Apéndice A

Sucesiones de números reales

Ejercicios resueltos

1. ¿Está la sucesión de término general $a_n = \frac{3n-5}{n+1}$ acotada?

Una cota inferior es –1, pues

$$-1 \le \frac{3n-5}{n+1} \Leftrightarrow -n-1 \le 3n-5 \Leftrightarrow 4 \le 4n$$

lo cual se cumple cualquiera que sea el número natural *n*.

Una cota superior es 3, pues

$$\frac{3n-5}{n+1} \le 3 \Leftrightarrow 3n-5 \le 3n+3 \Leftrightarrow -5 \le 3$$

La sucesión tiene cota inferior y superior, por lo que está acotada.

2. Hallar el término general, el límite (si lo tiene) y clasificar la siguiente sucesión:

$$\frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{10}{13}, \frac{13}{17} \ldots$$

En el numerador vemos que la diferencia *d* entre dos términos es 3, por tanto se trata de una progresión aritmética de la forma

$a_n = a_1 + (n-1)\,3$. Como $a_1 = 4$, el término general del numerador será $a_n = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$.
Siguiendo el mismo razonamiento para el denominador obtenemos $b_n = 4n + 1$.
Entonces la sucesión considerada tiene como término general:

$$c_n = \frac{3n+1}{4n+1}$$

Su límite será:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+1/n}{4+1/n} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4}$$

La sucesión es convergente de límite $\frac{3}{4}$.

3. Hallar, para la sucesión

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8} \ldots$$

a) El término que ocupa el lugar 123; b) su límite y c) el término de la sucesión a partir del cual la diferencia con el límite es, en valor absoluto, menor que 1/100.

a) El término general es $a_n = \frac{2n+1}{2n}$, por tanto el que ocupa el lugar 123 será:

$$a_{123} = \frac{2\cdot(123)+1}{2\cdot(123)} = \frac{247}{246}$$

b) Para calcular el límite dividimos primero los dos sumandos del numerador entre el denominador

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + 0 = 1$$

c) Imponemos la condición:

$$|a_n - 1| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{2n} - 1\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{1}{2n}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2n > 100 \Rightarrow n > 50$$

Por tanto a partir de a_{50}, la diferencia con el límite es menor que 1/100.

4. Calcula $L = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2\text{-}2n\text{-}5}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{3n^2\text{-}2n\text{-}5}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 3$$

5. Hallar el $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ sabiendo que $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$ y $b_n = \frac{5n}{n+1}$.

Calculamos primero los límites de a_n y b_n. En ambos casos tenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ por lo que dividiendo numerador y denominador por la potencia máxima de *n* que haya en el denominador se simplifica la expresión.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{1 + \frac{1}{n}}\right) = 5$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$, aplicando las propiedades de los límites se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{5}$.

6. Calcula $L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n+2}\right)^{\frac{2n+1}{n}}$.

Tenemos un cociente de polinomios elevado a otro, cada uno de los cuales produce una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Calculamos por separado los límites de la base y del exponente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1+\frac{2}{n}}\right)=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$$

Por las propiedades de los límites, L será igual a $3^2=9$.

7. Calcula $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$.

Aparece una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Multiplicamos y dividimos por la expresión radical conjugada:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+3}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+3}+n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3-n^2}{\sqrt{n^2+3}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n}=0$$

8. Calcula $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2\text{-}3n+2}-n\right)$.

Como en en ejercicio anterior, multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2\text{-}3n+2}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2\text{-}3n+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2\text{-}3n+2}+n\right)}{\sqrt{n^2\text{-}3n+2}+n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\text{-}3n+2-n^2}{\sqrt{n^2\text{-}3n+2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n+2}{\sqrt{n^2\text{-}3n+2}+n}$$

Hemos obtenido una expresión indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Dividimos numerador y denominador entre n y tomamos límites:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{-3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1} = \frac{-3+0}{\sqrt{1-0+0}+1} = -\frac{3}{2}$$

9. Hallar el límite de la sucesión cuyo término general es $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^2}$.

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^2} \Rightarrow a_n = \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \Rightarrow a_n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2/2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right]^2$$

Dentro del corchete nos queda una expresión de la forma $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, que tiende al número e cuando $m \to \infty$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2/2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right]^2 = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2/2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right]^2 = e^2$$

10. Sabiendo que la diferencia en una progresión aritmética es -3 y el término vigésimo vale -18, halla el primer término y la suma de los 20 primeros.

Despejando en la fórmula del término general con $n = 20$ obtenemos:

$$a_{20} = a_1 + 19d \Rightarrow -18 = a_1 + 19\cdot(-3) \Rightarrow a_1 = 39$$

La suma de los 20 primeros será:

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}20 = (39-18)10 = 210$$

11. Una rana quiere cruzar un charco de 2 metros. La rana es capaz de saltar 1 metro en el primer salto, pero se va cansando por lo que cada salto es más pequeño que el anterior, según la relación $L_{n+1} = L_n\, r$, siendo $r < 1$. Si en el

cuarto salto avanza 1/8, averigua la razón y si la rana conseguirá llegar a la otra orilla.

Despejamos la razón de la fórmula del término general

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow \frac{1}{8} = 1 \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Para obtener la distancia máxima que la rana es capaz de recorrer saltando, calculamos la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente, de razón $r = 1/2$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Por tanto la rana no consigue cruzar el charco, pues necesitaría un tiempo infinito.

Ejercicios propuestos (las soluciones se encuentran al final)

1. Halla el término general de las siguientes sucesiones.

a) $\frac{5}{3}, \frac{10}{9}, \frac{20}{27}, \frac{40}{81} \ldots$
b) $2, 5, 10, 17, 26, 37 \ldots$
c) $1, -3, 5, -7, 9$

2. Determina si las siguientes sucesiones están acotadas.

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$
b) $b_n = \dfrac{1-n}{5n}$
c) $c_n = \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n$

3. En la sucesión de término general $a_n = \dfrac{6n-2}{2n-1}$, halla un término a partir del cual los siguientes disten de 3 menos de una milésima.

4. Definimos la sucesión cuyo término general tiene la siguiente expresión:

$$a_n = \begin{cases} n+2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{1}{n+2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

¿Es una sucesión monótona? ¿Converge?

5. Dadas las sucesiones cuyos términos generales son $a_n = n^2 + 3$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ y $c_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - c_n)$
c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c_n)$
d) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - c_n)$
e) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$
f) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n / c_n)$

6. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+n^2}{n+1}\right)^{\frac{n+5}{n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n^2+3}{2n^2-7}}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2+2\right)^{-7n+55}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-75n^2+1}{400n^2+3n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+7n}-\sqrt{n^2+n}\right)$

7. Demuestra que la sucesión $\dfrac{4n^2+1}{7n^2-3}$ tiene por límite $\dfrac{4}{7}$.

8. Comprueba que las sucesiones de término general $a_n = (-1)^n + 1$ y $b_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ carecen de límite.

9. Halla el límite de las siguientes sucesiones cuando *n* tiende a infinito.

a) $a_n = \left(\dfrac{3n+2}{3n+1}\right)^{3n}$

b) $b_n = \left(\dfrac{n+7}{n}\right)^{n}$

10. En una progresión aritmética el primer término es 7, el último es –15 y la suma –48. Calcula la diferencia y el número de términos de la progresión.

11. Halla los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética.

12. Calcula la diferencia de una progresión aritmética en la que el tercer término es –4 y la suma de los ocho primeros es 24.

13. Calcula la razón de una progresión geométrica si se conocen $a_1 = 3$ y $a_4 = \dfrac{1}{243}$.

14. Halla el primer término y la razón de una progresión geométrica, sabiendo que el tercer término es -1 y el sexto es $\frac{1}{27}$.

15. Halla la suma de los términos de la progresión ilimitada siguiente.

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \ldots$$

Soluciones a los ejercicios propuestos

1.

a) $\frac{5\cdot 2^{n-1}}{3^n}$ b) n^2+1 c) $(-1)^{n-1}(2n-1)$

2.

a) Sí; por ejemplo entre 1 y 2.
b) Sí; por ejemplo entre 0 y –1/5.
c) Sí; por ejemplo ente –2/3 y 4/9.

3. A partir de a_{501}, inclusive.

4. No. No.

5.

a) ∞ b) ∞ c) ∞ d) $-\infty$ e) 1 f) 0

6.

a) 1 b) $1/\sqrt[3]{2}$ c) ∞ d) ∞ e) 0 f) 3

7. Para cualquier $\varepsilon > 0$ basta con tomar $n > \sqrt{\frac{19+21\varepsilon}{49\varepsilon}}$.

8.

a) $\{a_n\} = 0,2,0,2,0...$ b) $\{a_n\} = 0,1,0,1,0...$

9.

a) e b) e^7

10. $n = 12,\ d = -2$.

11. $\alpha = 30^{\circ}, \beta = 60^{\circ}, \gamma = 90^{\circ}$.

12. $d = 14/3$.

13. $r = 1/9$.

14. $a_1 = -9;\quad r = -1/3$.

15. S= $3/2$.