.2018)

Queremos demostrar la propiedad siguiente, que llamaremos $P(n)$: "La suma de los n primeros cubos de los naturales es igual al cuadrado de la suma de dichos n números"

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

Para ello aplicamos el Principio de Inducción, es decir:

a) Comprobamos que $P(1)$ es cierta: efectivamente $1^3 = 1^2$, luego se cumple.

b) Suponemos cierta $P(k): \; 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + \cdots + k)^2$.

c) Demostramos $P(k+1): \; 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + k + k + 1)^2$.

Para ello sumamos $(k+1)^3$ a ambos miembros de la igualdad **b)** y operamos en el segundo miembro, teniendo en cuenta la expresión de la suma de k números naturales consecutivos:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3 =$$

$$\left[\frac{(1+k)}{2}\, k\right]^2 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 k^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + k + 1\right] =$$

$$(k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right] = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 = (1 + 2 + \cdots + k + k + 1)^2.$$

Otro enfoque de la demostración (que en este caso supone realizar las mismas operaciones) consiste en escribir el primer miembro de la igualdad **c)** que queremos demostrar y aplicar $P(k)$, sustituyendo la suma de los k primeros cubos por el cuadrado de la suma de los k primeros naturales. Operando como antes, se obtiene la igualdad buscada.

Nota. Se propone resolver el ejercicio realizando la demostración de $P(k+1)$ de derecha a izquierda, partiendo del segundo miembro de la igualdad que se pretende demostrar.