Apéndice B

Algunas funciones elementales

Ejercicios resueltos

1. Escribe el término en x^5 que aparece al desarrollar $(x+2)^9$.

$(x+2)^9$ es la suma de todos los términos de la forma $\binom{9}{i} x^{9-i} 2^i$ con i entre 0 y 9; x^5 aparece para i=4, y el correspondiente término es

$$\binom{9}{4} x^{9-4} 2^4 = 126 \cdot 16x^5 = 2016x^5$$

2. Calcula la suma de todos los números combinatorios

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{i} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Sabemos que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Si a=b=1 quedará

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}1^1 + \ldots + \binom{n}{n}1^01^n \Rightarrow$$
$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{i} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Luego la suma de los números combinatorios vale 2^n.

3. Halla el dominio de la función $y = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x}$.

Como sabemos que una raíz cuadrada sólo está definida si el radicando es mayor o igual a 0, entonces $y = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x}$ estará definida si

$$y = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-\mathrm{sen}^2 x \geq 0$$

Puesto que $\mathrm{sen}^2 x \leq 1 \; \forall x$, la función dada está definida para todo número real.

4. Halla el dominio de la función $y = \ln(x^2-16)$

Como los logaritmos sólo están definidos para valores positivos de la variable, $y = \ln(x^2-16)$ está definida si y sólo si

$$x^2-16 > 0 \Leftrightarrow x > 4 \text{ ó } x < -4$$

Es decir, para $x \in (-\infty,-4) \cup (4,\infty)$.

5. Hallar $\cos\alpha, \sec\alpha, \mathrm{cosec}\alpha$ y $\mathrm{cotan}\alpha$ si $\alpha = \mathrm{arcsen}(2/3)$.

$\alpha = \mathrm{arcsen}(2/3) \Rightarrow \mathrm{sen}\, x = 2/3$; entonces

$$\cos x = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x} = \sqrt{1-\frac{2}{3}^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$
$$\mathrm{cosec} x = \frac{1}{\mathrm{sen}\, x} = \frac{3}{2}$$

$$\text{cotan}x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

6. Resolver $2^{x-3} = 16$.

Se trata de una ecuación exponencial. Expresamos el segundo miembro como potencia de 2 e igualamos los exponentes.

$$2^{x-3} = 2^4 \Rightarrow x - 3 = 4 \Rightarrow x = 1$$

7. Expresa el logaritmo $\log\left[\frac{x(x+2)}{(x+3)^2}\right]$ como una suma o resta de logaritmos.

$$\log\left[\frac{x(x+2)}{(x+3)^2}\right] = \log[x(x+2)] - \log(x+3)^2 =$$
$$= \log(x) + \log(x+2) - 2\log(x+3)$$

8. Calcular $L = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Cuando $x \to \infty$ su logaritmo neperiano también lo hace, por lo aparece una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que se puede eliminar directamente aplicando la regla de L'Hopital. Para ello derivamos el numerador y denominador,

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

9. Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\text{sen}\, 3x}{1 - 2\cos x}$

Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = \frac{\pi}{3}$ por lo que aparece una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que se puede eliminar aplicando la regla de L´Hopital.

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{(\text{sen }3x)'}{(1-2\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3\cos 3x}{0-2(-\text{sen}x)}=$$

$$=\frac{3\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)}{2\text{sen}\frac{\pi}{3}}=\frac{3\cos\pi}{2\text{sen}\frac{\pi}{3}}=\frac{-3}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\sqrt{3}$$

10. Demostrar las siguientes relaciones:

a) $\text{senh}\,x+\cosh x=e^{x}$.

$$\text{senh}\,x+\cosh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=e^{x}$$

b) $\cosh^{2}x-\text{senh}^{2}x=1$

$$\text{senh}\,x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\Rightarrow\text{senh}^{2}(x)=\frac{(e^{x})^{2}+(e^{-x})^{2}-2e^{x}e^{-x}}{4}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}$$

$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\Rightarrow\cosh^{2}(x)=\frac{(e^{x})^{2}+(e^{-x})^{2}+2e^{x}e^{-x}}{4}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}$$

Entonces

$$\cosh^{2}x-\text{senh}^{2}x=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}-\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}=1$$

Ejercicios propuestos (las soluciones se encuentran al final)

1. Sin calcular los números combinatorios, encuentra los x que hacen que se cumplan.

a) $\binom{9}{4}+\binom{9}{3}=\binom{y}{x}$

b) $\binom{y}{x}+\binom{y}{x+1}=\binom{14}{6}$

2. Encuentra a y b para que la gráfica de la función $f(x)=x^3+ax+b$ pase por los puntos (1, 1) y $(-1, 1)$.

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^3+x^2+x+1)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^2-1}$

4. Encuentra el recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2-2x+4$

b) $g(x)=x^2-2\sqrt{2}x+2$

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}}{2^x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{2x}+x^2}{x3^x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3 x^2}{\log_2 x}$

6. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\dfrac{2x}{2-x}$

b) $g(x)=\log_2 e^{3x}$

7. Resolver $5^{2x-9} = 625$.

8. Resolver $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2-x} = 2^{x^2}$.

9. Resolver $\ln(3x+4) - \ln(2-5x) = 2\ln 5$.

10. Resolver $\log_{10}(x^2 + x + 44) = 2$

11. Usando las propiedades de los logaritmos, simplifica las siguientes expresiones.

a) $\frac{1}{2}\ln(4t^4) - \ln 2$

b) $3\ln\sqrt[3]{t^2-1} - \ln(t+1)$

c) $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right)$

12. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

b) $\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}$

13. Sabiendo que $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y que $\alpha = \operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{5}\right)$, halla $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ y $\operatorname{cosec}\alpha$.

14. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

15. Dado $\operatorname{senh} x = 4/3$ halla los valores del coseno y la tangente hiperbólicas.

Soluciones a los ejercicios propuestos

1. a) $x = 4 \quad y = 10$
   b) $x = 5 \quad y = 13$

2. $a = -1 \quad b = 1$
3. a) $-\infty$
   b) $5/2$

4. a) $[4, +\infty)$
   b) $[0, +\infty)$

5. a) ∞
   b) ∞
   c) $\dfrac{\ln 4}{\ln 3}$

6. a) $(0, 2)$
   b) $(-\infty, +\infty)$

7. $x = 13/2$

8. $x_1 = 2/3 \qquad x_2 = -1$

9. $x = 23/64$

10. $x_1 = 7 \qquad x_2 = -8$

11. a) $2\ln t$
    b) $\ln(t-1)$
    c) $\ln(x-3)$

12. Ambas existen en todo $\mathbb{R}$ excepto el conjunto de puntos en que se anula el sen x, que es $\{ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$

13. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \qquad \tan\alpha = -2 \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

14. 1/6

15. $\cosh x = \dfrac{5}{3}; \quad \tanh x = \dfrac{4}{5}$