Apéndice A

Sucesiones de Números Reales

A.1. Definiciones

Una **sucesión** de números reales es una correspondencia A que asocia, a cada número natural $n \in \mathbb{N}$, un número real $a_n \in \mathbb{R}$

$$A(n) = a_n$$

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, contiene infinitos elementos en un cierto orden, por lo que mediante esta correspondencia obtenemos conjuntos ordenados de infinitos números reales.

$$A(\mathbb{N}) = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

A los números naturales que indican la posición de cada elemento, se les llama **índices** y a los números reales, **términos** de la sucesión.

A la expresión que nos indica el valor de cada término en función de su índice se le llama **término general**.

Ejemplo: Calculamos los primeros términos de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{3n}{4n+2}$$

Los tres primeros términos serán:

$$a_1 = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 1+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ ;\ a_2 = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 2+2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}\ ;\ a_3 = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3+2} = \frac{9}{14}$$

En algunas sucesiones los términos se acercan paulatinamente a un cierto número real, del que llegan a estar tan próximos como se quiera. Dicho número, que definiremos a continuación, recibe el nombre de límite de la sucesión.

A.2. Límite de una sucesión. Sucesiones convergentes

Una sucesión de números reales $\{a_n\}$ tiene por **límite** el número real *a*, cuando para todo número real positivo ε existe un número natural *n*, tal que para todo $m \geq n$ se verifica que $|a_m - a| < \varepsilon$. Escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n \in \mathbb{N} / \ \ |a_m - a| < \varepsilon \ \ \forall m \geq n$$

Diremos también que la sucesión tiende hacia *a*. No importa que haya términos mayores o menores que el límite *a*, lo que debe ocurrir es que a partir de un índice *m* las diferencias entre los términos sucesivos y el límite sean menores que cualquier valor previamente fijado ε.

Una **propiedad** importante que se deduce de la definición que acabamos de dar es la siguiente: si una sucesión tiene límite este es único.

A las sucesiones con límite se les llama **convergentes**.

Ejemplo: Comprobamos que tiene límite 1 la sucesión de término general

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

Efectivamente

$$\left|\frac{m+1}{m} - 1\right| = \left|\frac{m+1-m}{m}\right| = \left|\frac{1}{m}\right|$$

$$\left|\frac{1}{m}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow m > \frac{1}{\varepsilon}$$

Para que se cumpla la condición de límite basta tomar $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

La sucesión de números reales (a_n) tiene **límite infinito** si para cualquier valor que fijemos A se puede conseguir que todos los términos a partir de uno dado sea mayores que A, sin más que dar valores a n tan grandes como sea necesario. Escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} / \;\; a_m > A \;\; \forall m \geq n$$

Diremos también que la sucesión tiende a infinito.

A.3. Sucesiones monótonas y acotadas

A.3.1. Sucesiones monótonas.

Una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona creciente** cuando cada término es mayor o igual que el anterior, es decir

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De la misma forma, una sucesión será **monótona decreciente** cuando cada término es menor o igual que el anterior, es decir

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una sucesión $\{a_n\}$ es **estrictamente creciente** si es monótona creciente y todos sus términos son distintos, es decir

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Es **estrictamente decreciente** cuando es monótona decreciente y todos sus términos son distintos, es decir

$$a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A.3.2. Sucesiones acotadas.

Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada superiormente** si todos los términos son menores o iguales que un número real k, es decir

$$a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A k se le llama **cota superior** de la sucesión. Cualquier número real mayor que k es también cota superior de la sucesión.

Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada inferiormente** si todos los términos son mayores o iguales que un número real h, es decir

$$a_n \leq h \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A h se le llama **cota inferior** de la sucesión. Cualquier número real menor que h es también cota inferior de la sucesión.

Se dice que una sucesión está acotada si tiene cota superior e inferior.

Ejemplos:

a) Sucesión monótona creciente:

$$a_n = \frac{2n}{n+1} \qquad \{a_n\} = 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \ldots$$

b) Sucesión monótona decreciente:

$$a_n = \frac{n+1}{n} \qquad \{a_n\} = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots$$

c) Sucesión acotada superiormente

$$a_n = -4n + 3 \qquad \{a_n\} = -1, -5, -9, \ldots$$

La sucesión está acotada superiormente pues –1 es una cota superior.

d) Sucesión acotada inferiormente

$$a_n = 2n \qquad \{a_n\} = 2, 4, 6, \ldots$$

La sucesión está acotada inferiormente pues 2 es una cota inferior.

A.3.3. Una sucesión monótona y acotada: el número *e*.

Un ejemplo de particular interés lo constituye la sucesión de término general

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Sus primeros términos son

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \frac{7776}{3125}, \ldots$$

Esta sucesión es estrictamente creciente y está acotada superiormente. Tiene como límite un número irracional, conocido como e, cuyas primeras cifras son

$$e = 2.71828182845904\ldots$$

El número *e* es la base de los logaritmos neperianos.

A.4. Operaciones con límites. Cálculo de límites

A.4.1. Operaciones. Si a_n y b_n son dos sucesiones que tienen límite finito

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a; \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

se verifica que:

a) El límite de la suma es la suma de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$

b) El límite de la sucesión opuesta es el opuesto del límite de la sucesión:

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -a$$

c) El límite de la diferencia es la diferencia de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$$

d) Producto por *k*: El límite de $k \cdot a_n$ es el producto de *k* por el límite de a_n :

$$\lim_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

e) El límite del producto es el producto de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

f) El límite de la inversa es el inverso del límite (siempre que éste no sea nulo):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}, \quad b \neq 0$$

g) El límite del cociente es el cociente de los límites (siempre que el del denominador no sea nulo):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

h) El límite de la potencia de exponente b_n es la potencia b del límite, siempre que éste sea positivo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n{}^{b_n}\right) = a^{b}, \quad a > 0$$

i) El límite del valor absoluto es el valor absoluto del límite

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$$

Ejemplo: Hallar el $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ sabiendo que $a_n = 1+\dfrac{2}{n}$ y $b_n = 7-\dfrac{5}{2n}$.

Calculamos primero los límites de a_n y b_n

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) = 1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right) = 1+0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{5}{2n}\right) = 7-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2n}\right) = 7-0 = 7$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 7,$ aplicando las propiedades de los límites, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{7}$.

A.4.2. Indeterminaciones. En el calculo de limites de sucesiones son frecuentes las **indeterminaciones**, es decir que la expresión tome una forma indeterminada de uno de los tipos siguientes.

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$	1^{∞}	∞^{0}	0^{0}

Forma de actuar en algunos casos particulares:

a) Cociente de polinomios: Suele dar lugar a una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso la indeterminación desaparece dividiendo numerador y denominador por la potencia máxima de *n* que haya en el denominador.

b) Radicales: La diferencia de radicales puede dar lugar a una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. En este caso, para resolverla hay que multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

A.5. Progresión aritmética y geométrica

A.5.1. Progresión aritmética.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene sumando un número fijo al anterior. A dicho número se le llama **diferencia** de la progresión aritmética y se designa con la letra *d*.

Para calcular un término cualquiera de la progresión aritmética utilizamos el **término general**

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

y sustituyendo *n* por el índice del término que queremos determinar obtenemos el valor de ese término.

La resta de dos términos de una misma progresión aritmética es igual a la resta de sus índices multiplicado por la diferencia *d*. Por la tanto conociendo dos términos de una progresión aritmética conocemos también la diferencia *d*.

$$d = \frac{a_q - a_p}{q - p}$$

La suma de los *k* primeros términos de una progresión aritmética coincide con el producto del número *k* de términos por la semisuma del primero y el último.

$$S_k = \frac{(a_1 + a_k)}{2} k$$

Ejemplo: Las edades de 6 hermanos forman una progresión aritmética de diferencia 2 años. Si el menor de ellos tiene un año, calcular la suma de sus edades.

La edad del mayor será

$$a_6 = a_1 + (6-1)2 = 11$$

y la suma de las edades de los seis

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6)}{2} 6 = \frac{(1+11)}{2} 6 = 36$$

A.5.2. Progresión geométrica.

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene multiplicando por un número fijo al anterior. A dicho número se le llama **razón** y se designa por la letra *r*.

El **termino general** de una progresión geométrica es

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

y su razón dados dos términos conocidos de la progresión será:

$$r = \sqrt[q-p]{\frac{a_q}{a_p}}$$

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación: Los ciclistas A y B se preparan para una competición. El ciclista A comienza con 1000 metros, y todos los días agrega 1000 metros más, en tanto que el B empieza con 100 metros y cada día duplica lo hecho el día anterior. ¿Cuántos metros recorre cada uno el décimo día?

El ciclista A aumenta el recorrido según una progresión aritmética, es decir

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 1000 + (10-1)\cdot 1000 = 10000$$

En cambio el B aumenta su recorrido según una progresión geométrica, por lo tanto

$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} = 100 \cdot 2^{10-1} = 51200$$

La suma de los *k* primeros términos de una progresión geométrica se calcula mediante la formula siguiente:

$$S_k = \frac{a_k \cdot r - a_1}{r-1}$$

a_1 y a_k son los términos primero y último, respectivamente, y *r* es la razón de la progresión geométrica.

Si lo que queremos es determinar el **límite de la suma** de los términos de una progresión geométrica decreciente ($0 < r < 1$) cuando el número de términos tiende a infinito estudiamos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

Teniendo en cuenta la expresión de a_n y que que $0 < r < 1$, resulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot r^{n-1} = 0$$

y por tanto el límite de S_n pasa a ser

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$