Tema 5

Integración Indefinida

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1 Calcular la integral

$$\int x \ln |x| dx$$

Solución: Resolvemos la integral por partes. Si hacemos $u = \ln |x|$ y $dv = x\ dx$, entonces

$$\begin{aligned} u = \ln |x| \quad &\Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\ dx \\ dv = x\ dx \quad &\Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\ x^2 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int x \ln |x| dx &= \frac{1}{2}\ x^2 \ln |x| - \int \frac{1}{2}\ x^2\ \frac{1}{x}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\ x^2 \ln |x| - \int \frac{x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\ x^2 \ln |x| - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

Ejercicio 2 Calcular la integral

$$\int \arctan x\ dx$$

Solución: Como en el ejercicio anterior, esta integral se resuelve por partes. Haciendo $u = \arctan x$ y $dv = dx$, obtenemos

$$\begin{aligned} u = \arctan x \quad &\Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}\ dx \\ dv = dx \quad &\Rightarrow \quad v = x \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}\int \arctan x\ dx &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\ dx\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C\end{aligned}$$

Nota: La integral $\int x/(1+x^2)\ dx$ se calcula de forma inmediata derivando $\ln|1+x^2|$ o bien mediante el método de cambio de variable, de modo que si hacemos $w = 1+x^2$, entonces $dw = 2x\ dx$ y, por tanto,

$$\int \frac{x}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\ dw = \frac{1}{2}\ln|w| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

Ejercicio 3 Calcular la integral

$$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\ dx$$

Solución: Esta integral podemos resolverla mediante el método de cambio de variable. Si hacemos $u = \operatorname{sen} x$ entonces $du = \cos x\ dx$, y obtenemos

$$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\ dx = \int \frac{du}{1+u} = \ln|1+u| + C = \ln|1+\operatorname{sen} x| + C$$

Ejercicio 4 Calcular la integral

$$\int (\cos^3 x - 2\cos^2 x + 3\cos x - 5)\operatorname{sen} x\ dx$$

Solución: Podemos resolver esta integral por el método de cambio de variable. Haciendo el cambio de variable $t = \cos x$ tenemos $dt = -\operatorname{sen} x\ dx$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\int (\cos^3 x - 2\cos^2 x + 3\cos x - 5)\operatorname{sen} x\ dx &= -\int (t^3 - 2t^2 + 3t - 5)\ dt\\ &= -\left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 5t\right) + C\\ &= -\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{3\cos^2 x}{2} + 5\cos x + C\end{aligned}$$

Ejercicio 5 Comprobar que las funciones

$$f(x) = \ln|x + \sqrt{x^2+1}|, \qquad g(x) = \operatorname{arg\,senh} x$$

se diferencian en una constante.

Solución: De la tabla 5.1 de integrales inmediatas sabemos que

$$f'(x) = g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

por lo que tanto f como g son primitivas de una misma función y, por tanto (véase teorema 5.1.1), se diferencian en una constante.

Ejercicio 6 Calcular la integral

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}\, dx$$

Solución: Es la integral de una función racional, por lo que en primer lugar calculamos las raíces de $x^2-4x+3=0$. Obtenemos que $x=1$ y $x=3$ son las raíces del denominador, así que existen A y B tales que

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

Multiplicando por x^2-4x+3 obtenemos

$$1 = A(x-3) + B(x-1) = (A+B)x + (-3A-B)$$

Por tanto

$$A+B=0, \qquad -3A-B=1$$

y, en consecuencia, $A=-1/2$ y $B=1/2$. Así obtenemos que

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-3)}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-4x+3}\, dx &= -\int \frac{1}{2(x-1)}\, dx + \int \frac{1}{2(x-3)}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C = \ln\sqrt{\frac{x-3}{x-1}} + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 7 Calcular la integral

$$\int x\sqrt{9-2x^2}\;dx$$

Solución: Si hacemos el cambio de variable $u = 9 - 2x^2$, basta con derivar u para obtener $du = -4x\;dx$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{9-2x^2}\;dx &= -\frac{1}{4}\int u^{1/2}\;du = -\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\;u^{3/2}\right] + C\\ &= -\frac{1}{6}(9-2x^2)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Ejercicio 8 Calcular la integral

$$\int \frac{4x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 13x + 12}{3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4}\;dx$$

Solución: Es la integral de una función racional. El primer paso es calcular las raíces de $3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4 = 0$. Aplicando, por ejemplo, el método de Ruffini, observamos que $x = 1$ es raíz doble y $x = 2$ raíz simple, quedando como resto $3x^2 + 2$, por lo que obtenemos que

$$3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4 = (x-1)^2(x-2)(3x^2+2)$$

Sabemos, por tanto, que

$$\begin{aligned}\frac{4x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 13x + 12}{3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4} &= \frac{A}{x-1}\\ + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{3x^2+2}\end{aligned}$$

Multiplicando ahora por $3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4$ obtenemos

$$\begin{aligned}4x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 13x + 12 &= A(x-1)(x-2)(3x^2+2)\\ &+ B(x-2)(3x^2+2) + C(x-1)^2(3x^2+2)\\ &+ (Dx+E)(x-1)^2(x-2)\\ &= (3A + 3C + D)x^4 + (-9A + 3B - 6C - 4D + E)x^3\\ &+ (8A - 6B + 5C + 5D - 4E)x^2 + (-6A + 2B - 4C - 2D + 5E)x\\ &+ (4A - 4B + 2C - 2E)\end{aligned}$$

De esta última ecuación deducimos que las constantes A, B, C, D, E satisfacen el sistema

$$\begin{aligned}
3A+3C+D &= 4\\
-9A+3B-6C-4D+E &= -30\\
8A-6B+5C+5D-4E &= 37\\
-6A+2B-4C-2D+5E &= -13\\
4A-4B+2C-2E &= 12
\end{aligned}$$

Este sistema tiene por solución

$$A=3,\ B=-2,\ C=-3,\ D=4,\ E=1,$$

por lo que sustituyendo en las expresiones anteriores, y teniendo en cuenta las propiedades de la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^4-30x^3+37x^2-13x+12}{3x^5-12x^4+17x^3-14x^2+10x-4}\,dx &= \int \frac{3}{x-1}\,dx\\
-\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{4x+1}{3x^2+2}\,dx & \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Las integrales pendientes son inmediatas y se obtiene

$$\int \frac{3}{x-1}\,dx = 3\ln|x-1|+C,$$

$$-\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = \frac{2}{x-1}+C,$$

$$-\int \frac{3}{x-2}\,dx = -3\ln|x-2|+C,$$

y

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x+1}{3x^2+2}\,dx &= \frac{4}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2}\,dx + \int \frac{1}{3x^2+2}\,dx\\
&= \frac{2}{3}\ln|3x^2+2| + \int \frac{1/2}{(3/2)x^2+1}\,dx\\
&= \frac{2}{3}\ln|3x^2+2| + \frac{1}{2\sqrt{3/2}}\int \frac{\sqrt{3/2}}{(\sqrt{3/2}x)^2+1}\,dx\\
&= \frac{2}{3}\ln|3x^2+2| + \frac{1}{2\sqrt{3/2}}\arctan(\sqrt{3/2}x)+C
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (5.1) y teniendo en cuenta que

$$3\ln|x-1| - 3\ln|x-2| = 3\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$$

obtenemos que

$$\int \frac{4x^4-30x^3+37x^2-13x+12}{3x^5-12x^4+17x^3-14x^2+10x-4}\,dx = 3\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| \\ + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{3}\ln|3x^2+2| + \frac{1}{2\sqrt{3/2}}\arctan(\sqrt{3/2}x) + C$$

Ejercicio 9 Calcular la integral

$$\int \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)(1-\operatorname{sen} x)}\,dx$$

Solución: Para resolver esta integral en primer lugar realizamos el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$. Así tenemos $dt = \cos x\ dx$, por lo que

$$\int \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)(1-\operatorname{sen} x)}\,dx = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1-t)}\,dt$$

Esta última es la integral de una función racional. La escribimos como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{(1+t^2)(1-t)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{1-t}$$

Multiplicando por $(1+t^2)(1-t)$ obtenemos

$$1 = (At+B)(1-t) + C(1+t^2) = (C-A)t^2 + (A-B)t + (B+C)$$

por lo que A, B y C son solución del sistema

$$C - A = 0, \qquad A - B = 0, \qquad B + C = 1$$

cuya solución es

$$A = B = C = 1/2$$

En consecuencia obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(1+t^2)(1-t)}\ dt &= \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{1+t^2}\ dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\ dt\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{2t}{1+t^2}\ dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\ dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\ dt\\ &= \frac{1}{4}\ln|1+t^2| + \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\ln|1-t| + C\end{aligned}$$

Ahora sólo falta deshacer el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, y obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)(1-\operatorname{sen} x)}\ dx &= \frac{1}{4}\ln|1+\operatorname{sen}^2 x|\\ &+ \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2}\ln|1-\operatorname{sen} x| + C\end{aligned}$$

Ejercicio 10 Calcular la integral

$$\int e^x \operatorname{sen} x\ dx$$

Solución: Resolveremos esta integral por partes. Si hacemos $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = e^x\ dx$, entonces

$$\begin{aligned} u = \operatorname{sen} x &\quad\Rightarrow\quad du = \cos x\ dx\\ dv = e^x\ dx &\quad\Rightarrow\quad v = e^x\end{aligned}$$

y por tanto

$$\int e^x \operatorname{sen} x\ dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\ dx \tag{5.2}$$

Aplicando de nuevo la integración por partes en la segunda integral, donde tomamos

$$\begin{aligned} u = \cos x &\quad\Rightarrow\quad du = -\operatorname{sen} x\ dx\\ dv = e^x\ dx &\quad\Rightarrow\quad v = e^x\end{aligned}$$

obtenemos

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\ dx \tag{5.3}$$

Si ahora sustituimos (5.3) en (5.2) obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\ dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\ dx$$

de donde deducimos que

$$2\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + C$$

por lo que finalmente resulta que

$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Ejercicios propuestos

Las soluciones se encuentran al final.

Ejercicio 1 Calcular la integral

$$\int x^2 \ln |x| \; dx$$

Ejercicio 2 Calcular la integral

$$\int x^3 \cos x \; dx$$

Ejercicio 3 Calcular la integral

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \; dx$$

Ejercicio 4 Calcular la integral

$$\int \frac{2x-3}{1+(x^2-3x+4)^2} \; dx$$

Ejercicio 5 Calcular la integral

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}} \; dx$$

Ejercicio 6 Calcular la integral

$$\int \frac{4x^3+14x^2+8x+18}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4} \; dx$$

Ejercicio 7 Calcular la integral

$$\int \frac{3x^7+21x^6+31x^5-47x^4-69x^3+77x^2+35x+77}{x^5+7x^4+10x^3-18x^2-27x+27} \; dx$$

Ejercicio 8 Calcular la integral

$$\int \frac{-28x^4+53x^3+32x^2+36x+21}{(x+5)(3x^2+1)(4x^2+3)} \; dx$$

Ejercicio 9 Calcular la integral

$$\int (\ln x)^4 \ dx$$

Ejercicio 10 Calcular la integral

$$\int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x - 3\tan x + 2} \ dx$$

Soluciones de los ejercicios propuestos:

1. $\displaystyle\int x^2 \ln|x| \ dx = -\frac{x^3}{9} + \frac{x^3 \ln|x|}{3} + C$

2. $\displaystyle\int x^3 \cos x \ dx = x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6x \operatorname{sen} x - 6\cos x + C$

3. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \ dx = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{1+(x^2-3x+4)^2} \ dx = \arctan(x^2-3x+4) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}} \ dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{e^x}{4}\right) + C$

6. $\displaystyle\int \frac{4x^3+14x^2+8x+18}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4} \ dx = 2\ln|x^2+4| + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{4}{x+1} + C$

7. $\displaystyle\int \frac{3x^7+21x^6+31x^5-47x^4-69x^3+77x^2+35x+77}{x^5+7x^4+10x^3-18x^2-27x+27} \ dx = x^3 + x - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x+3)^2} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{-28x^4+53x^3+32x^2+36x+21}{(x+5)(3x^2+1)(4x^2+3)} \ dx = -3\ln|x+5| + \frac{1}{3}\ln|3x^2+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$

9. $\displaystyle\int (\ln x)^4 \ dx = x(\ln x)^4 - 4x(\ln x)^3 + 12x(\ln x)^2 - 24x\ln x + 24x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x+1}{\tan^2 x - 3\tan x + 2} \ dx = \ln\left|\frac{\tan x - 2}{\tan x - 1}\right| + C$