Tema 2

Límites de Funciones

2.1.- Definición de Límite

Idea de límite de una función en un punto:

Sea la función $f(x) = x^2$. Si x tiende a 2, ¿a qué valor se aproxima $f(x)$? Construyendo una tabla de valores próximos a 2, anteriores ($x \to 2^-$) y posteriores ($x \to 2^+$) :

$x \to 2^-$	1.8	1.9	1.99	1.999
$f(x) \to$	3.24	3.61	3.96	3.996

$x \to 2^+$	2.2	2.1	2.01	2.001
$f(x) \to$	4.84	4.41	4.04	4.004

Luego, cuando x se aproxima a 2 tanto por la derecha como por la izquierda, los valores de $f(x)$ se acercan cada vez más a 4. Esta idea se suele expresar así:

$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$ (límite lateral por la izquierda)

$\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$ (límite lateral por la derecha)

Cuando estos límites laterales existen y son iguales se dice que existe el límite en ese punto y se escribe $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$, aunque no está definida en $x_0 = 1$ pueden calcularse los valores que toma la función cerca de ese valor:

x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	**1**	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5
$f(x)$	1.75	2.31	2.71	2.97	2.99	**?**	3.003	3.03	3.31	3.81	4.75

Se observa que a medida que los originales se aproximan a 1, tanto para valores menores como mayores que 1, las imágenes se acercan a 3. Podría decirse que el límite es $l = 3$.

Límites Finitos

Intuitivamente, un número real l es el **Límite Finito** de una función f en un punto x_0 y se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si para los valores de la variable x cercanos al punto x_0 la función f, que no tiene por qué estar definida en x_0, toma valores $f(x)$ que se van aproximando al valor de l. Es decir, l es el límite de f en x_0 si se puede hacer que $|f(x) - l|$ sea "tan pequeño como se quiera" (menor que un ε dado) sin más que hacer $|x - x_0|$ "suficientemente pequeño". Formalmente, se escribirá:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \left[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ /\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon \right]$$

Límites Laterales

Cuando se cumple la definición de límite para valores de x cercanos al punto x_0 pero anteriores a x_0 se hablará del **Límite por la Izquierda** que se denotará por $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$. Es decir: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \left[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ /\ x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon \right]$

Análogamente se hablaría de **Límite por la Derecha** si se cumple la definición de límite para valores de x cercanos al punto x_0 pero posteriores a x_0 , escribiendo:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \left[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ /\ x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon \right]$$

Se deduce de las definiciones, que si coinciden los límites por la izquierda y por la derecha en un punto, la función tiene límite en ese punto. Este resultado proporciona un método práctico para decidir sobre la existencia de un límite.

En el ejemplo anterior, para la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ se observaba, mediante la tabla de valores, que tanto el límite por la izquierda como por la derecha coincidían.

La definición de límite se puede generalizar para hablar de límite infinito de una función en un punto y para hablar de límite en el infinito.

Límites Infinitos

Se dirá que $+\infty$ es límite de una función en el punto x_0 y se escribirá $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si, a medida que nos acercamos al punto x_0 los valores de la función se hacen tan grandes como queramos, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall\, k \in \mathbb{R}^+,\ \exists\, \delta > 0\ /\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > k$$

Se dirá que $-\infty$ es límite de una función en el punto x_0 y se escribirá $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si, a medida que nos acercamos al punto x_0 los valores de la función se hacen tan pequeños como queramos, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \left[\forall\, k \in \mathbb{R}^+,\ \exists\, \delta > 0\ /\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) < -k\right]$$

En general, se dirá que una función tiene límite ∞ (sin precisar el signo) en el punto x_0, y se escribirá $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si los valores absolutos de la función se hacen tan grandes como queramos, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \left[\forall\, k \in \mathbb{R}^+,\ \exists\, \delta > 0\ /\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| > k\right]$$

Cuando f presenta en un punto x_0 un límite infinito, se dirá que la recta de ecuación $x = x_0$ es una ASINTOTA VERTICAL de la gráfica de la función. (Véase Tema 4)

Límites en el Infinito

Se dirá que l el es límite de una función en $+\infty$ y se escribirá $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si se puede hacer que los valores de la función se acerquen a l para valores de x suficientemente grandes, es decir:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \left[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, H \in \mathbb{R}^+\ /\ x \geq H \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon\right]$$

Se dirá que l es el límite de una función en $-\infty$ y se escribirá $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ si se puede hacer que los valores de la función se acerquen a l para valores de x suficientemente pequeños, es decir:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \left[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, H \in \mathbb{R}^+\ /\ x \leq -H \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon\right]$$

Cuando f presenta en un límite l en el infinito, se dirá que la recta de ecuación $y = l$ es una ASINTOTA HORIZONTAL de la gráfica de la función. (Véase Tema 4)

Límites Infinitos en el Infinito

Se dice que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si para cualquier k positivo, se puede encontrar un H positivo tal que $f(x) > k, \ \forall x > H$.

Se dice que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si para cualquier k positivo, se puede encontrar un H positivo tal que $f(x) < -k, \ \forall x > H$.

Se dice que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si para cualquier k positivo, se puede encontrar un H positivo tal que $f(x) > k, \ \forall x < -H$.

Se dice que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si para cualquier k positivo, se puede encontrar un H positivo tal que $f(x) < -k, \ \forall x < -H$.

2.2.- Propiedades y Operaciones

Propiedades:

1.- Si existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ entonces es único.

2.- Si una función f tiene límite finito en un punto, está acotada en un entorno de ese punto. Es decir, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que f está acotada en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

3.- Si una función f tiene límite distinto de cero en un punto, entonces existe un entorno del punto en el que los valores que toma la función tienen el mismo signo que el límite.

4.- Una función comprendida entre otras dos funciones con el mismo límite, también tiene ese límite. Es decir,si f, g, h son tres funciones tales que $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \ (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$, entonces existe el $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

(Un ejemplo práctico de aplicación de esta propiedad se ve en el ejercicio resuelto nº 3).

Operaciones con Límites:

Si existe el $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y existe el $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, entonces:

- existe el $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x)$ y vale $l \pm m$
- existe el $\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x)$ y vale $l \,.\, m$
- existe el $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ y vale $\frac{l}{m}$ siempre que $m \neq 0$
- existe el $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$ y vale l^m
- existe el $\lim_{x \to x_0} \log f(x)$ y vale $\log l$

2.3.-Infinitésimos e Infinitos

Se dirá que una función f es un **Infinitésimo** en un punto x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Desde el punto de vista intuitivo, un infinitésimo es una función que se aproxima a cero tanto como se quiera, sin más que aproximar x al punto x_0.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ es un infinitésimo en el 0 y $f(x) = Lx$ es un infinitésimo en el 1.

Se dirá que una función f es un **Infinito** en un punto x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
Desde el punto de vista intuitivo, un infinito es una función que crece (decrece) tanto como se quiera, sin más que aproximar x al punto x_0.

Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es un infinito en el 0 y la función dada por $f(x) = e^{\frac{1}{(x-2)^2}}$ es un infinito en el 2.

Propiedades:

1.- Si f es un infinitésimo en un punto x_0 y g está acotada en un entorno de x_0, entonces su producto $f\,g$ es es un infinitésimo en x_0.

2.- Si f es un infinito en x_0 y g está acotada en un entorno de x_0, entonces su suma $f+g$ es es un infinito en x_0.

3.- La función f es un infinito en x_0 si y sólo si $\frac{1}{f}$ es un infinitésimo en x_0.

2.4.- Cálculo de Límites Sencillos. Indeterminaciones.

Teniendo en cuenta las propiedades relativas a las operaciones, y dos límites obvios: $\lim_{x \to x_0} k = k$ (k función constante) y $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, puede concluirse que si *P(x)* es un polinomio, $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$. En general, si f es una función continua, también se verifica que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Véase Tema 3).

Al operar algebraicamente con límites se presentan siete casos de indeterminación en los que el límite resultante no queda determinado por los límites de las funciones que intervienen en la operación, sino que depende además de cómo éstas tiendan a sus límites, pudiendo incluso no existir. Se indicarán estas indeterminaciones o límites indeterminados por los símbolos:

$(\infty - \infty)$, $(0 \cdot \infty)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, (1^{∞}), (0^0), (∞^0)

a) Indeterminación $\boxed{\infty - \infty}$:

En gran parte de los casos basta realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1}\right) = \left(\frac{2}{0} - \frac{1}{0}\right) = (\infty - \infty)$. Operando queda:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2-1}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right) = \left(\frac{3}{0}\right) = \infty$$

En otros casos, sobre todo en los que intervienen radicales, basta multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} =$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(x^2 - (x^2-1)\right)}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

b) Indeterminación $\boxed{0 \cdot \infty}$:

En gran parte de los casos basta realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x^2}\right) = (0 \cdot \infty) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$

c) Indeterminación $\boxed{\frac{0}{0}}$:

Cuando solo aparecen funciones racionales, basta descomponer factorialmente el numerador y el denominador.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$

Si intervienen radicales, se multiplica y divide por la expresión radical conjugada.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x\,(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})\,(1 + \sqrt{1-x})}\right) =$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x + x\sqrt{1-x}}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(1 + \sqrt{1-x}\right) = 2$$

d) Indeterminación $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$:

En muchos casos basta dividir el numerador y el denominador por la mayor potencia de la variable *x*, tanto si las expresiones son racionales como radicales.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + x - 1}{x^2 + 1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4 + \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 4$

En el caso más simple que es el de las funciones racionales (cocientes de polinomios) se puede resumir en tres casos:

- Grado del numerador mayor que el del denominador, límite infinito.
- Grado del numerador menor que el del denominador, límite cero.
- Grados iguales, el límite coincide con el cociente de los coeficientes principales.

e) Indeterminaciones $\boxed{\infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty}$:

Para resolver estos límites deberá tenerse en cuenta que $f(x)^{g(x)} = e^{L\left[f(x)^{g(x)}\right]} = e^{g(x)L[f(x)]}$, de donde resulta que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)L[f(x)]}$. Asi se transforma en un producto.

En el caso de la indeterminación $\boxed{1^\infty}$, o sea si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ también es cierto que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)[f(x) - 1]}$

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^{\frac{1 + 3x^2}{x^2}} = (1^\infty) = \lim\limits_{x \to 0} e^{\left(\frac{1 + 3x^2}{x^2}\right)\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2} - 1\right)} =$

$$\lim_{x \to 0} e^{\left(\frac{1 + 3x^2}{x^2}\right)\left(\frac{2x^2}{1 - x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} e^{\left(\frac{2 + 6x^2}{1 - x^2}\right)} = e^2$$

En el tema 4 se estudiará la regla de L´Hôpital-Bernoulli que permitirá, utilizando las derivadas de las funciones que intervienen en el límite, la resolución de cualquiera de los 7 casos de indeterminación.