# Apéndice A

# Sucesiones de Números Reales

## A.1. Definiciones

Una **sucesión** de números reales es una correspondencia A que asocia, a cada número natural $n \in \mathbb{N}$, un número real $a_n \in \mathbb{R}$

$$A(n) = a_n$$

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, contiene infinitos elementos en un cierto orden, por lo que mediante esta correspondencia obtenemos conjuntos ordenados de infinitos números reales.

$$A(\mathbb{N}) = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

A los números naturales que indican la posición de cada elemento, se les llama **índices** y a los números reales, **términos** de la sucesión.

A la expresión que nos indica el valor de cada término en función de su índice se le llama **término general**.

**Ejemplo**: Calculamos los primeros términos de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{3n}{4n+2}$$

Los tres primeros términos serán:

$$a_1 = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 1+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ ;\ a_2 = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 2+2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}\ ;\ a_3 = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3+2} = \frac{9}{14}$$

En algunas sucesiones los términos se acercan paulatinamente a un cierto número real, del que llegan a estar tan próximos como se quiera. Dicho número, que definiremos a continuación, recibe el nombre de límite de la sucesión.

## A.2. Límite de una sucesión. Sucesiones convergentes

Una sucesión de números reales $\{a_n\}$ tiene por **límite** el número real *a*, cuando para todo número real positivo $\varepsilon$ existe un número natural *n*, tal que para todo $m \geq n$ se verifica que $|a_m - a| < \varepsilon$. Escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N} /\ \ |a_m - a| < \varepsilon\ \ \forall m \geq n$$

Diremos también que la sucesión tiende hacia *a*. No importa que haya términos mayores o menores que el límite *a*, lo que debe ocurrir es que a partir de un índice *m* las diferencias entre los términos sucesivos y el límite sean menores que cualquier valor previamente fijado $\varepsilon$.

Una **propiedad** importante que se deduce de la definición que acabamos de dar es la siguiente: si una sucesión tiene límite este es único.

A las sucesiones con límite se les llama **convergentes**.

**Ejemplo**: Comprobamos que tiene límite 1 la sucesión de término general

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

Efectivamente

$$\left|\frac{m+1}{m} - 1\right| = \left|\frac{m+1-m}{m}\right| = \left|\frac{1}{m}\right|$$

$$\left|\frac{1}{m}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow m > \frac{1}{\varepsilon}$$

Para que se cumpla la condición de límite basta tomar $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

La sucesión de números reales $(a_n)$ tiene **límite infinito** si para cualquier valor que fijemos *A* se puede conseguir que todos los términos a partir de uno dado sea mayores que *A*, sin más que dar valores a *n* tan grandes como sea necesario. Escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0 \ \ \exists n \in \mathbb{N} / \ \ a_m > A \ \ \forall m \geq n$$

Diremos también que la sucesión tiende a infinito.

# A.3. Sucesiones monótonas y acotadas

### A.3.1. Sucesiones monótonas.

Una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona creciente** cuando cada término es mayor o igual que el anterior, es decir

$$a_n \leq a_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

De la misma forma, una sucesión será **monótona decreciente** cuando cada término es menor o igual que el anterior, es decir

$$a_n \geq a_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Una sucesión $\{a_n\}$ es **estrictamente creciente** si es monótona creciente y todos sus términos son distintos, es decir

$$a_n < a_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Es **estrictamente decreciente** cuando es monótona decreciente y todos sus términos son distintos, es decir

$$a_n > a_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

### A.3.2. Sucesiones acotadas.

Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada superiormente** si todos los términos son menores o iguales que un número real *k*, es decir

$$a_n \leq k \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

A $k$ se le llama **cota superior** de la sucesión. Cualquier número real mayor que $k$ es también cota superior de la sucesión.

Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada inferiormente** si todos los términos son mayores o iguales que un número real $h$, es decir

$$a_n \leq h \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A $h$ se le llama **cota inferior** de la sucesión. Cualquier número real menor que $h$ es también cota inferior de la sucesión.

Se dice que una sucesión está acotada si tiene cota superior e inferior.

**Ejemplos**:

a) Sucesión monótona creciente:

$$a_n = \frac{2n}{n+1} \qquad \{a_n\} = 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \ldots$$

b) Sucesión monótona decreciente:

$$a_n = \frac{n+1}{n} \qquad \{a_n\} = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots$$

c) Sucesión acotada superiormente

$$a_n = -4n+3 \qquad \{a_n\} = -1, -5\,, -9, \ldots$$

La sucesión está acotada superiormente pues –1 es una cota superior.

d) Sucesión acotada inferiormente

$$a_n = 2n \qquad \{a_n\} = 2, 4\,, 6, \ldots$$

La sucesión está acotada inferiormente pues 2 es una cota inferior.

### A.3.3. Una sucesión monótona y acotada: el número *e*.

Un ejemplo de particular interés lo constituye la sucesión de término general

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Sus primeros términos son

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \frac{7776}{3125}, \ldots$$

Esta sucesión es estrictamente creciente y está acotada superiormente. Tiene como límite un número irracional, conocido como $e$, cuyas primeras cifras son

$$e = 2.71828182845904\ldots$$

El número $e$ es la base de los logaritmos neperianos.

## A.4. Operaciones con límites. Cálculo de límites

**A.4.1. Operaciones**. Si $a_n$ y $b_n$ son dos sucesiones que tienen límite finito

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a; \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

se verifica que:

a) El límite de la suma es la suma de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$

b) El límite de la sucesión opuesta es el opuesto del límite de la sucesión:

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -a$$

c) El límite de la diferencia es la diferencia de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$$

d) Producto por $k$: El límite de $k \cdot a_n$ es el producto de $k$ por el límite de $a_n$ :

$$\lim_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

e) El límite del producto es el producto de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = a \cdot b$$

f) El límite de la inversa es el inverso del límite (siempre que éste no sea nulo):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}, \quad b \neq 0$$

g) El límite del cociente es el cociente de los límites (siempre que el del denominador no sea nulo):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

h) El límite de la potencia de exponente $b_n$ es la potencia $b$ del límite, siempre que éste sea positivo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{\,b_n}\right) = a^{\,b}, \quad a > 0$$

i) El límite del valor absoluto es el valor absoluto del límite

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$$

**Ejemplo**: Hallar el $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ sabiendo que $a_n = 1+\frac{2}{n}$ y $b_n = 7-\frac{5}{2n}$.

Calculamos primero los límites de $a_n$ y $b_n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) = 1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right) = 1+0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{5}{2n}\right) = 7-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2n}\right) = 7-0 = 7$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 7,$ aplicando las propiedades de los límites, se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{7}$.

**A.4.2. Indeterminaciones.** En el calculo de limites de sucesiones son frecuentes las **indeterminaciones**, es decir que la expresión tome una forma indeterminada de uno de los tipos siguientes.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{0}{0}$ | $\frac{\infty}{\infty}$ | $0 \cdot \infty$ | $\infty - \infty$ | $1^{\infty}$ | $\infty^{0}$ | $0^{0}$ |

Forma de actuar en algunos casos particulares:

a) Cociente de polinomios: Suele dar lugar a una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso la indeterminación desaparece dividiendo numerador y denominador por la potencia máxima de $n$ que haya en el denominador.

b) Radicales: La diferencia de radicales puede dar lugar a una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. En este caso, para resolverla hay que multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

## A.5. Progresión aritmética y geométrica

### A.5.1. Progresión aritmética.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene sumando un número fijo al anterior. A dicho número se le llama **diferencia** de la progresión aritmética y se designa con la letra *d*.

Para calcular un término cualquiera de la progresión aritmética utilizamos el **término general**

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

y sustituyendo $n$ por el índice del término que queremos determinar obtenemos el valor de ese término.

La resta de dos términos de una misma progresión aritmética es igual a la resta de sus índices multiplicado por la diferencia *d*. Por la tanto conociendo dos términos de una progresión aritmética conocemos también la diferencia *d*.

$$d = \frac{a_q - a_p}{q - p}$$

**La suma de los *k* primeros términos** de una progresión aritmética coincide con el producto del número *k* de términos por la semisuma del primero y el último.

$$S_k = \frac{(a_1 + a_k)}{2} k$$

**Ejemplo**: Las edades de 6 hermanos forman una progresión aritmética de diferencia 2 años. Si el menor de ellos tiene un año, calcular la suma de sus edades.

La edad del mayor será

$$a_6 = a_1 + (6-1)2 = 11$$

y la suma de las edades de los seis

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6)}{2} 6 = \frac{(1+11)}{2} 6 = 36$$

**A.5.2. Progresión geométrica.**

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene multiplicando por un número fijo al anterior. A dicho número se le llama **razón** y se designa por la letra *r*.

El **termino general** de una progresión geométrica es

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

y su razón dados dos términos conocidos de la progresión será:

$$r = \sqrt[q-p]{\frac{a_q}{a_p}}$$

**Ejemplo**: Consideremos la siguiente situación: Los ciclistas A y B se preparan para una competición. El ciclista A comienza con 1000 metros, y todos los días agrega 1000 metros más, en tanto que el B empieza con 100 metros y cada día duplica lo hecho el día anterior. ¿Cuántos metros recorre cada uno el décimo día?

El ciclista A aumenta el recorrido según una progresión aritmética, es decir

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 1000 + (10-1)\cdot 1000 = 10000$$

En cambio el B aumenta su recorrido según una progresión geométrica, por lo tanto

$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} = 100 \cdot 2^{10-1} = 51200$$

**La suma de los *k* primeros términos** de una progresión geométrica se calcula mediante la formula siguiente:

$$S_k = \frac{a_k \cdot r - a_1}{r-1}$$

$a_1$ y $a_k$ son los términos primero y último, respectivamente, y *r* es la razón de la progresión geométrica.

Si lo que queremos es determinar el **límite de la suma** de los términos de una progresión geométrica decreciente ($0 < r < 1$) cuando el número de términos tiende a infinito estudiamos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

Teniendo en cuenta la expresión de $a_n$ y que que $0 < r < 1$, resulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot r^{n-1} = 0$$

y por tanto el límite de $S_n$ pasa a ser

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

# Apéndice A

# Sucesiones de números reales

## Ejercicios resueltos

1. ¿Está la sucesión de término general $a_n = \dfrac{3n-5}{n+1}$ acotada?

Una cota inferior es –1, pues

$$-1 \le \frac{3n-5}{n+1} \Leftrightarrow -n-1 \le 3n-5 \Leftrightarrow 4 \le 4n$$

lo cual se cumple cualquiera que sea el número natural *n*.

Una cota superior es 3, pues

$$\frac{3n-5}{n+1} \le 3 \Leftrightarrow 3n-5 \le 3n+3 \Leftrightarrow -5 \le 3$$

La sucesión tiene cota inferior y superior, por lo que está acotada.

2. Hallar el término general, el límite (si lo tiene) y clasificar la siguiente sucesión:

$$\frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{10}{13}, \frac{13}{17} \ldots$$

En el numerador vemos que la diferencia *d* entre dos términos es 3, por tanto se trata de una progresión aritmética de la forma

$a_n = a_1 + (n-1)\,3$. Como $a_1 = 4$, el término general del numerador será $a_n = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$.
Siguiendo el mismo razonamiento para el denominador obtenemos $b_n = 4n + 1$.
Entonces la sucesión considerada tiene como término general:

$$c_n = \frac{3n+1}{4n+1}$$

Su límite será:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+1/n}{4+1/n} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4}$$

La sucesión es convergente de límite $\frac{3}{4}$.

3. Hallar, para la sucesión

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8} \ldots$$

a) El término que ocupa el lugar 123; b) su límite y c) el término de la sucesión a partir del cual la diferencia con el límite es, en valor absoluto, menor que 1/100.

a) El término general es $a_n = \frac{2n+1}{2n}$, por tanto el que ocupa el lugar 123 será:

$$a_{123} = \frac{2\cdot(123)+1}{2\cdot(123)} = \frac{247}{246}$$

b) Para calcular el límite dividimos primero los dos sumandos del numerador entre el denominador

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + 0 = 1$$

c) Imponemos la condición:

$$|a_n - 1| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{2n} - 1\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{1}{2n}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2n > 100 \Rightarrow n > 50$$

Por tanto a partir de $a_{50}$, la diferencia con el límite es menor que 1/100.

4. Calcula $L = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2\text{-}2n\text{-}5}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{3n^2\text{-}2n\text{-}5}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 3$$

5. Hallar el $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ sabiendo que $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$ y $b_n = \frac{5n}{n+1}$.

Calculamos primero los límites de $a_n$ y $b_n$. En ambos casos tenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ por lo que dividiendo numerador y denominador por la potencia máxima de *n* que haya en el denominador se simplifica la expresión.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{1 + \frac{1}{n}}\right) = 5$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$, aplicando las propiedades de los límites se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{5}$.

6. Calcula $L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n+2}\right)^{\frac{2n+1}{n}}$.

Tenemos un cociente de polinomios elevado a otro, cada uno de los cuales produce una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Calculamos por separado los límites de la base y del exponente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1+\frac{2}{n}}\right)=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$$

Por las propiedades de los límites, $L$ será igual a $3^2=9$.

7. Calcula $L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$.

Aparece una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Multiplicamos y dividimos por la expresión radical conjugada:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+3}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+3}+n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3-n^2}{\sqrt{n^2+3}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n}=0$$

8. Calcula $L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2\text{-}3n+2}-n\right)$.

Como en en ejercicio anterior, multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2\text{-}3n+2}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2\text{-}3n+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2\text{-}3n+2}+n\right)}{\sqrt{n^2\text{-}3n+2}+n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\text{-}3n+2-n^2}{\sqrt{n^2\text{-}3n+2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n+2}{\sqrt{n^2\text{-}3n+2}+n}$$

Hemos obtenido una expresión indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Dividimos numerador y denominador entre $n$ y tomamos límites:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{-3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1} = \frac{-3+0}{\sqrt{1-0+0}+1} = -\frac{3}{2}$$

9. Hallar el límite de la sucesión cuyo término general es $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^2}$.

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^2} \Rightarrow a_n = \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \Rightarrow a_n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2/2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right]^2$$

Dentro del corchete nos queda una expresión de la forma $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, que tiende al número *e* cuando $m \to \infty$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2/2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right]^2 = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2/2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right]^2 = e^2$$

10. Sabiendo que la diferencia en una progresión aritmética es $-3$ y el término vigésimo vale $-18$, halla el primer término y la suma de los 20 primeros.

Despejando en la fórmula del término general con $n = 20$ obtenemos:

$$a_{20} = a_1 + 19d \Rightarrow -18 = a_1 + 19\cdot(-3) \Rightarrow a_1 = 39$$

La suma de los 20 primeros será:

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} 20 = (39-18)10 = 210$$

11. Una rana quiere cruzar un charco de 2 metros. La rana es capaz de saltar 1 metro en el primer salto, pero se va cansando por lo que cada salto es más pequeño que el anterior, según la relación $L_{n+1} = L_n\, r$, siendo $r < 1$. Si en el

cuarto salto avanza 1/8, averigua la razón y si la rana conseguirá llegar a la otra orilla.

Despejamos la razón de la fórmula del término general

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow \frac{1}{8} = 1 \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Para obtener la distancia máxima que la rana es capaz de recorrer saltando, calculamos la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente, de razón $r = 1/2$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Por tanto la rana no consigue cruzar el charco, pues necesitaría un tiempo infinito.

## **Ejercicios propuestos** (las soluciones se encuentran al final)

1. Halla el término general de las siguientes sucesiones.

a) $\frac{5}{3}, \frac{10}{9}, \frac{20}{27}, \frac{40}{81} ...$
b) $2, 5, 10, 17, 26, 37 ...$
c) $1, -3, 5, -7, 9$

2. Determina si las siguientes sucesiones están acotadas.

a) $a_n = \frac{n+1}{n}$
b) $b_n = \frac{1-n}{5n}$
c) $c_n = \left(\frac{-2}{3}\right)^n$

3. En la sucesión de término general $a_n = \frac{6n-2}{2n-1}$, halla un término a partir del cual los siguientes disten de 3 menos de una milésima.

4. Definimos la sucesión cuyo término general tiene la siguiente expresión:

$$a_n = \begin{cases} n+2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{1}{n+2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

¿Es una sucesión monótona? ¿Converge?

5. Dadas las sucesiones cuyos términos generales son $a_n = n^2 + 3$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ y $c_n = \frac{n^2+1}{n}$, calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - c_n)$
c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c_n)$
d) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - c_n)$
e) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$
f) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n / c_n)$

6. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+n^2}{n+1}\right)^{\frac{n+5}{n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n^2+3}{2n^2-7}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2+2\right)^{-7n+55}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-75n^2+1}{400n^2+3n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+7n}-\sqrt{n^2+n}\right)$

7. Demuestra que la sucesión $\dfrac{4n^2+1}{7n^2-3}$ tiene por límite $\dfrac{4}{7}$.

8. Comprueba que las sucesiones de término general $a_n = (-1)^n + 1$ y $b_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ carecen de límite.

9. Halla el límite de las siguientes sucesiones cuando *n* tiende a infinito.

a) $a_n = \left(\dfrac{3n+2}{3n+1}\right)^{3n}$

b) $b_n = \left(\dfrac{n+7}{n}\right)^{n}$

10. En una progresión aritmética el primer término es 7, el último es –15 y la suma –48. Calcula la diferencia y el número de términos de la progresión.

11. Halla los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética.

12. Calcula la diferencia de una progresión aritmética en la que el tercer término es –4 y la suma de los ocho primeros es 24.

13. Calcula la razón de una progresión geométrica si se conocen $a_1 = 3$ y $a_4 = \dfrac{1}{243}$.

14. Halla el primer término y la razón de una progresión geométrica, sabiendo que el tercer término es –1 y el sexto es $\frac{1}{27}$.

15. Halla la suma de los términos de la progresión ilimitada siguiente.

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \ldots$$

# Soluciones a los ejercicios propuestos

1.

a) $\dfrac{5\cdot 2^{n-1}}{3^n}$ b) $n^2+1$ c) $(-1)^{n-1}(2n-1)$

2.

a) Sí; por ejemplo entre 1 y 2.
b) Sí; por ejemplo entre 0 y –1/5.
c) Sí; por ejemplo ente –2/3 y 4/9.

3. A partir de $a_{501}$, inclusive.

4. No. No.

5.

a) $\infty$ b) $\infty$ c) $\infty$ d) $-\infty$ e) 1 f) 0

6.

a) 1 b) $1/\sqrt[3]{2}$ c) $\infty$ d) $\infty$ e) 0 f) 3

7. Para cualquier $\varepsilon > 0$ basta con tomar $n > \sqrt{\dfrac{19+21\varepsilon}{49\varepsilon}}$ .

8.

a) $\{a_n\} = 0,2,0,2,0...$ b) $\{a_n\} = 0,1,0,1,0...$

9.

a) $e$ b) $e^7$

10. $n = 12,\ d = -2$.

11. $\alpha = 30^{\circ}, \beta = 60^{\circ}, \gamma = 90^{\circ}$.

12. $d = 14/3$.

13. $r = 1/9$.

14. $a_1 = -9;\quad r = -1/3$.

15. S= $3/2$.

# Apéndice B

# Algunas funciones elementales

## B.1. Función potencia *n*-ésima

Una función **potencia *n*-ésima** es una función de la forma

$$f(x) = x^n$$

donde la base $x$ es una variable y el exponente $n$ un número natural. Es la forma más sencilla de las funciones polinómicas

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Las funciones potencia *n*-ésima están definidas para todo número real, por lo que su **dominio** es $\mathbb{R}$. Son continuas en todo su dominio.

El **recorrido** de las funciones potencia *n*-ésima será:
-El intervalo $[0,\infty)$ si $n$ es par.
-Todo $\mathbb{R}$ si $n$ es impar.

En una función polinómica $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ el término de mayor grado es el que determina su **comportamiento en el infinito**. Esto se debe a que, si $n > m$, la función $x^n$ crece más rápido que la función $x^m$, para $x > 1$. Su comportamiento en el infinito depende de si $n$ es par o impar y del signo de $a_n$:

$$n \text{ par} \begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

$$n \text{ impar} \begin{cases} \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty & \text{si } a_n > 0 \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Se representan a continuación dos ejemplos de función potencia *n*-ésima.

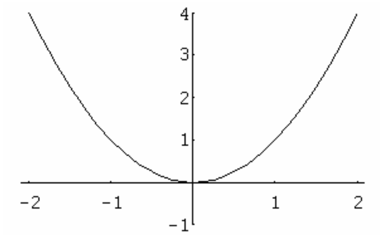


Fig. B.1. Función $y = x^2$

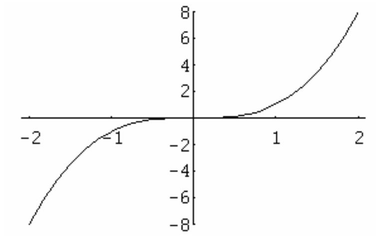


Fig. B.2. Función $y = x^3$

**B.1.1 Binomio de Newton**

Es la potencia *n*-ésima de la suma de dos números reales. Su expresión desarrollada es la siguiente:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Los coeficientes $\binom{n}{m}$ se denominan **números combinatorios** y se calculan del siguiente modo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

**Ejemplo**: $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 15$.

Calculando de la misma forma los demás coeficientes, obtenemos:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a b^5 + \binom{6}{6} b^6 =$$

$$= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

**Propiedades de los números combinatorios**

I. $\binom{n}{0}=1, \quad \binom{n}{n}=1$

II. $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$

III. $\binom{n}{n-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m}$

| |
|---|
| 1 |
| 1 2 1 |
| 1 3 3 1 |
| 1 4 6 4 1 |
| . . . |

Estas tres propiedades se reflejan en el **triángulo de Tartaglia** o de Pascal, formado por los números combinatorios. Vemos que se cumple:

1. Los extremos de cada fila valen 1 (propiedad I).
2. El triángulo es simétrico (propiedad II).
3. Cada número es suma del que tiene encima y el que está a la izquierda de este (propiedad III).

# B.2 Función exponencial. Función logarítmica

Una función **exponencial** es una función de la forma $f(x)=a^x$, donde la base *a* es un número real positivo y el exponente *x* es una variable. En todas las funciones exponenciales se verifica $f(0)=1$, pues $a^0=1$ para cualquier *a*, por lo que todas pasan por el punto (0,1).

El **dominio** de la función exponencial es todo $\mathbb{R}$ y su **recorrido** es el intervalo $(0,\infty)$. Las funciones exponenciales son continuas en todo $\mathbb{R}$.

El **crecimiento y decrecimiento** de las funciones exponenciales depende del valor de *a*:

Si $a>1$ la función exponencial es creciente en todo $\mathbb{R}$.
Si $0<a<1$ la función exponencial es decreciente en todo $\mathbb{R}$.

El **comportamiento en el infinito** también depende del valor de la base:

$$a>1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty$$

$$a<1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty} a^x=0$$

Una función exponencial de especial importancia es $y=e^x$.

Representamos dos ejemplos de función exponencial, de bases mayor y menor que 1 respectivamente.

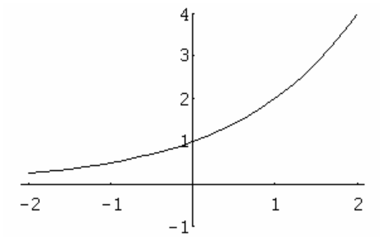



Fig. B.3. Función $y = 2^x$

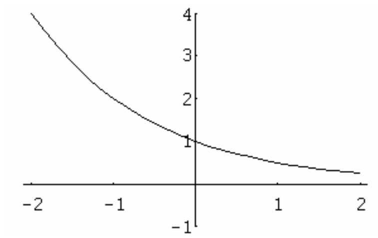



Fig. B.4. Función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Tras haber visto las características principales de las funciones potencia *n*-ésima y exponencial, recordamos las **operaciones principales** relativas a este tipo de funciones.

a) El producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

b) El cociente de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

c) El producto de potencias de igual exponente es igual al producto de las bases elevado al exponente.

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

d) El cociente de potencias de igual exponente es igual al cociente de las bases elevado al exponente.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

e) La potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de exponentes.

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

Las raíces se pueden considerar potencias de exponente fraccionario. Aplicándoles las mismas reglas obtenemos:

a) La raíz del producto de dos números es igual al producto de las raíces de los números.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

b) La raíz del cociente de dos números es igual al cociente de las raíces de los números.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

c) Para calcular la raíz de la raíz de un número se multiplican los índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

El **logaritmo** en base $a$ de un número $x$ es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número; es decir : $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ .

Una función **logarítmica** es una función de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a$ es un número real positivo y distinto de 1. En toda función logarítmica se verifica $f(1) = 0$, pues al ser $a^0 = 1$ entonces $\log_a 1 = 0$, para cualquier $a$. Así pues, todas pasan por el punto (1,0).

La expresión $y = \log_a x$ es equivalente a $a^y = x$, por lo que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Por ello sus representaciones gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$ .

El **dominio** de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$ es $(0,\infty)$ y su **recorrido** es todo $\mathbb{R}$ . Las funciones logarítmicas son continuas en $(0,\infty)$.

El **crecimiento y decrecimiento** de las funciones logarítmicas depende, como en las exponenciales, del valor de $a$.

Si $a > 1$, $f(x) = \log_a x$ es creciente en $(0,\infty)$. Además la función será positiva para los valores de $x$ mayores que 1, y negativa para los valores de $x$ menores que 1.

Si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a x$ es decreciente en $(0,\infty)$. La función será negativa para los valores de $x$ mayores que 1, y positiva para los valores de $x$ menores que 1.

Su **comportamiento en el infinito** también depende de $a$.

$$a > 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$
$$a < 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

Representamos a continuación dos ejemplos de función logarítmica, el logaritmo neperiano o natural y el logaritmo en una base menor que 1.

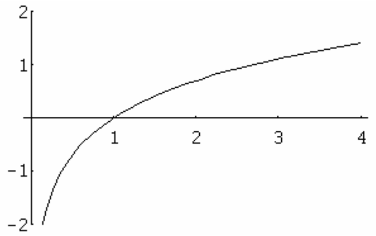



Fig. B.5. Función $y = \ln x$

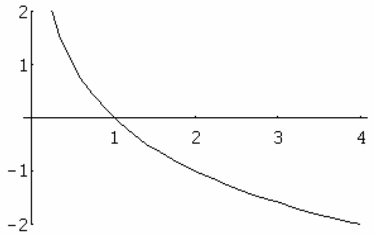



Fig. B.6. Función $y = \log_{1/2} x$

Como hemos hecho en las funciones potencia $n$-ésima y exponencial, recordamos las **operaciones principales** relativas a los logaritmos.

a) El logaritmo de un producto de dos números es la suma de los logaritmos de los números.

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

b) El logaritmo de un cociente de dos números es la diferencia de los logaritmos de los números.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

c) El logaritmo de una potencia de $x$ es el producto del exponente por el logaritmo de $x$.

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

d) El logaritmo de una raíz de $x$ es el logaritmo de $x$ dividido entre el índice.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{1/n} = \frac{1}{n} \log_a x$$

## B.3. Funciones trigonométricas y sus inversas

Las funciones trigonométricas son periódicas de período $2\pi$, lo cual significa que sus valores se repiten cuando la variable se incrementa en $2\pi$, es decir

$$f(x+2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Las funciones trigonométricas básicas son seno, coseno, tangente y sus inversas arco seno, arco coseno y arco tangente.

Función **seno,** $y = \text{sen}\, x$**.** Características principales:

-Su dominio es $\mathbb{R}$.

-Su recorrido es el intervalo $[-1,1]$.

-Es continua en todo su dominio.

-Es periódica de período $2\pi$.

-No existe el límite de $\text{sen}\, x$ cuando $x$ tiende a $\pm\infty$.

-Es una función impar: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$.

-Representación:

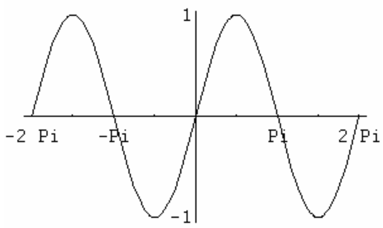



Fig. B.7. Función $y = \text{sen}\, x$

Función **coseno,** $y = \cos x$**.** Características principales:

-Su dominio es $\mathbb{R}$.

-Su recorrido es el intervalo $[-1,1]$.

-Es continua en todo su dominio.

-Es periódica de período $2\pi$.

-No existe el límite de $\cos x$ cuando $x$ tiende a $\pm\infty$.

-Es una función par: $\cos(-x) = \cos\, x$.

-Representación:

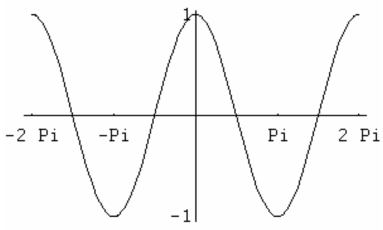



Fig. B.8. Función $y = \cos\, x$

Función **tangente,** $y = \tan x$. Características principales:

-Su dominio es $\mathbb{R}$.
-Su recorrido es $\mathbb{R}$.
-Es continua en todo su dominio, excepto en los puntos $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in Z \right\}$.
-Es periódica de período $\pi$.
-Las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.
-Es una función impar: $\tan(-x) = -\tan x$.
-Representación:

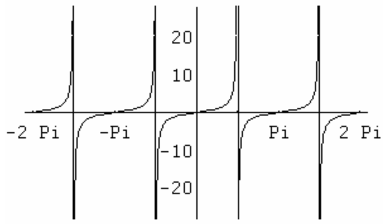



Fig. B.9. Función $y = \tan x$

Las funciones seno, coseno, tangente no son inyectivas, es decir tienen la misma imagen para distintos valores de la variable. Para que existan sus funciones inversas, las definimos sólo en ciertos intervalos.

Función **arco seno,** $y = \text{arcsen } x$. Características principales:

-Su dominio es el intervalo $[-1,\ 1]$.
-Su recorrido es el intervalo $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.
-Es continua en todo su dominio.
-Es creciente en todo su dominio.
-Representación:

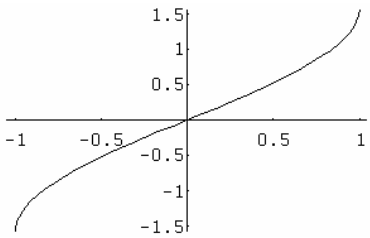



Fig. B.10. Función $y = \text{arcsen } x$

Función **arco coseno,** $y = \arccos x$. Características principales:

-Su dominio es el intervalo $[-1,\ 1]$.
-Su recorrido es el intervalo $[0, \pi]$.

-Es continua en todo su dominio.
-Es decreciente en todo su dominio.
-Representación:

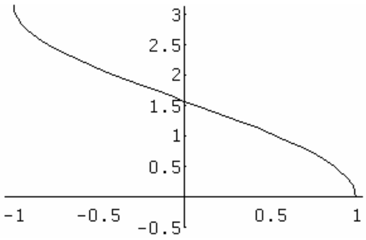



Fig. B.11. Función $y = \arccos x$

Función **arco tangente,** $y = \arctan(x)$. Características principales:

-Su dominio es $\mathbb{R}$.

-Su recorrido es el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

-Es continua en todo su dominio.
-Es creciente en todo su dominio.

-$\lim\limits_{x\to\infty} \arctan\, x = \frac{\pi}{2}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan\, x = -\frac{\pi}{2}$.

-Representación:

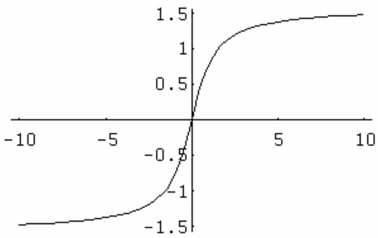



Fig. B.12. Función $y = \arctan x$

Existen diversas **relaciones entre las funciones trigonométricas** seno, coseno y tangente. Entre las más utilizadas se encuentran:

a) $\text{sen}^2 a + \cos^2 b = 1$.

b) $\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\ a\ \cos b \pm\ \cos\ a\ \text{sen}\ b$.
Caso particular: $\text{sen}\ 2a = 2\text{sen}\ a \cdot \cos a$.

c) $\cos(a \pm b) = \cos\ a\ \cos b \mp \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b$.
Caso particular: $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$.

d) $\tan(a \pm b) = \dfrac{\text{sen }(a \pm b)}{\cos\,(a \pm b)} = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$.

Caso particular: $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$.

e) $\text{sen}^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$.

g) $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$.

h) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$.

i) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \text{sen }a$.

## B.4. Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen a partir de $f(x) = e^x$.

**Seno hiperbólico** $\text{senh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

-Su dominio es $\mathbb{R}$.
-Su recorrido es $\mathbb{R}$.
-Es continua en todo su dominio.
-Es simétrica respecto al origen.
-Es creciente en todo su dominio.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{senh } x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{senh } x = -\infty$.
-Es una función impar: $\text{senh}(-x) = -\text{senh}(x)$.
-Representación:

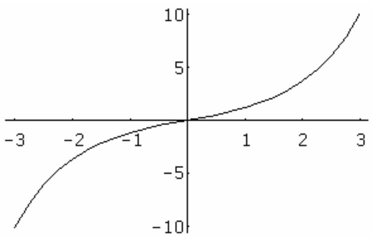



Fig. B.13. Función $y = \text{senh } x$

**Coseno hiperbólico** $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

-Su dominio es $\mathbb{R}$.
-Su recorrido es el intervalo $[1, \infty)$.
-Es continua en todo su dominio.
-Es simétrica respecto a $OY$ con un mínimo en el origen.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \cosh x = \lim\limits_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$.
-Es una función par: $\cosh(-x) = \cos\mathrm{h}(x)$.
-Representación:

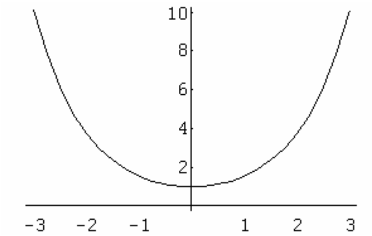



Fig. B.14. Función $y = \cosh x$

**Tangente hiperbólica** $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

-Su dominio es $\mathbb{R}$.
-Su recorrido es el intervalo $(-1, 1)$.
-Es continua en todo su dominio.
-Es simétrica respecto al origen.
-Es creciente en todo su dominio.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh x = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh x = -1$.
-Es una función impar: $\tanh(-x) = -\tanh(x)$.
-Representación:

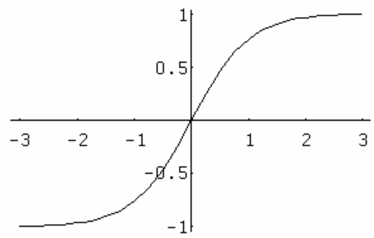



Fig. B.15. Función $y = \tan\mathrm{h}\, x$

Como ocurre en las trigonométricas, existen diversas **relaciones entre las funciones hiperbólicas**. Entre las más utilizadas se encuentran:

a) $\cosh^2 a - \operatorname{senh}^2 a = 1$.

b) $\operatorname{senh}(a \pm b) = \operatorname{senh} a \cosh b \pm \cosh a \operatorname{senh} b.$

Caso particular: $\operatorname{senh} 2a = 2\operatorname{senh} a \cdot \cosh a.$

c) $\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b.$

Caso particular: $\cosh 2a = \cosh^2 a + \operatorname{senh}^2 a.$

d) $\tanh(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{senh}(a \pm b)}{\cosh(a \pm b)} = \dfrac{\tanh a \pm \tanh b}{1 \pm \tanh a \tanh b}.$

Caso particular: $\tanh 2a = \dfrac{2 \tanh a}{1 + \tanh^2 a}.$

# Apéndice B

# Algunas funciones elementales

## Ejercicios resueltos

1. Escribe el término en $x^5$ que aparece al desarrollar $(x+2)^9$.

$(x+2)^9$ es la suma de todos los términos de la forma $\binom{9}{i} x^{9-i} 2^i$ con $i$ entre 0 y 9; $x^5$ aparece para $i$=*4*, y el correspondiente término es

$$\binom{9}{4} x^{9-4} 2^4 = 126 \cdot 16 x^5 = 2016 x^5$$

2. Calcula la suma de todos los números combinatorios

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{i} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Sabemos que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Si $a$=$b$=1 quedará

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}1^1 + \ldots + \binom{n}{n}1^0 1^n \Rightarrow$$
$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{i} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Luego la suma de los números combinatorios vale $2^n$.

3. Halla el dominio de la función $y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ .

Como sabemos que una raíz cuadrada sólo está definida si el radicando es mayor o igual a 0, entonces $y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ estará definida si

$$y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x \geq 0$$

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x \leq 1 \ \forall x$, la función dada está definida para todo número real.

4. Halla el dominio de la función $y = \ln(x^2 - 16)$

Como los logaritmos sólo están definidos para valores positivos de la variable, $y = \ln(x^2 - 16)$ está definida si y sólo si

$$x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \ x > 4 \text{ ó } x < -4$$

Es decir, para $x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$.

5. Hallar $\cos\alpha, \sec\alpha, \operatorname{cosec}\alpha$ y $\operatorname{cotan}\alpha$ si $\alpha = \operatorname{arcsen}(2/3)$ .

$\alpha = \operatorname{arcsen}(2/3) \Rightarrow \operatorname{sen} x = 2/3$ ; entonces

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$
$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{3}{2}$$

$$\text{cotan}x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

6. Resolver $2^{x-3} = 16$.

Se trata de una ecuación exponencial. Expresamos el segundo miembro como potencia de 2 e igualamos los exponentes.

$$2^{x-3} = 2^4 \Rightarrow x - 3 = 4 \Rightarrow x = 1$$

7. Expresa el logaritmo $\log\left[\frac{x(x+2)}{(x+3)^2}\right]$ como una suma o resta de logaritmos.

$$\log\left[\frac{x(x+2)}{(x+3)^2}\right] = \log[x(x+2)] - \log(x+3)^2 =$$
$$= \log(x) + \log(x+2) - 2\log(x+3)$$

8. Calcular $L = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Cuando $x \to \infty$ su logaritmo neperiano también lo hace, por lo aparece una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que se puede eliminar directamente aplicando la regla de L'Hopital. Para ello derivamos el numerador y denominador,

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

9. Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\text{sen } 3x}{1 - 2\cos x}$

Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = \frac{\pi}{3}$ por lo que aparece una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que se puede eliminar aplicando la regla de L´Hopital.

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{(\operatorname{sen}3x)'}{(1-2\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3\cos 3x}{0-2(-\operatorname{sen}x)}=$$

$$=\frac{3\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}=\frac{3\cos\pi}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}=\frac{-3}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\sqrt{3}$$

10. Demostrar las siguientes relaciones:

a) $\operatorname{senh}x+\cosh x=e^x$.

$$\operatorname{senh}x+\cosh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}=e^x$$

b) $\cosh^2 x-\operatorname{senh}^2 x=1$

$$\operatorname{senh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow\operatorname{senh}^2(x)=\frac{(e^x)^2+(e^{-x})^2-2e^xe^{-x}}{4}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Rightarrow\cosh^2(x)=\frac{(e^x)^2+(e^{-x})^2+2e^xe^{-x}}{4}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}$$

Entonces

$$\cosh^2 x-\operatorname{senh}^2 x=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}-\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}=1$$

## Ejercicios propuestos (las soluciones se encuentran al final)

1. Sin calcular los números combinatorios, encuentra los *x* que hacen que se cumplan.

a) $\binom{9}{4}+\binom{9}{3}=\binom{y}{x}$

b) $\binom{y}{x}+\binom{y}{x+1}=\binom{14}{6}$

2. Encuentra a y b para que la gráfica de la función $f(x)=x^3+ax+b$ pase por los puntos (1, 1) y $(-1, 1)$.

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^3+x^2+x+1)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^2-1}$

4. Encuentra el recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2-2x+4$

b) $g(x)=x^2-2\sqrt{2}x+2$

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}}{2^x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{2x}+x^2}{x3^x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3 x^2}{\log_2 x}$

6. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\dfrac{2x}{2-x}$

b) $g(x)=\log_2 e^{3x}$

7. Resolver $5^{2x-9} = 625$.

8. Resolver $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2-x} = 2^{x^2}$.

9. Resolver $\ln(3x+4) - \ln(2-5x) = 2\ln 5$.

10. Resolver $\log_{10}(x^2 + x + 44) = 2$

11. Usando las propiedades de los logaritmos, simplifica las siguientes expresiones.

a) $\frac{1}{2}\ln(4t^4) - \ln 2$

b) $3\ln\sqrt[3]{t^2-1} - \ln(t+1)$

c) $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right)$

12. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $\text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$

b) $\text{cotan}\, x = \frac{1}{\tan x}$

13. Sabiendo que $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y que $\alpha = \text{arcsec}\left(-\sqrt{5}\right)$, halla $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ y $\text{cosec}\,\alpha$.

14. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{sen}\, x}{x^3}$.

15. Dado $\text{senh}\, x = 4/3$ halla los valores del coseno y la tangente hiperbólicas.

## Soluciones a los ejercicios propuestos

1. a) $x = 4 \quad y = 10$
   b) $x = 5 \quad y = 13$

2. $a = -1 \quad b = 1$
3. a) $-\infty$
   b) $5/2$

4. a) $[4, +\infty)$
   b) $[0, +\infty)$

5. a) $\infty$
   b) $\infty$
   c) $\dfrac{\ln 4}{\ln 3}$

6. a) $(0, 2)$
   b) $(-\infty, +\infty)$

7. $x = 13/2$

8. $x_1 = 2/3 \qquad x_2 = -1$

9. $x = 23/64$

10. $x_1 = 7 \qquad x_2 = -8$

11. a) $2\ln t$
    b) $\ln(t-1)$
    c) $\ln(x-3)$

12. Ambas existen en todo $\mathbb{R}$ excepto el conjunto de puntos en que se anula el sen $x$, que es $\{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
13. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \qquad \tan\alpha = -2 \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
14. 1/6
15. $\cosh x = \dfrac{5}{3}; \quad \tanh x = \dfrac{4}{5}$

# Apéndice C

# Números Reales y Complejos

## C.1. Los números reales

Suponemos conocido el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Vamos a definir y estudiar en $\mathbb{R}$ algunos conceptos como relaciones de orden, intervalos, cotas y valor absoluto.

### C.1.1. Relaciones de orden.

Sea el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Decimos que entre los elementos de un subconjunto suyo $S$ existe una **relación de orden** si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:

a) Reflexiva: $a \leq a, \quad \forall a \in S$
b) Antisimétrica: $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b, \quad \forall a, b \in S$
c) Transitiva: $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c, \quad \forall a, b, c \in S$

Conocemos distintos subconjuntos de $\mathbb{R}$, por ejemplo los números naturales, los enteros, los racionales y los reales. En todos ellos está definida la relación de orden.

En $\mathbb{N}$: $\quad 1 < 2 < 3 < \ldots$

En $\mathbb{Z}$: $\quad -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots$

En $\mathbb{Q}$: $\quad \dfrac{i_1}{j_1} \leq \dfrac{i_2}{j_2} \Leftrightarrow i_1 j_2 \leq i_2 j_1$

**Propiedades de la relación de orden en $\mathbb{R}$ .**

a) Es **compatible con la suma** pues se cumple

$$a \le b \Rightarrow a + c \le b + c, \quad \forall c \in S$$

es decir, si en una desigualdad sumamos el mismo número a los dos miembros, la desigualdad no varía.

b) Es **compatible con el producto** pues se cumple

$$c > 0,\ a \le b \Rightarrow a \cdot c \le b \cdot c$$

es decir, si en una desigualdad multiplicamos por el mismo número positivo a los dos miembros, la desigualdad no varía.

c) Otras propiedades:

$$\begin{aligned}
&a \le b, c \le d \Rightarrow a + c \le b + d \\
&a \le 0 \Rightarrow -a \ge 0 \\
&a \le b \Rightarrow -a \ge -b \\
&c < 0, \quad a \le b \Rightarrow a \cdot c \ge b \cdot c
\end{aligned}$$

**C.1.2. Intervalos.**

Los **intervalos** son subconjuntos de  la recta real. Los hay de tres tipos:

- Intervalo abierto: $(a,b) = \{r \in \mathbb{R} /\ a < r < b\}$

- Intervalo cerrado: $[a,b] = \{r \in \mathbb{R} /\ a \le r \le b\}$

- Intervalo semiabierto (o semicerrado): puede serlo por la derecha

$$[a,b) = \{r \in \mathbb{R} /\ a \le r < b\}$$

o por la izquierda

$$(a,b] = \{r \in \mathbb{R} /\ a < r \le b\}$$

**Ejemplo**: $\left(-\infty, 3\right]$ indica el conjunto de todos los números reales menores o iguales que 3. A su vez, $\left(\sqrt{2},\infty\right)$ es el conjunto de todos los números reales mayores que $\sqrt{2}$ .

### C.1.3. Cotas. Supremo e ínfimo. Máximo y mínimo.

Decimos que $M$ es **cota superior** del conjunto $D$ si $x \leq M$ para todo $x$ del conjunto. A la menor de las cotas superiores de $D$ se la denomina **supremo**. Si el supremo pertenece al conjunto se le llama **máximo** o **último elemento.**

Análogamente, decimos que $m$ es **cota inferior** del conjunto $D$ si $x \geq m$ para todo $x$ del conjunto. A la mayor de las cotas inferiores de $D$ se la denomina **ínfimo**. Si el ínfimo pertenece al conjunto se le llama **mínimo** o **primer elemento.**

**Ejemplo**: En el intervalo $\left(-2,7\right]$ una cota inferior es $-3$ y el ínfimo es $-2$, que no pertenece al intervalo, al ser éste abierto, por lo que no existe mínimo. El 7 es la menor de las cotas superiores, es decir el supremo. Como pertenece al intervalo, es también el máximo.

### C.1.4 Valor absoluto y parte entera.

El **valor absoluto** de un número $a \in \mathbb{R}$ es el valor que tiene prescindiendo del signo. Coincide con el número si es positivo y con su opuesto si es negativo. Por tanto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

a) $|a| \geq 0$

b) $|a| = |-a|$

c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

d) $|a+b| \leq |a| + |b|$

La **parte entera** de un número $x$, es el valor del mayor entero menor o igual a $x$. Se representa por E($x$) o bien por [$x$]. La parte entera de $x$ cumple:

$$\mathrm{E}(x) = p \in Z \,/\, p \leq x < p+1$$

# C.2. Los números complejos

Como hemos hecho en $\mathbb{R}$, suponemos conocido el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos y vamos a estudiar algunos aspectos de estos números, así como las operaciones básicas entre ellos.

## C.2.1 Unidad imaginaria. Forma binómica de un número complejo. Representación en el plano.

Para dar solución a la ecuación $x^2+1=0$ se define la **unidad imaginaria** $i=+\sqrt{-1}$. Un número complejo, escrito en **forma binómica,** es una expresión de la forma $a+bi$, donde *a* y *b* son números reales.

El número $a\in\mathbb{R}$ es la parte real del número complejo. A $b\in\mathbb{R}$ le llamamos **parte imaginaria**. Escribimos

$$z=a+bi\in\mathbb{C}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{Re}(z)=a\\ \operatorname{Im}(z)=b\end{cases}$$

Si $a=0$, el número *z* es **imaginario puro**. Si $b=0$, *z* es un número **real**.

Ejemplo: el número complejo $-1+\pi i$ tiene como parte real $-1$ y como parte imaginaria $\pi$. $\pi i$ es un número imaginario puro.

Para representar los números complejos en unos ejes de coordenadas se representa en el eje de abscisas la parte real y en el de ordenadas la imaginaria. Al punto *A* de coordenadas *(a , b)* se le llama **afijo** del número complejo $a+bi$. Así a cada complejo le hacemos corresponder un punto en el plano y recíprocamente.

## C.2.2 Conjugado de un número complejo. Módulo. Argumento.

Sea el número complejo $z=a+bi$, cuyo afijo es el punto *A*, de coordenadas $(a,b)$, del plano. Se llama conjugado de $z$ al número complejo $\bar{z}$ que tiene la misma parte real y la parte imaginaria cambiada de signo

$$z=a+bi\Rightarrow\bar{z}=a-bi$$

Se llama **módulo** de *z* al número real

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

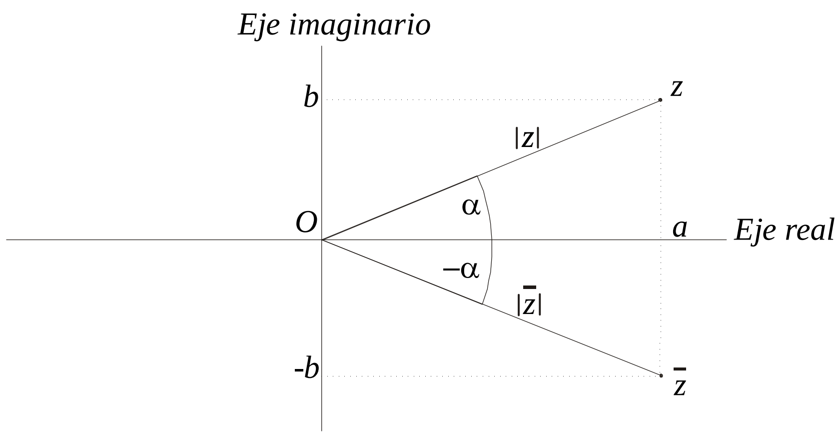
Es fácil ver que el módulo de un complejo coincide con el de su conjugado.

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Se llama **argumento** de $z$ al ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la recta que une el origen de coordenadas $O$ con el afijo $A$ de $z$. El argumento de $z$ cumple

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|}; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|z|}, \quad -\pi < \alpha \leq \pi$$

En la siguiente figura se representan un complejo y su conjugado, así como las partes real e imaginaria de cada uno, sus módulos y su argumentos.




## C.2.3 Operaciones con números complejos

a) Suma (diferencia): se suman (restan) partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí

$$(a + bi) \pm (c + di) = a \pm c + (b \pm d)i$$

b) Producto: se realiza aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$

$$(a+bi)(c+di) = ac + bd\, i^2 + ad\, i + bc\, i = ac - bd + (ad + bc)i$$

c) División: se obtiene multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

d) Potencia: se calcula desarrollando la potencia del binomio *(a + bi)* y teniendo en cuenta las potencias del número *i*.

$$\begin{aligned}
i^1 &= i\\
i^2 &= -1\\
i^3 &= i^2\cdot i=(-1)i=-i\\
i^4 &= i^3\cdot i=(-i)i=-i^2=1
\end{aligned}$$

Observamos que los valores de las potencias de *i* se repiten de cuatro en cuatro. Así, para calcular potencias de *i* dividiremos el exponente entre 4 y calcularemos la potencia del número *i* que tiene por exponente el resto de la división.

**Ejemplo**: Calcular $\dfrac{(2+i)^3}{1-i}$.

En primer lugar desarrollamos el numerador:

$$(2+i)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3=8+12i+6(-1)-i=2+11i$$

Ahora multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de éste:

$$\frac{(2+i)^3}{1-i}=\frac{2+11i}{1-i}=\frac{(2+11i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+11i^2+(2+11)i}{1-i^2}=\frac{-9+13i}{2}=-\frac{9}{2}+\frac{13}{2}i$$

Para potencias de orden más elevado podemos utilizar los coeficientes del binomio de Newton.

### C.2.4 Teorema fundamental del álgebra.

El teorema fundamental del álgebra establece que cualquier polinomio de coeficientes reales y grado *n*, $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^0+a_0$, posee *n* raíces complejas. Se cumple también que si un número complejo es raíz del polinomio, entonces su conjugado también lo es.

**Ejemplo**: Calcular las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$. ¿Es alguna de ellas real?

Según el teorema, cada raíz compleja va acompañada de su conjugada por lo que el número de raíces complejas de un polinomio es siempre par. El polinomio que estamos considerando es de grado 3, por lo que tiene 3 raíces. Como debe tener un número par de raíces complejas, al menos tendrá una real.

Probando con $x = \pm 1, x = \pm 2$ ..., obtenemos que $x = 2$ es raíz de $P(x)$ y dividiendo resulta

$$\frac{P(x)}{x-2} = x^2 - 2x + 2$$

Hallando ahora las raíces del cociente

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

Entonces las raíces del polinomio son $x_1 = 2,\ x_2 = 1 + i,\ x_3 = 1 - i$.

# Apéndice C

# Números Reales y Complejos

## Ejercicios resueltos

1. Halla los números reales que cumplen la condición $|a| = a + 3$.

Si $a \geq 0$: $|a| = a = a + 3 \Rightarrow 0 = 3$. No existe solución.

Si $a < 0$: $|a| = -a = a + 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$.

2. Halla todos los números $r \in \mathbb{R}$ tales que $|2r - 1| < 4$.

a) Si $2r - 1 \geq 0$:

$$|2r-1| = 2r - 1 \Rightarrow 0 \leq 2r - 1 < 4 \Rightarrow \begin{cases} 2r - 1 \geq 0 \Rightarrow r \geq 1/2 \\ 2r - 1 < 4 \Rightarrow r < 5/2 \end{cases} \Rightarrow r \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

b) Si $2r - 1 < 0$: $|2r - 1| = -(2r - 1)$. Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos $r \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Los números que satisfacen la condición estarán en alguno de los dos intervalos, luego pertenecerán a su unión. Solución: $r \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

3. Resolver la inecuación $1 - \frac{x}{2} > \frac{1}{1+x}$.

a) $1+x>0 \quad (\Leftrightarrow x>-1)$. Al multiplicar ambos miembros por $(1+x)$, positivo, se mantiene el sentido de la desigualdad. Entonces

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)(1+x)>1 \Rightarrow x^2-x<0 \Rightarrow x(x-1)<0 \Rightarrow \begin{cases} x<0 \text{ y } x-1>0 \\ x>0 \text{ y } x-1<0 \end{cases}$$

La primera opción no tiene solución. La segunda da como resultado $x \in (0,1)$ que cumple la hipótesis hecha, $x>-1$.

b) $1+x<0 \quad (\Leftrightarrow x<-1)$. Al multiplicar ambos miembros, por $(1+x)$, negativo, cambia el sentido de la desigualdad. Entonces

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)(1+x)<1 \Rightarrow x^2-x>0 \Rightarrow x(x-1)>0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \text{ y } x-1>0 \\ x<0 \text{ y } x-1<0 \end{cases}$$

De la primera opción resulta $x \in (1,\infty)$ y de la segunda $x \in (-\infty, 0)$. Los valores de *x* que cumplen alguna de las 2 opciones pertenecerán a la unión de los intervalos, luego $x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$. Además debe cumplirse la hipótesis $x<-1$. Luego nos queda $x \in (-\infty,-1)$.

En consecuencia, los valores de *x* que cumplen la inecuación estarán en el intervalo $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$.

4. Calcular:

$$(3+2\mathrm{i})+(8-5\mathrm{i}) = 3+8+2i-5i = 11-3i$$

$$(1+4i)(5-i) = 5-i+20i-4i^2 = 5+4+19i = 9+19i$$

$$(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 4-9i^2 = 4+9 = 13$$

$$\frac{20+30\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \frac{(20+30i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} =$$

$$= \frac{60-20i+90i-30i^2}{9-i^2} = \frac{90+70i}{10} = 9+7i$$

$$\mathrm{i}^{6254} = i^{4\cdot 1563+2} = i^2 = -1$$

5. Calcula $x$ de modo que $\frac{x+i}{1-i}$ sea: a) real; b) imaginario puro.

Calculamos el cociente

$$\frac{x+i}{1-i}=\frac{(x+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{x-1+xi+i}{2}=\frac{x-1}{2}+\frac{x+1}{2}i$$

a) Para que sea un número real la parte imaginaria a de ser nula. Por tanto

$$\frac{x+1}{2}=0\Rightarrow x=-1$$

b) Para que sea imaginario puro la parte real ha de ser nula. Por tanto

$$\frac{x-1}{2}=0\Rightarrow x=1$$

6. Calcula $x$ e $y$ para que $(2+xi)+(y-3i)=7+4i$ .

$$(2+xi)+(y-3i)=2+y+(x-3)i$$

El complejo anterior debe ser igual a $7+4i$ por lo que igualando partes reales y partes imaginarias, resulta:

$$2+y=7\Rightarrow y=5$$
$$x-3=4\Rightarrow x=7$$

7. Resuelve la siguiente ecuación $x^2-2x+5=0$ .

$$x^2-2x+5=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm4\sqrt{-1}}{2}\Rightarrow x=1\pm2i$$

8. Halla, para el complejo $4+4\sqrt{3}i$ , módulo, conjugado e inverso.

Módulo: r $=\sqrt{4^2+4^2\cdot3}=8$

Conjugado: $4-4\sqrt{3}i$

Inverso: $\frac{1}{4+4\sqrt{3}i}=\frac{4-4\sqrt{3}i}{(4+4\sqrt{3}i)(4-4\sqrt{3}i)}=\frac{4-4\sqrt{3}i}{64}=\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{3}}{16}i$

9. Calcula *x* e *y* de manera que $(x+i)(1+yi)=(1+3i)$.

Desarrollamos el producto de complejos

$$(x+i)(1+yi)=x-y+xyi+i=x-y+(xy+1)i$$

Igualamos a continuación partes reales e imaginarias entre sí y resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x-y=1 \\ xy+1=3 \end{cases} \Rightarrow x=1+y \Rightarrow y^2+y+1=3 \Rightarrow y=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Para cada uno de los valores de y obtendremos una solución.

Si $y=1 \Rightarrow x=2$.
Si $y=-2 \Rightarrow x=-1$.

10. Resuelve la ecuación $x^4+1=0$.

$$x^4+1=0 \Rightarrow x^4=-1 \Rightarrow x^2=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

Sea $x=a+bi$. Entonces $x^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$.

a) $a^2-b^2+2abi=i \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=1 \end{cases}$

De $a^2-b^2=0$ resulta $a=\pm b$. Si $a=-b$, la segunda condición se convierte en $-2a^2=1$ que no tiene sentido pues a es un número real. La otra opción es $a=b$, de donde $2a^2=1 \Rightarrow a=b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Entonces dos de las cuatro soluciones serán $x=\pm\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$.

b) Queda por resolver $a^2-b^2+2abi=-i$, para lo cual podemos repetir el proceso del apartado a). Pero por el Teorema Fundamental del Álgebra sabemos que existen en total cuatro soluciones. Como las dos ya calculadas son complejas no conjugadas entre sí, las dos restantes serán las conjugadas de las anteriores.

Por tanto las cuatro soluciones son $\pm\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$ y $\pm\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$.

## **Ejercicios propuestos** (las soluciones se encuentran al final)

1. En los siguientes conjuntos, determinar el supremo y el ínfimo, indicando si coinciden con el máximo o mínimo respectivamente.

a) $A = \left\{ \dfrac{n+1}{n+2} \right\}$ siendo $n \in \mathbb{N}$
b) $B = \left\{ x \,/\, x^2 - 5x + 6 < 0 \right\}$ siendo $x \in \mathbb{R}$
c) $C = (0, \infty)$

2. Halla los números reales que cumplen las siguientes condiciones:

a) $|2a - 4| = 5$
b) $|a - 1| \cdot |\pi - a| = 0$

3. Resuelve las inecuaciones:

a) $|x + 5| \geq 4$
b) $\left| 3 - \dfrac{1}{x} \right| < 1$

4. Halla el módulo, conjugado e inverso de cada uno de los siguientes complejos.

a) $4 + 3i$
b) $3 + \sqrt{5}i$

5. Calcula las siguientes operaciones con complejos:

a) $(5 + 7i) + (5 - 7i) =$
b) $(1 + 3i) - (1 + i) =$
c) $(2 + 5i) \cdot (3 + 4i) =$
d) $(-2 - 5i) \cdot (-2 + 5i) =$
e) $(1 + \mathrm{i})^2 : (4 + \mathrm{i}) =$
f) $(2 + \mathrm{i}) : (1 - \mathrm{i})^2 =$
g) $(\mathrm{i} - 3\mathrm{i})^3 =$

6. Calcula las siguientes potencias:

a) $i^{65} =$
b) $(-i)^{79} =$
c) $i^{-54} =$
d) $(-i)^{-61}$
e) $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i} =$

7. Dado un número complejo $z$,

a) ¿cuánto vale $z + \bar{z}$?
b) Si $z - \bar{z}$ es un número real, ¿qué se puede afirmar sobre $z$?

8. Halla $x$ para que el cociente $(x+2i):(3+2i)$ sea un número imaginario puro.

9. Dados los números complejos $2 - mi$ y $3 - ni$, halla los valores que deben tener $m$ y $n$ para que el producto de aquellos sea igual a $8 + 4i$.

10. Comprueba que los números complejos $2+3i$ y $2-3i$ verifican la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$.

11. Halla todas las soluciones reales y complejas de las ecuaciones:

a) $2x^2 = 7$
b) $x^2 + 6x + 25 = 0$
c) $x^2 - 2\sqrt{5} + 6 = 0$

12. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo 5. Halla estos complejos.

13. Halla los números complejos tales que su cuadrado es igual a su conjugado (hay cuatro soluciones).

# Soluciones a los ejercicios propuestos

1.
   a) Sup ($A$)= 1. $A$ no tiene máximo. Inf ($B$)= 2/3. Coincide con el mínimo.
   b) Sup ($B$)= 3. $B$ no tiene máximo. Inf ($B$)= 2. $B$ no tiene mínimo.
   c) Sup ($C$)= $\infty$. $C$ no tiene máximo. Inf ($C$)= 0. $C$ no tiene mínimo.

2. a) Dos soluciones: $a_1 = \frac{9}{2}$; $a_2 = -\frac{1}{2}$
   b) Dos soluciones: $a_1 = 1$; $a_2 = \pi$

3. a) $x \in (-\infty,-9] \cup [-1,\infty)$
   b) $x \in \left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

4. a) $z = 4+3i$; $\bar{z} = 4-3i$; $z^{-1} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$
   b) $z = 3+\sqrt{5}i$; $\bar{z} = 3-\sqrt{5}i$; $z^{-1} = \frac{3}{14} - \frac{\sqrt{5}}{14}i$

5.
   a) 10 e) $\frac{2}{17} + \frac{8}{17}i$
   b) $2i$ f) $-\frac{1}{2} + i$
   c) $14+23i$ g) $8i$
   d) 29

6.
   a) $i$ d) $i$
   b) $i$ e) $-1$
   c) $-1$

7.
   a) $2\,\mathrm{Re}(z)$.
   b) Que es nulo.

8. $x = -\frac{4}{3}$

9. Dos soluciones: $m_1 = \frac{2}{3};\ n_1 = -3$ y $m_2 = -2;\ n_2 = 1$

11. a) $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

b) $x = -\frac{3}{2} \pm 2i$

c) $x = \pm\sqrt{6-2\sqrt{5}}\,i$ .

12. Dos soluciones: $2+3i,\ 4-3i$ y $2-3i,\ 4+3i$

13. $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ , $z_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

# APÉNDICE D

# Errores de operaciones más frecuentes

En el Apéndice B se han recordado las principales operaciones referentes a potencias, raíces, logaritmos y funciones trigonométricas. A continuación se recuerdan algunas de ellas en las que se deslizan errores con cierta frecuencia. Acompañando a la fórmula se indica una regla abreviada fácil de recordar.

## D.1. Potencias

a) Potencia de un producto: producto de potencias

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

b) Potencia de un cociente: cociente de potencias

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

c) Producto de potencias de igual base: se suman exponentes

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

b) Cociente de potencias de igual base: se restan exponentes

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

e) Potencia de potencia: se multiplican exponentes

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

## D.2. Raíces

a) Raíz de un producto: producto de raíces

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

b) Raíz de un cociente: cociente de raíces

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

c) Raíz de una raíz: se multiplican los índices

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

## D.3. Logaritmos

a) Logaritmo de un producto: suma de logaritmos.

$$\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y$$

b) Logaritmo de un cociente: diferencia de logaritmos.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

c) Logaritmo de una potencia: el exponente sale del logaritmo multiplicando.

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

d) Logaritmo de una raiz: el índice sale del logaritmo dividiendo.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{1/n} = \frac{1}{n} \log_a x$$

## D.4. Relaciones trigonométricas básicas

a) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

b) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

c) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

d) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

e) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

# Apéndice D

# Errores de operaciones más frecuentes

## Ejercicios propuestos (las soluciones se encuentran al final)

1. Simplifica la siguiente expresión $\left(a^3\right)^5 \dfrac{a^{-4}}{\left(a^{-4}\right)^{-2}}$

2. Verdadero o falso.

a) $x^{m^n} = x^{m \cdot n}$

b) $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$

c) $x^{2+3} = x^2 + x^3$

d) $mx^n = nx^m$

e) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}$

3. Verdadero o falso.

a) $\ln 3 - \ln 2x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2x}$

b) $7\ln x^2 = \ln x^{14}$

c) $\ln x^2 + \ln 3 = \ln(x^2 + 3)$

d) $\ln \sqrt[3]{x} = \dfrac{1}{3}\ln x$

e) $2\ln x = (\ln x)^2$

4. Verdadero o falso.

a) $\log_3(x^2) = \dfrac{2\ln x}{\ln 3}$

b) $\log_3(x^2) = 2\log_3 x$

c) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

d) $a^{\log_a x} = x$

e) $\log_2(2^x) = x$

5. Verdadero o falso.

a) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}^2 x$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

c) $2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$

d) $\operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos^2 x$

e) $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$

6. Verdadero o falso.

a) $(e^{-1})^3 = \dfrac{1}{e^3}$

b) $e^{-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{e^{x^2}}$

c) $(e^x)^2 = e^{x+2}$

d) $(e^x)^2 = (e^2)^x$

e) $\dfrac{e^x}{x+5} = \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{e^x}{5}$

7. Verdadero o falso.

a) $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{3x}$

b) $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = \sqrt[6]{x}$

d) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}} = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}}{x - y}$

8. Simplifica las siguientes expresiones dando el resultado en forma de potencia de exponente fraccionario.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{5}}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{\left(2^5\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(5^2\right)^5}}}$

c) $\dfrac{3^{-2}\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3^{\frac{3}{4}}}}$

9. Escribe $\log_2 x - \frac{1}{3}\log_2(x^2) + 4\log_2\sqrt{x}$ como un solo logaritmo.

# Soluciones a los ejercicios propuestos

1. $a^3$

2.
   a) F $x^{m^n} = x^{(m)^n}$
   b) V
   c) F $x^{2+3} = x^2 \cdot x^3$
   d) F $mx^n \neq nx^m$
   e) F $\left(\frac{x}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{x}\right)^3$

3.
   a) F $\ln 3 - \ln 2x = \ln \frac{3}{2x}$
   b) V
   c) F $\ln x^2 + \ln 3 = \ln 3x^2$
   d) V
   e) F $2\ln x = \ln x^2$

4.
   a) V
   b) V
   c) V
   d) V
   e) V

5.
   a) F $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$
   b) V
   c) V
   d) F $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
   e) V

6.
   a) V
   b) F $e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}$
   c) F $(e^x)^2 = e^{2x}$
   d) V
   e) F $\frac{e^x}{x+5} \neq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{5}$

7.
   a) F $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3}$
   b) V
   c) F $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = \sqrt[8]{x}$
   d) F $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$
   e) F $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}}{x + \sqrt[3]{y^2}}$

8. a) $2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}$

b) $\dfrac{2^{5/6}}{5^{5/6}}$

c) $3^{-\frac{7}{4}}$

9. $\dfrac{7}{3}\log_2 x$

# Tema 1

# Las Funciones y sus Gráficas

## 1.1.- Definición de Función y Conceptos Relacionados

Es muy frecuente, en geometría, en física, en economía, etc., hablar de ciertas magnitudes que dependen del valor de otras. Por ejemplo, el área de un cuadrado depende de la longitud de su lado, el espacio recorrido por un móvil en un tiempo determinado depende de su velocidad, el número de ventas de un producto depende de su precio, etc. Estas situaciones se describen matemáticamente mediante funciones.

Si $X$ e $Y$ son dos conjuntos y $D$ un subconjunto de $X$, una **función** (o aplicación) $f$ de $D \subset X$ en $Y$ es una relación o correspondencia que a cada elemento $x \in D$ le asigna un único elemento de $Y$ que se denotará por $f(x)$ y se llama imagen por $f$ del elemento $x$. Para indicar una función se escribirá

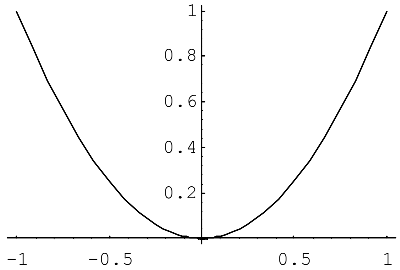
$$\begin{aligned} f:\ D \subset X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Suele decirse que $x$ es la "variable independiente" y que $y$ es la "variable dependiente" pues su valor se obtiene como consecuencia del que se le asigne a la $x$.

Al conjunto $D$ se le llama **dominio,** campo de definición o campo de existencia de $f$. Se indica también por $D(f)$ . Al conjunto $f(D) = \{f(x) \in Y \,/\, x \in D\}$ se le llama **imagen** o recorrido de $f$ . Se llama **gráfica** de la función al conjunto de los pares ordenados $\{(x, f(x)) \in X \times Y \,/\, x \in D\}$

Si $X = Y = \mathbb{R}$ se llama **función real de variable real.** Se tratará, por tanto, de una aplicación $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La forma más simple de describir una función es mediante una expresión o fórmula matemática como, por ejemplo, $f(x) = x^2$ . Esta función está definida para cualquier número real, es decir, su dominio es $D = \mathbb{R}$ . Toma valores mayores o iguales que cero por tratarse de un cuadrado, por lo que $f(D) = [0, \infty)$ . Su gráfica será el conjunto de pares ordenados de la forma $(x, x^2)$ que constituyen la parábola:




TIPOS DE FUNCIONES:

Se llaman funciones algebraicas a aquéllas que pueden expresarse en términos de un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces. Por ejemplo $y = \frac{3x^2 - 4}{2x + 1}$ es algebraica.

Las funciones algebraicas más comunes son las funciones polinómicas de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde el entero positivo $n$ es el grado de la función polinómica, y las funciones racionales (expresables como cocientes de polinomios). Las funciones que no son algebraicas se llaman trascendentes. Es decir, son funciones trascendentes las trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Dada una función $f$, real de variable real, se dirá que $f$ es:

**Creciente** en un subconjunto $A \subset D$ si dados $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

**Decreciente** en un subconjunto $A \subset D$ si dados $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

**Creciente en un punto** $x_0$ *si* $\exists\, \delta > 0 \;/\; f(x_0 - \delta) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + \delta)$

**Decreciente en un punto** $x_0$ *si* $\exists\, \delta > 0 \;/\; f(x_0 - \delta) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + \delta)$

Dada una función $f$, real de variable real, se dirá que:

$f$ presenta un **mínimo local** en $x_0$ *si* $\exists\, \delta > 0 \;/\; f(x) \geq f(x_0) \;\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$f$ presenta un **máximo local** en $x_0$ *si* $\exists\, \delta > 0 \;/\; f(x) \leq f(x_0) \;\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

En ambos casos se dirá que la función posee un **extremo relativo** en el punto de abscisa $x_0$, es decir en el punto del plano $(x_0, f(x_0))$

Se hablará de **extremos absolutos** cuando la función alcance su menor valor (**mínimo absoluto**)o su mayor valor (**máximo absoluto**) .

Dada una función $f$, real de variable real, se dirá que:

$f$ está **acotada inferiormente** en un dominio $D$ si $\exists\ k_1 \in \mathbb{R}\ /\ f(x) \geq k_1,\ \forall\ x \in D$

$f$ está **acotada superiormente** en un dominio $D$ si $\exists\ k_2 \in \mathbb{R}\ /\ f(x) \leq k_2,\ \forall\ x \in D$

$f$ está **acotada** en un dominio $D$, si lo está inferior y superiormente. Puede expresarse también si $\exists\ k \in \mathbb{R}\ /\ |f(x)| \leq k,\ \forall\ x \in D$, porque $|f(x)| \leq k,\ \forall\ x \in D \Leftrightarrow -k \leq f(x) \leq k,\ \forall\ x \in D$ .

## 1.2.- Operaciones con Funciones. Composición de Funciones

Sean $f$ y $g$ dos funciones con el mismo dominio $D \subset \mathbb{R}$ . Para cada $x \in D$ de definen la **suma**, **diferencia** y **producto** de $f$ y $g$ mediante las expresiones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

De la misma forma, para cada $x$ tal que $g(x) \neq 0$ se define el **cociente** como $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

Se hablará de la composición de dos funciones $f$ y $g$ cuando las salidas de $f$ sean usadas como entradas de $g$ . Si $X, Y, Z$ son conjuntos, $f$ una función con dominio $D(f) \subset X$ en $Y$ y $g$ una función con dominio $D(g) \subset Y$ en $Z$ . Suponiendo que la imagen de $f$ está contenida en el dominio de $g$, es decir, $I(f) \subset D(g)$ , se define la **composición de** las **funciones** $f$ y $g$ , y se representa por $g \circ f$ , como la función de $D(f)$ en $Z$ que asigna a cada elemento $x \in D(f)$ el elemento del conjunto $Z$, $g[f(x)]$.

La composición de funciones es asociativa, es decir, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ siempre que se trate de tres funciones que puedan componerse. Pero conviene señalar que no es conmutativa, porque en principio la existencia de $g \circ f$ no implica la de $f \circ g$; pero aun cuando ambas composiciones existan, no tienen por qué ser iguales. Así, por ejemplo, para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sin x$ se tendría :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = \sin(x^2)$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = \sin^2 x$$
$$y\ \sin(x^2) \neq \sin^2 x\ \ (salvo\ para\ x = 0)$$

Se llama **función identidad** a la que asigna a cada elemento $x$ él mismo. Es evidente que al componerla con cualquier otra función no la altera. Es decir, la función identidad es el elemento neutro de la composición de funciones.

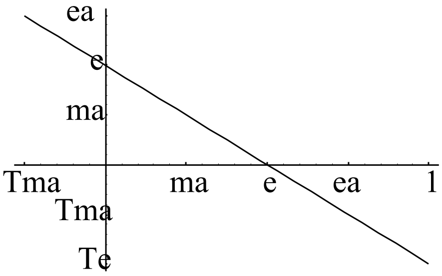
Si dada una función $f$, existe otra función que al componerla con ella da como resultado la función identidad, se le llama **función inversa** de $f$ , representándose por $f^{-1}$ . Es importante distinguir entre la función inversa (inversa para la composición) de la inversa para el producto, que sería una función que al multiplicarla con la función dada, resultase el elemento neutro para el producto ( la función constante que asigna a cada $x$ el número real 1). Por ejemplo, para la función $f(x)$ = sin $x$ su función inversa es $f^{-1}(x)$ = arc sin $x$ , mientras que la inversa para el producto es cosec $x$ porque sin $x$ cosec $x$ = 1.

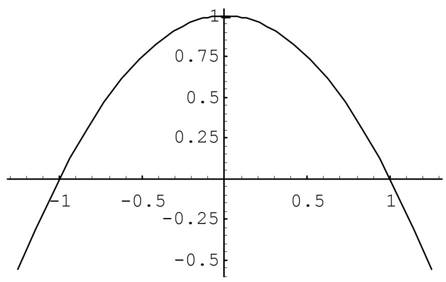
## 1.3.- Gráfica de una Función

La representación más completa de una función puede obtenerse dibujando su gráfica en un sistema de dos coordenadas. Tomando el *eje Ox* para representar la variable independiente (originales) , y el *eje Oy* para la variable dependiente (imágenes) , los puntos de coordenadas *(x,f(x))* constituirán una curva en dicho sistema que será la gráfica de la función.

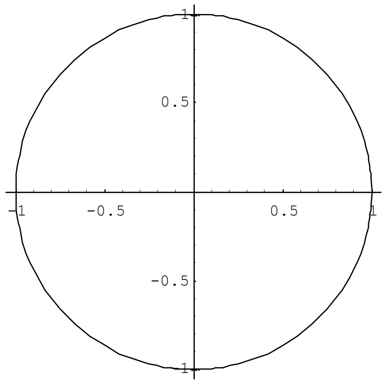
No todas las curvas representan una función. Para que así sea es necesario que satisfagan el *test de la vertical*: Una curva representa una función si cualquier recta paralela al *eje O y* corta a la gráfica a lo sumo en un punto (cada original tiene una sola imagen). En este caso, el dominio estará constituido por los valores de $x$ en los que la vertical corta a la gráfica.

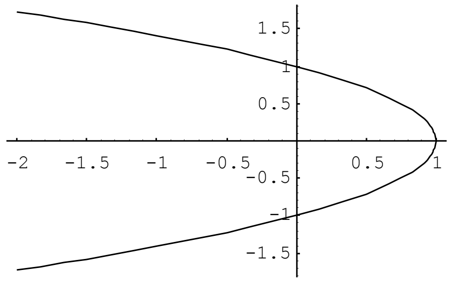
Por ejemplo, la recta de ecuación $y = 1 - x$ describe una función y lo mismo ocurre con la parábola de ecuación $y = 1 - x^2$:



Sin embargo, no ocurre lo mismo para la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 1$ y la parábola de ecuación $x + y^2 = 1$ cuyas gráficas son:




Para obtener la representación gráfica de una función deberán seguirse unas pautas que se describirán más adelante en el Tema 4.

**Definición**.-

Se dice que $f$ es una **función par** y su **gráfica simétrica respecto del eje Oy** si verifica:

1) $x \in D \Rightarrow -x \in D$
2) $f(-x) = f(x)$

Se dice que $f$ es una **función impar** y su **gráfica simétrica respecto del origen** si verifica:

1) $x \in D \Rightarrow -x \in D$
2) $f(-x) = -f(x)$

# Tema 1

# Las Funciones y sus Gráficas

## Ejercicios Resueltos

### Ejercicio 1

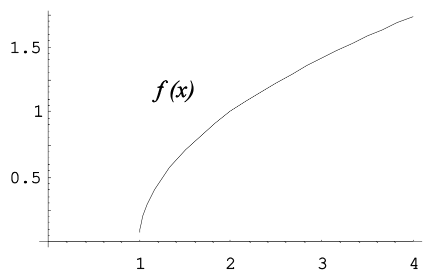
Halla dominio e imagen de las funciones $f(x) = +\sqrt{x-1}$ y $g(x) = \begin{cases} 1-x & si\ x < 1 \\ +\sqrt{x-1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

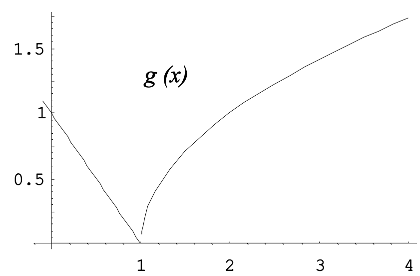
**Solución:**

Como $+\sqrt{x-1}$ no está definido si $x - 1 < 0$, es decir, si $x < 1 \Rightarrow D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 1\}$
El recorrido o imagen será el conjunto de todos los reales positivos incluído el cero.

La función $g(x)$ está definida tanto para los $x < 1$ como para los $x \geq 1$, luego $D(g) = \mathbb{R}$. En la porción $x \geq 1$ del dominio, la función se comporta como $f(x)$ y para los $x < 1$, el valor de $1 - x$ es positivo y, por tanto, el recorrido de la función es $[0, \infty)$.

Estas conclusiones pueden visualizarse en las gráficas siguientes:




### Ejercicio 2

¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones del ejercicio anterior? ¿Presentan algún extremo local?

**Solución:**

La función $f(x)$ es creciente en todo su dominio, es decir, en $[1, \infty)$. El mínimo se alcanza en el punto $(1, 0)$ y el máximo no se alcanza porque crece indefinidamente. Puede decirse también que está acotada inferior pero no superiormente.

La función $g(x)$ es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$. No tiene máximo, y el mínimo coincide con el de la función $f(x)$.

Nota: En el Tema 4 se estudia la caracterización del crecimiento/decrecimiento de una función por el signo de su derivada. También se dan criterios para el estudio de los extremos locales.

**Ejercicio 3**

Sabiendo que $-1 \leq \sin x \leq 1$ , $\forall x \in \mathbb{R}$, halla el dominio de la función $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{x+1}$

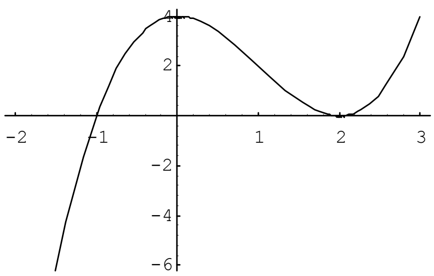
**Solución:**

Si $y = arcsin \dfrac{x}{x+1}$ significa que $\sin y = \dfrac{x}{x+1}$ por lo que deberá ser $-1 \leq \dfrac{x}{x+1} \leq 1$ ó, lo que es lo mismo, $-x - 1 \leq x \leq x + 1$ . La primera parte de la desigualdad se verifica siempre que $-1 \leq 2x$ y la segunda para cualquier valor de $x$. Luego $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1/2\} = [-1/2, \infty)$

**Ejercicio 4**

Observando la siguiente gráfica, que corresponde a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos.

**Solución:**



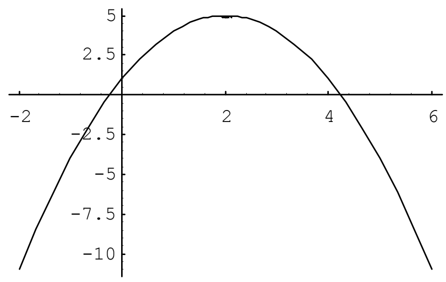

Crece en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
Decrece en $(0, 2)$
Máximo local en el punto de coordenadas $(0, 4)$
Mínimo local en el punto de coordenadas $(2, 0)$

**Ejercicio 5**

¿Presenta la función $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ algún extremo en $x_0 = 2$?

**Solución:**

La función puede expresarse como $f(x) = -(x-2)^2 + 5$, con lo que si $x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ tomará el mayor valor posible (en cualquier otro caso al 5 se le restaría una cantidad positiva). Luego el punto (0, 5) es un máximo absoluto.

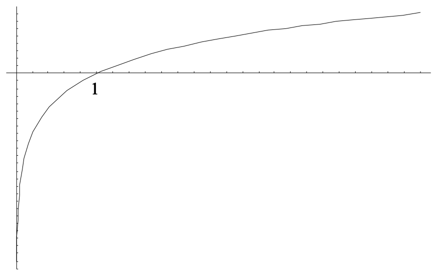



**Ejercicio 6**

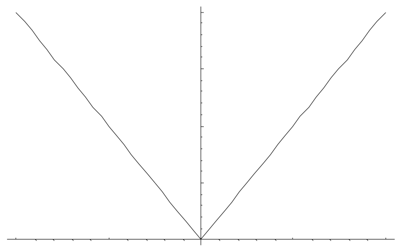
Estudia la acotación de las funciones  a) $f(x) = Lx$  b) $f(x) = |x|$  c) $f(x) = sinx$

**Solución:**

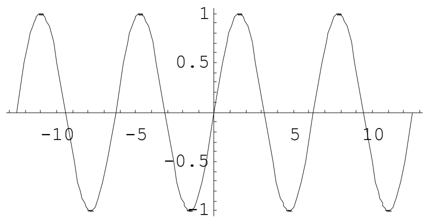
a) $f(x) = Lx$ no está acotada ni inferior ni superiormente. Como se puede observar en la gráfica, si $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$ y si $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$




b) $f(x) = |x|$ está acotada inferiormente porque $0 \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$. Pero no está acotada superiormente, porque si $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$



c) $f(x) = sinx$ está acotada, es decir, inferior y superiormente porque: $-1 \leq sinx \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.



**Ejercicio 7**

Comprueba que las funciones $f(x) = 2x^3 - 1$ y $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$ son inversas.

**Solución:**

Se verá que al componerlas se obtiene la función identidad:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x^3 - 1) = \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = x$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 = (x+1) - 1 = x$$

**Ejercicio 8**

Dada la función $f(x) = +\sqrt{2x - 3}$ halla su inversa, si existe.

**Solución:**

Si $y = +\sqrt{2x - 3} \Rightarrow y^2 = 2x - 3 \Rightarrow y^2 + 3 = 2x \Rightarrow \frac{y^2 + 3}{2} = x$. Por tanto, la inversa será $f^{-1}(y) = \frac{y^2 + 3}{2}$ o, lo que es lo mismo, $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 3}{2}$

**Ejercicio 9**

Indica si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ b) $g(x) = x^4 + |x|$ c) $h(x) = \sin(x) + \cos(x)$

**Solución:**

a) $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$ , luego es impar y su gráfica simétrica respecto al origen.

b) $g(-x) = (-x)^4 + |-x| = x^4 + |x| = g(x)$ luego es par y su gráfica simétrica respecto al eje Oy.

c) $h(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin(x) + \cos(x)$, por tanto no es par ni impar porque no coincide con la función original ni con su opuesta. Su gráfica no presenta simetrías.

**Ejercicio 10**

¿Presenta alguna simetría la función $f(x) = L\left(\frac{2 - x}{2 + x}\right)$ ?

**Solución:**

Como $f(-x) = L\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) = L\left[\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{-1}\right] = -L\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right) = -f(x)$, la función es impar y su gráfica simétrica con respecto al origen de coordenadas.

## Ejercicios Propuestos

(Las soluciones se encuentran al final)

1.- Dada la función $f(x) = x^2 + 7$, calcula: $f(a-1)$ y $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $\Delta x \neq 0$

2.- Halla el dominio de $f(x) = L\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

3.- Estudia las posibles simetrías de las funciones a) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + x}$ b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

4.- Demuestra que $f(x) + f(-x)$ es una función par y que $f(x) - f(-x)$ es impar.

5.- Determina el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{L(1-x)} + \sqrt{x+2}$

6.- Halla los valores de $a$ y $b$ para los que $f(x) = ax^2 + bx + 5$ verifica $f(x+1) = f(x) + 8x + 3$

7.- Sean las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \sin x$

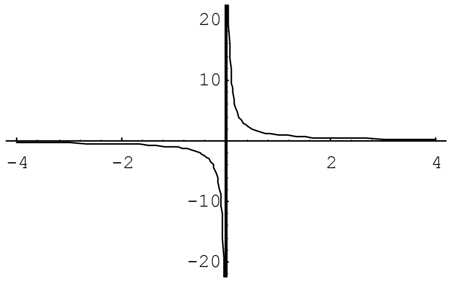
a) Determina las funciones compuestas $(g \circ f)$, $(f \circ g)$, $(f \circ h)$, $(f \circ g \circ h)$

b) Expresa en función de $f$, $g$ y $h$ las funciones $2^{\sin x}$, $\sin(2^x)$, $\sin(x^2)$, $2^{2^x}$ .

8.- Halla la función inversa de cada una de las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$, $g(x) = \arctan(3x)$, $h(x) = L\left(\dfrac{x}{2}\right)$

9.- Estudia las simetrías, intervalos de crecimiento y decrecimiento y acotación de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuya gráfica es:




10.- Expresa la función $f(x) = 3 - 2x + x^4 - 5x^7$ como suma de una función par y otra impar.

## Soluciones:

1.- $f(a - 1) = a^2 - 2a + 8$ y $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

2.- $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

3.- a) impar b) par

5.- $(-2, 0) \cup (0, 1)$

6.- $a = 4$ y $b = -1$

7.- a) $(g \circ f) = 2^{x^2}$, $(f \circ g) = 2^{2x}$, $(f \circ h) = \sin^2 x$, $(f \circ g \circ h) = 2^{2\sin x}$

b) $2^{\sin x} = g \circ h$, $\sin(2^x) = h \circ g$, $\sin(x^2) = h \circ f$, $2^{2^x} = g \circ g$

8.- $f^{-1}(x) = f(x)$, $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}\tan x$, $h^{-1}(x) = 2e^x$

9.- Es impar, decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y no está acotada inferior ni superiormente.

10.- $f(x) = p(x) + i(x)$ siendo $p(x) = 3 + x^4$, $i(x) = -2x - 5x^7$

# Tema 2

# Límites de Funciones

## 2.1.- Definición de Límite

**Idea de límite de una función en un punto:**

Sea la función $f(x) = x^2$. Si $x$ tiende a 2, ¿a qué valor se aproxima $f(x)$ ? Construyendo una tabla de valores próximos a 2, anteriores ($x \to 2^-$) y posteriores ($x \to 2^+$) :

| $x \to 2^-$ | 1.8 | 1.9 | 1.99 | 1.999 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) \to$ | 3.24 | 3.61 | 3.96 | 3.996 |

| $x \to 2^+$ | 2.2 | 2.1 | 2.01 | 2.001 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) \to$ | 4.84 | 4.41 | 4.04 | 4.004 |

Luego, cuando x se aproxima a 2 tanto por la derecha como por la izquierda, los valores de $f(x)$ se acercan cada vez más a 4. Esta idea se suele expresar así:

$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$ (límite lateral por la izquierda)

$\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$ (límite lateral por la derecha)

Cuando estos límites laterales existen y son iguales se dice que existe el límite en ese punto y se escribe $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$, aunque no está definida en $x_0 = 1$ pueden calcularse los valores que toma la función cerca de ese valor:

| $x$ | 0.5 | 0.75 | 0.9 | 0.99 | 0.999 | **1** | 1.001 | 1.01 | 1.1 | 1.25 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.75 | 2.31 | 2.71 | 2.97 | 2.99 | **?** | 3.003 | 3.03 | 3.31 | 3.81 | 4.75 |

Se observa que a medida que los originales se aproximan a 1, tanto para valores menores como mayores que 1, las imágenes se acercan a 3. Podría decirse que el límite es $l = 3$.

**Límites Finitos**

Intuitivamente, un número real $l$ es el **Límite Finito** de una función $f$ en un punto $x_0$ y se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si para los valores de la variable $x$ cercanos al punto $x_0$ la función $f$, que no tiene por qué estar definida en $x_0$, toma valores $f(x)$ que se van aproximando al valor de $l$. Es decir, $l$ es el límite de $f$ en $x_0$ si se puede hacer que $|f(x) - l|$ sea "tan pequeño como se quiera" (menor que un $\varepsilon$ dado) sin más que hacer $|x - x_0|$ "suficientemente pequeño". Formalmente, se escribirá:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \left[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ / \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon\right]$$

**Límites Laterales**

Cuando se cumple la definición de límite para valores de $x$ cercanos al punto $x_0$ pero anteriores a $x_0$ se hablará del **Límite por la Izquierda** que se denotará por $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$. Es decir: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \left[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ / \ x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon\right]$

Análogamente se hablaría de **Límite por la Derecha** si se cumple la definición de límite para valores de $x$ cercanos al punto $x_0$ pero posteriores a $x_0$ **,** escribiendo:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \left[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ / \ x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon\right]$$

Se deduce de las definiciones, que si coinciden los límites por la izquierda y por la derecha en un punto, la función tiene límite en ese punto. Este resultado proporciona un método práctico para decidir sobre la existencia de un límite.

En el ejemplo anterior, para la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ se observaba, mediante la tabla de valores, que tanto el límite por la izquierda como por la derecha coincidían.

La definición de límite se puede generalizar para hablar de límite infinito de una función en un punto y para hablar de límite en el infinito.

**Límites Infinitos**

Se dirá que $+\infty$ es límite de una función en el punto $x_0$ y se escribirá $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si, a medida que nos acercamos al punto $x_0$ los valores de la función se hacen tan grandes como queramos, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{R}^+,\ \exists\, \delta > 0 \ /\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > k$$

Se dirá que $-\infty$ es límite de una función en el punto $x_0$ y se escribirá $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si, a medida que nos acercamos al punto $x_0$ los valores de la función se hacen tan pequeños como queramos, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left[\forall\, k \in \mathbb{R}^+,\ \exists\, \delta > 0 \ /\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -k\right]$$

En general, se dirá que una función tiene límite $\infty$ (sin precisar el signo) en el punto $x_0$, y se escribirá $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si los valores absolutos de la función se hacen tan grandes como queramos, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \left[\forall\, k \in \mathbb{R}^+,\ \exists\, \delta > 0 \ /\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > k\right]$$

Cuando $f$ presenta en un punto $x_0$ un límite infinito, se dirá que la recta de ecuación $x = x_0$ es una ASINTOTA VERTICAL de la gráfica de la función. (Véase Tema 4)

**Límites en el Infinito**

Se dirá que $l$ el es límite de una función en $+\infty$ y se escribirá $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si se puede hacer que los valores de la función se acerquen a $l$ para valores de $x$ suficientemente grandes, es decir:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \left[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, H \in \mathbb{R}^+ \ /\ x \geq H \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right]$$

Se dirá que $l$ es el límite de una función en $-\infty$ y se escribirá $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ si se puede hacer que los valores de la función se acerquen a $l$ para valores de $x$ suficientemente pequeños, es decir:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \left[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, H \in \mathbb{R}^+ \ /\ x \leq -H \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right]$$

Cuando $f$ presenta en un límite $l$ en el infinito, se dirá que la recta de ecuación $y = l$ es una ASINTOTA HORIZONTAL de la gráfica de la función. (Véase Tema 4)

**Límites Infinitos en el Infinito**

Se dice que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si para cualquier *k* positivo, se puede encontrar un *H* positivo tal que $f(x) > k, \ \forall x > H$.

Se dice que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si para cualquier *k* positivo, se puede encontrar un *H* positivo tal que $f(x) < -k, \ \forall x > H$.

Se dice que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si para cualquier *k* positivo, se puede encontrar un *H* positivo tal que $f(x) > k, \ \forall x < -H$.

Se dice que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si para cualquier *k* positivo, se puede encontrar un *H* positivo tal que $f(x) < -k, \ \forall x < -H$.

## 2.2.- Propiedades y Operaciones

Propiedades:

1.- Si existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ entonces es único.

2.- Si una función *f* tiene límite finito en un punto, está acotada en un entorno de ese punto. Es decir, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que f está acotada en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

3.- Si una función *f* tiene límite distinto de cero en un punto, entonces existe un entorno del punto en el que los valores que toma la función tienen el mismo signo que el límite.

4.- Una función comprendida entre otras dos funciones con el mismo límite, también tiene ese límite. Es decir,si *f, g, h* son tres funciones tales que $g(x) \le f(x) \le h(x) \ (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$, entonces existe el $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

(Un ejemplo práctico de aplicación de esta propiedad se ve en el ejercicio resuelto nº 3).

Operaciones con Límites:

Si existe el $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y existe el $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, entonces:

- existe el $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x)$ y vale $l \pm m$
- existe el $\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x)$ y vale $l \,.\, m$
- existe el $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ y vale $\frac{l}{m}$ siempre que $m \neq 0$
- existe el $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$ y vale $l^m$
- existe el $\lim_{x \to x_0} \log f(x)$ y vale $\log l$

## 2.3.-Infinitésimos e Infinitos

Se dirá que una función $f$ es un **Infinitésimo** en un punto $x_0$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Desde el punto de vista intuitivo, un infinitésimo es una función que se aproxima a cero tanto como se quiera, sin más que aproximar $x$ al punto $x_0$ .

Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ es un infinitésimo en el 0 y $f(x) = Lx$ es un infinitésimo en el 1.

Se dirá que una función $f$ es un **Infinito** en un punto $x_0$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
Desde el punto de vista intuitivo, un infinito es una función que crece (decrece) tanto como se quiera, sin más que aproximar $x$ al punto $x_0$ .

Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es un infinito en el 0 y la función dada por $f(x) = e^{\frac{1}{(x-2)^2}}$ es un infinito en el 2.

Propiedades:

1.- Si $f$ es un infinitésimo en un punto $x_0$ y $g$ está acotada en un entorno de $x_0$ , entonces su producto $f\,g$ es es un infinitésimo en $x_0$ .

2.- Si $f$ es un infinito en $x_0$ y $g$ está acotada en un entorno de $x_0$ , entonces su suma $f+g$ es es un infinito en $x_0$ .

3.- La función $f$ es un infinito en $x_0$ si y sólo si $\dfrac{1}{f}$ es un infinitésimo en $x_0$ .

## 2.4.- Cálculo de Límites Sencillos. Indeterminaciones.

Teniendo en cuenta las propiedades relativas a las operaciones, y dos límites obvios: $\lim_{x \to x_0} k = k$ ( $k$ función constante) y $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ , puede concluirse que si *P(x)* es un polinomio, $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$. En general, si $f$ es una función continua, también se verifica que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Véase Tema 3).

Al operar algebraicamente con límites se presentan siete casos de indeterminación en los que el límite resultante no queda determinado por los límites de las funciones que intervienen en la operación, sino que depende además de cómo éstas tiendan a sus límites, pudiendo incluso no existir. Se indicarán estas indeterminaciones o límites indeterminados por los símbolos:

$(\infty - \infty)$ , $(0 \cdot \infty)$ , $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ , $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ , $(1^{\infty})$, $(0^{0})$, $(\infty^{0})$

a) Indeterminación $\boxed{\infty - \infty}$ :

En gran parte de los casos basta realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x^2}{x^2-1}\right) = \left(\dfrac{2}{0} - \dfrac{1}{0}\right) = (\infty - \infty)$ . Operando queda:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2-1}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right) = \left(\frac{3}{0}\right) = \infty$$

En otros casos, sobre todo en los que intervienen radicales, basta multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} =$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(x^2 - (x^2-1)\right)}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

b) Indeterminación $\boxed{0 \cdot \infty}$ :

En gran parte de los casos basta realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2}{x-1} \cdot \dfrac{x+1}{x^2}\right) = (0 \cdot \infty) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = -1$

c) Indeterminación $\boxed{\dfrac{0}{0}}$ :

Cuando solo aparecen funciones racionales, basta descomponer factorialmente el numerador y el denominador.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3}{2}$

Si intervienen radicales, se multiplica y divide por la expresión radical conjugada.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{1 - \sqrt{1-x}}\right) = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x\,(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})\,(1 + \sqrt{1-x})}\right) =$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x + x\sqrt{1-x}}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(1 + \sqrt{1-x}\right) = 2$$

d) Indeterminación $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ :

En muchos casos basta dividir el numerador y el denominador por la mayor potencia de la variable $x$, tanto si las expresiones son racionales como radicales.

Ejemplo: $\lim_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + x - 1}{x^2 + 1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{4 + \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 4$

En el caso más simple que es el de las funciones racionales (cocientes de polinomios) se puede resumir en tres casos:

- Grado del numerador mayor que el del denominador, límite infinito.
- Grado del numerador menor que el del denominador, límite cero.
- Grados iguales, el límite coincide con el cociente de los coeficientes principales.

e) Indeterminaciones $\boxed{\infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty}$:

Para resolver estos límites deberá tenerse en cuenta que $f(x)^{g(x)} = e^{L\left[f(x)^{g(x)}\right]} = e^{g(x)L[f(x)]}$, de donde resulta que $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to x_0} g(x)L[f(x)]}$. Asi se transforma en un producto.

En el caso de la indeterminación $\boxed{1^\infty}$, o sea si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$ también es cierto que $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to x_0} g(x)[f(x) - 1]}$

Ejemplo: $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^{\frac{1 + 3x^2}{x^2}} = (1^\infty) = \lim_{x \to 0} e^{\left(\frac{1 + 3x^2}{x^2}\right)\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2} - 1\right)} =$

$$\lim_{x \to 0} e^{\left(\frac{1 + 3x^2}{x^2}\right)\left(\frac{2x^2}{1 - x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} e^{\left(\frac{2 + 6x^2}{1 - x^2}\right)} = e^2$$

En el tema 4 se estudiará la regla de L´Hôpital-Bernoulli que permitirá, utilizando las derivadas de las funciones que intervienen en el límite, la resolución de cualquiera de los 7 casos de indeterminación.

# Tema 2

# Límites de Funciones

## Ejercicios Resueltos

### Ejercicio 1

Demuestra, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x \to 2} (x^2 + x + 2) = 8$

**Solución:**

$\lim_{x \to 2} (x^2 + x + 2) = 8$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 + x + 2 - 8| < \varepsilon$

Pero $|x^2 + x + 2 - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 + x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x - 2)(x + 3)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2||x + 3| < \varepsilon$

Puede tomarse $\delta < 1$ para simplificar los cálculos, y con $|x - 2| < \delta$ se tiene $x \in (1, 3)$ y $|x + 3| < 6$. Entonces $|x - 2||x + 3| < 6\delta$. Tomando $\delta =$ mínimo $\{1, \varepsilon/6\}$, queda demostrado que $|x^2 + x - 6| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - 2| < \delta$.

### Ejercicio 2

Demuestra, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{(x - 1)^2} = +\infty$

**Solución:**

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall k \in \mathbb{R}^+, \exists \delta > 0 \;/\; |x - 1| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{(x - 1)^2} > k\right]$$

Pero, $\dfrac{1}{(x - 1)^2} > k \Leftrightarrow 0 < (x - 1)^2 < \dfrac{1}{k}$ . Por otra parte, si $0 < |x - 1| < \delta$ será $|x - 1|^2 < \delta^2$, de

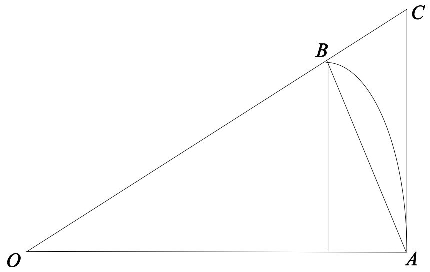
donde $\dfrac{1}{|x - 1|^2} > \dfrac{1}{\delta^2}$ Basta tomar por tanto $\delta^2 < \dfrac{1}{k}$ , o lo que es lo mismo, $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. De esta forma se consigue que si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $\dfrac{1}{|x - 1|^2} > \dfrac{1}{\delta^2} > k$

**Ejercicio 3**

Demuestra que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

**Solución:**

Se probará utilizando la propiedad 4 del apartado 2.2.




En la figura puede observarse que :

área triángulo OAB < área sector OAB < área triángulo OAC

Si $x$ es la medida en radianes del arco AB y el radio es OA = 1, resulta: $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$

Entonces para todo $x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ : $\sin x < x < \tan x$

Y por tanto $\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\tan x}$ . Multiplicando por $\sin x > 0$ se obtiene $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ desigualdad ésta que teniendo en cuenta que todas las funciones que intervienen son pares, es válida para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ el $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ por ser $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

**Ejercicio 4**

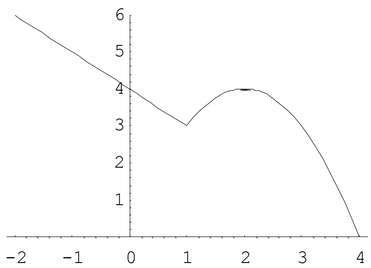
¿Existe el límite de $f(x) = \begin{cases} 4 - x & si\ x < 1 \\ 4x - x^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ cuando $x$ tiende a 1?

**Solución:**

Calculando los límites laterales:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (4 - x) = 4 - 1 = 3$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (4x - x^2) = 4 - 1 = 3$

Puede concluirse, por tanto que existe el límite y vale $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$




En la gráfica puede observarse las dos partes diferentes que constituyen la función, a la izquierda del 1 una recta y a su derecha una parábola, pero en el 1 toman el mismo valor.

**Ejercicio 5**

Estudia la existencia del $\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{|x|}{x}\right)$

**Solución:**

Teniendo en cuenta que $|x| = x$ si $x \to 0^+$ y $|x| = -x$ si $x \to 0^-$, se tiene:

$$\lim_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{-x}{x}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{x}{x}\right) = 1 - 1 = 0$$

Los límites laterales existen, pero como no son iguales se concluye que no existe el límite.

**Ejercicio 6**

Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$ c) $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 3}\right)$

**Solución:**

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{(3 + x)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (3 + x) = 5$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1 + x} - 1)(\sqrt{1 + x} + 1)}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{1 + x} + 1)} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 3}\right) = (-\infty + \infty) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 3}\right)\left(x - \sqrt{x^2 + 3}\right)}{\left(x - \sqrt{x^2 + 3}\right)}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{\left(x - \sqrt{x^2 + 3}\right)} = \left(\frac{-3}{-\infty}\right) = 0$

**Ejercicio 7**

Calcula el valor de *a* para que $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a}\right)^x = 4$

**Solución:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x} = \left(1^{\infty}\right) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)x\right]} \square = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x+a-x+a}{x-a}\right)x\right]} \square = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2ax}{x-a}\right)} = e^{2a}$$

Y para que $e^{2a} = 4 \;\Rightarrow\; 2a = L4 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2}L4 = L(4^{1/2}) = L\sqrt{4} = L2$

**Ejercicio 8**

Halla las asíntotas horizontales y verticales de $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x}$

**Solución:**

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x} = 2 \;\Rightarrow\; y = 2$ es una asíntota horizontal

Y por ser $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x} = \infty \;\Rightarrow\; x = 0\;,\; x = 2$ son asíntotas verticales.

**Ejercicio 9**

Calcula el $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$

**Solución:**

Al igual que para la diferencia de cuadrados se tiene que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, para la diferencia de cubos es $a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a-b)$. Por tanto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{1^3-(\sqrt[3]{x})^3}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{1} = 3$$

**Ejercicio 10**

¿Para qué valores del parámetro *a* existe el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si\;\; x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + x + 1 & si\;\; x > 0 \end{cases}$

**Solución:**

Hallando los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{ax} = e^0 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} + x + 1 = 1$$

Por tanto, el límite existe y vale $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ para cualquier valor del parámetro.

## Ejercicios Propuestos

(Las soluciones se encuentran al final)

1.- Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, calcula $\lim_{x \to a} \frac{\sin(x - a)}{x^2 - a^2}$

2.- Pon un ejemplo de una función $f(x)$ que verifique $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

3.- Calcula los siguientes límites, si existen:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ b) $\lim_{x \to \infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1} \right)$

4.- Definiendo la función "parte entera" *E(x)* = mayor número entero menor o igual que x, demuestra que no existe el $\lim_{x \to 3} E(x)$ .

5.- ¿Existe el $\lim_{x \to -4} \frac{|x + 4|}{x + 4}$ ?

6.- Demuestra, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x \to 3} (6x + 1) = 19$

7.- ¿Con qué proximidad a 2 se debe tomar $x$ para que $8x - 5$ se encuentre a una distancia de 11 menor que a) 0.01 b) 0.001?

8.- Indica la indeterminación que presentan y resuelve los siguientes límites en el infinito:

a) $\lim_{x \to \infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ b) $\lim_{x \to \infty} \left( \sqrt{\frac{x + 2}{x + 1}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x + 1}}}$

9.- Comprueba que $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = 1$

10.- Halla las asíntotas horizontales y verticales de $f(x) = L\left( \frac{x + 1}{x - 1} \right)$

## Soluciones:

1.- $\frac{1}{2a}$

2.- Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

3.- a) 1/2 b) 3/2

4.- El límite no existe por ser distintos los límites laterales.

5.- El límite no existe por ser distintos los límites laterales.

7.- a) $\delta < \frac{0.01}{8} = 0.00125$ b) $\delta < \frac{0.001}{8} = 0.000125$

8.- a) 1/2 b) 1

10.- y=0, x=1, x=-1

# Tema 3

# Continuidad

## 3.1.- Definición de Continuidad

Una función se dice **continua en un punto** de su dominio, si existe el límite de la función y coincide con el valor de la función en dicho punto. Es decir:

$$f \text{ es continua en un punto } x_0 \text{ si : } \begin{cases} \text{existe } f(x_0) \\ \text{existe el } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Se dirá **continua por la izquierda** cuando el valor de la función en el punto coincida con el límite por la izquierda, y **continua por la derecha** cuando sean iguales el valor de la función y el límite por la derecha. Es evidente que una función será continua en un punto cuando lo sea a la vez por la derecha y por la izquierda.

Se dirá **continua en un intervalo abierto** $(a, b)$ cuando es continua en cada punto de dicho intervalo y **continua en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si además de ser continua en el abierto $(a, b)$ es continua por la derecha en $a$ y por la izquierda en $b$.

Son funciones continuas las polinómicas, las racionales (excepto en los ceros del denominador), las funciones trigonométricas, las exponenciales, las logarítmicas,... y las composiciones de éllas.

## 3.2.- Operaciones y Composición de Funciones Continuas

Como la continuidad lleva consigo la existencia de límite finito de una función en un punto, todas las propiedades de límites finitos pueden concluirse para funciones continuas. Por tanto, si $f$ y $g$ son dos funciones continua en un punto $x_0$ , entonces:

$f(x) \pm g(x)$ es continua en $x_0$

$f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x_0$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x_0$ siempre que $g(x_0) \neq 0$

$f(x)^{g(x)}$ es continua en $x_0$

Si $f(x)$ es continua en $x_0$ y $g(x)$ es continua en $y = f(x_0)$, entonces la función compuesta $(g \circ f)(x)$ es continua en $x_0$.

## 3.3.- Tipos de Discontinuidades

Cuando una función no sea continua en un punto, se dirá **discontinua** en dicho punto. Pueden presentarse los siguientes tipos de discontinuidades:

**Discontinuidad Evitable**: la función tiene límite en el punto, pero éste no coincide con el valor de la función, bien por ser distinto o por no estar definido. Se llama evitable porque bastaría darle ese valor del límite para que hubiese continuidad. Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero existe el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (véase el ejercicio 3 del Tema 2). Si se define $f(0) = 1$, se trata de una función continua.

**Discontinuidad de Primera Especie:** existen los límites laterales, pero o son distintos, en cuyo caso se llama **Discontinuidad de Salto** (el **Salto** es la diferencia entre los límites laterales, pudiendo ser finito o infinito) o son infinitos del mismo signo que es llamada **Discontinuidad Infinita**.

Cuando al menos uno de los límites laterales es infinito se le puede llamar también **Discontinuidad Asintótica**.

Ejemplos:

1) $f(x) = \begin{cases} 4 - x & si\ x < 1 \\ 4x + x^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 1$ porque el límite por la izquierda vale 3 y el límite por la derecha es igual a 5. El salto es 5-3 = 2.

2) $f(x) = \begin{cases} 4 - x & si\ x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x - 2} & si\ x > 2 \end{cases}$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$ porque el límite por la izquierda vale 2 y el límite por la derecha es igual a $+\infty$. El salto es $\infty$.

3) También presenta discontinuidad de salto infinito la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$ porque los límites laterales son infinitos de signos contrarios.

4) La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , en $x = 0$ , presenta discontinuidad infinita porque los límites laterales son infinitos del mismo signo.

**Discontinuidad de Segunda Especie**: se produce cuando no existe al menos uno de los límites laterales. Por ejemplo, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ presenta en $x = 0$ una discontinuidad de este tipo. Cuando la variable *x* se aproxima al cero la función oscila indefinidamente tomando infinitas veces todos los valores comprendidos entre -1 y +1, por tanto no existe el límite.

## 3.4.- Teoremas sobre continuidad

**Teorema de Conservacion del Signo**:

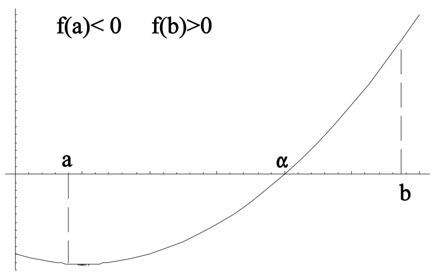
Si *f* es continua en un punto y su valor es positivo (negativo) en ese punto, también será positivo (negativo) en un entorno del punto.

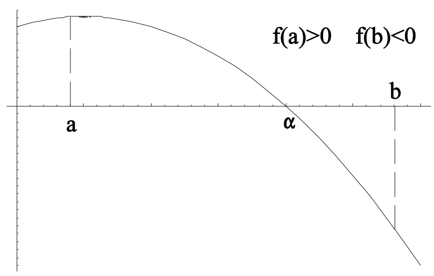
**Teorema de Bolzano:**

Si *f* es una función continua en un intervalo cerrado [*a, b*], y toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo, debe anularse en algún punto interior del intervalo. Es decir:

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua en } [a,\ b] \\ f(a)\,f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \exists\, \alpha \in (a,\ b)\ /\ f(\alpha) = 0$$

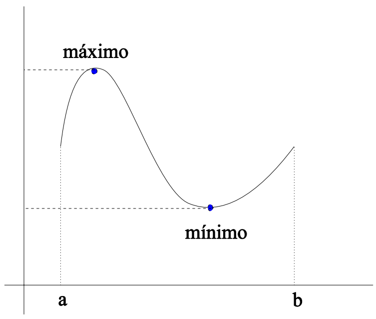
Gráficamente, puede observarse que para pasar del semiplano inferior al superior ( o al contrario) sin que el trazo pierda continuidad, necesariamente debe cortarse al eje al menos una vez:

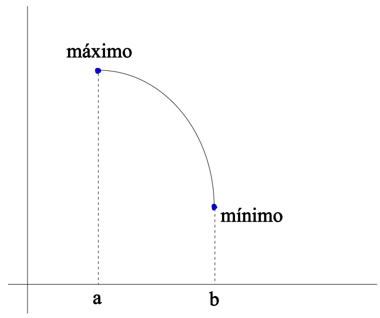


**Teorema de Bolzano-Weierstrass :**

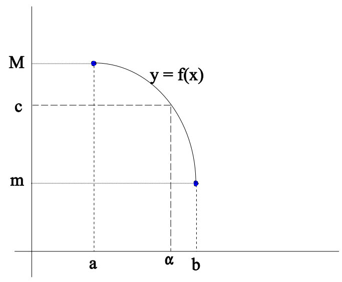
Si f es una función continua en un intervalo cerrado [*a, b*], alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.

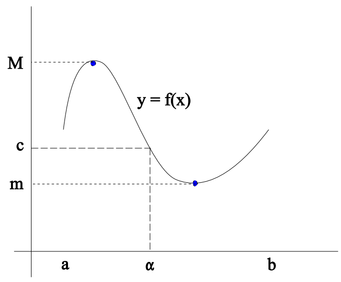



**Teorema de Darboux:**

Si $f$ es una función continua en un intervalo cerrado [*a, b*], alcanza todos los valores comprendidos entre el mínimo y el máximo de $f$ en [a, b]. Es decir, si $m$ y $M$ son, respectivamente, el mínimo y el máximo de $f$ en [a, b], dado un valor $c$ tal que $m < c < M$, entonces deberá existir al menos un $\alpha \in [a, b]$ tal que $c = f(\alpha)$



# Tema 3

# Continuidad

## Ejercicios Resueltos

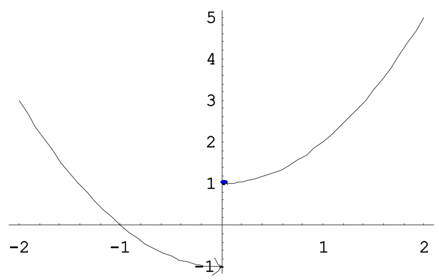
**Ejercicio 1**

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{|x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

**Solución:**

La función puede expresarse como $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ x^2 + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

Para representarla basta considerar dos arcos de parábola:




Es evidente la continuidad en $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ \infty)$
En el punto $x_0 = 0$, se tiene:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$$

Por tanto, $f$ es continua por la derecha en $x_0 = 0$, pero no es continua presentando una discontinuidad de salto, con salto (diferencia entre los límites laterales) igual a 2.

**Ejercicio 2**

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x < 1 \\ \sqrt{x+1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

**Solución:**

La función presenta en $x_0 = 0$ (donde no está definida) una discontinuidad de salto infinito por ser los límites laterales infinitos de signos contrarios: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

En $x_0 = 1$, se tiene que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2} = f(1)$, luego solo se tiene continuidad por la derecha. La discontinuidad es de salto finito.

Por tanto, la función es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

**Ejercicio 3**

Halla los valores de los parámetros $a$ y $b$ que hacen continua en $\mathbb{R}$ a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -3\sin x & si\ x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & si\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & si\ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

**Solución:**

Por la propia definición la función ya es continua en $(-\infty, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \infty)$. Para que sea continua en $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ y en en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ deben coincidir los límites laterales, es decir:

En $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, debe ser $-3\,sin(-\frac{\pi}{2}) = a\,sin(-\frac{\pi}{2}) + b \Rightarrow 3 = -a + b$

Y en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , $a\,sin(\frac{\pi}{2}) + b = cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow a + b = 0$

De ambos resultados se concluye que los valores buscados son $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{2}$

**Ejercicio 4**

Las funciones $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ y $g(x) = x\sin\frac{\pi}{x}$ , no están definidas en el punto $x_0 = 0$. ¿Qué discontinuidad presentan en $x_0 = 0$? ¿Pueden definirse en 0 de manera que sean continuas en $\mathbb{R}$ ?

**Solución:**

$f(x) = sin\frac{\pi}{x}$ presenta en $x_0 = 0$ una discontinuidad de segunda especie porque no existe ninguno de los límites laterales. Por tanto, $f(x) = sin\frac{\pi}{x}$ será continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ siendo imposible ampliar su dominio al 0.

Como $-1 \leq sin\frac{\pi}{x} \leq 1$ el $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} x\,sin\frac{\pi}{x} = 0 \cdot acotada = 0$ y, ya que existe el límite, puede definirse la función asignándole ese valor, es decir, $g(x) = \begin{cases} x\,sin\frac{\pi}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ consiguiendo así hacerla continua en $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 5**

¿Qué tipo de discontinuidad presenta en $x_0 = 0$ la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ?

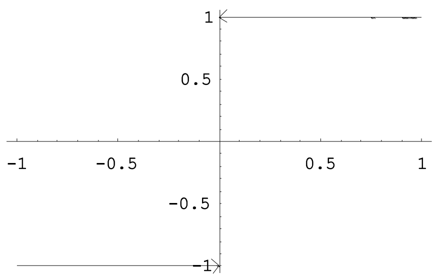
**Solución:**

Teniendo en cuenta que al aproximarnos al cero se tienen valores negativos a su izquierda y positivos a su derecha, los límites laterales de $\frac{1}{x}$ son $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, por tanto $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e^{\infty} = \infty$. Se trata de una discontinuidad de salto infinito (límites laterales diferentes y uno de ellos es ∞)

**Ejercicio 6**

Representa la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ . Cumple el teorema de Bolzano en el intervalo [-1, 1]?

**Solución:**




Aunque toma valores de signos contrarios en los extremos del intervalo, no cumple el teorema de Bolzano por no ser continua en el punto $x = 0 \in (-1, 1)$

**Ejercicio 7**

¿Existe algún número real igual a su cubo menos una unidad ?

**Solución:**

El número buscado debe satisfacer la ecuación $x = x^3 - 1 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 = 0$. Considerando $f(x) = x^3 - x - 1$ , por ser continua en ℝ y en particular en [1, 2], como $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 5 > 0$, por el teorema de Bolzano se concluye que debe existir un número $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f(\alpha) = 0$, es decir, tal que $\alpha = \alpha^3 - 1$ .

**Ejercicio 8**

Aplica el Teorema de Bolzano para probar que las gráficas de $f(x) = Lx$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y localízalo aproximadamente.

**Solución:**

Que las gráficas de $f(x) = Lx$ y $g(x) = e^{-x}$ se corten, significa que debe existir un punto en el que coincidan, es decir en el que $Lx - e^{-x} = 0$. Se trata de encontrar un intervalo [a, b] en el que la función $Lx - e^{-x}$ sea continua y tome valores de signos contrarios en los extremos. Eso ocurre tomando a=1 y b=2 porque, además de la continuidad , $L1 - e^{-1} = -0.367879 < 0$ y $L2 - e^{-2} = 0.557812 > 0$.

Nota: Para lograr una aproximación mejor puede subdividirse el intervalo [1, 2] en dos partes iguales [1, 1.5] y [1.5, 2]. Elegir aquel intervalo en el que la función $Lx - e^{-x}$ tome valores de signos contrarios en los extremos, y repetir el proceso las veces que se quiera.

**Ejercicio 9**

Dada la función definida por $f(x) = x^3 + x^2 - \cos \pi x$, demuestra que existe un valor $x = \alpha$ positivo y menor que 2, que verifica que $f(\alpha) = 3$.

**Solución:**

Como $f(0) = -\cos 0 = -1$, $f(2) = 8 + 4 - \cos 2\pi = 11$ y $f(x) = x^3 + x^2 - \cos \pi x$ es continua en el intervalo [0, 2], por el teorema de los valores intermedios, debe alcanzar cualquier valor comprendido entre -1 y 11. En particular, debe existir un valor $x = \alpha \in (0, 2) \, / \, f(\alpha) = 3$.

**Ejercicio 10**

La función $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ es continua en el intervalo (3, 6] , pero sin embargo no alcanza un máximo en dicho intervalo. ¿Contradice el teorema de Bolzano-Weierstrass?

**Solución:**

No lo contradice puesto que el intervalo donde la función es continua no es cerrado.

## Ejercicios Propuestos

(Las soluciones se encuentran al final)

1.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x\,Lx}{x-1}$ definida en $(0,\ 1) \cup (1,\ \infty)$, define $f(0)$ y $f(1)$ para que sea continua en $[0,\ \infty)$

2.- ¿Tiene la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ máximo y mínimo en el intervalo [0, 5] ? ¿Y $g(x) = \dfrac{3}{x+2}$ en el intervalo [-3, 2] ?

3.- Dadas las funciones $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \le 1 \\ x + Lx & si\ x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \le 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$, comprueba que son continuas en $\mathbb{R}$ .

4.- Estudia en $x = 1$ , $x = e$ la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & si\ x \le 0 \\ \sin \dfrac{\pi x}{2} & si\ 0 < x < 1 \\ Lx & si\ 1 \le x \le e \\ \dfrac{x}{e} & si\ x > e \end{cases}$
Determina $a$ para que sea continua en $x = 0$.

5.- Si $f$ y $g$ son las funciones $f(x) = x + 1$ , $\forall x \in \mathbb{R}$ y $g(1) = 0$, $g(x) = 2$ , $\forall x \neq 1$, demuestra que $\lim\limits_{x \to 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$. ¿Contradice este resultado la propiedad sobre la continuidad de la función compuesta?

6.- Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x+3} & si\ x < -3 \\ 1 & si\ x = -3 \\ -e^{\frac{x^2+6x+9}{x+3}} & si\ x > -3 \end{cases}$

7.- ¿Es continua en $x = 0$ la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + 2^{1/x}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ ?

8.- Demuestra que $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \ge 1 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$.

9.- Aplicando el Teorema de Bolzano, comprueba que la ecuación $e^x + 2x = 0$ tiene una raíz real.

10.- ¿Tiene la función $f(x) = x^2$ extremos relativos en $\mathbb{R}$ ? ¿Y en el intervalo [2, 5]?

11.- ¿Es ampliable a $\mathbb{R}$ el dominio de la función $f(x) = 2 + \sin\frac{1}{x}$ ?

12.- Escribe un ejemplo de una función que presente en $x = 0$ una discontinuidad evitable, en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito, y que sea continua en $\mathbb{R}$-{0,1}.

13.- ¿Qué tipo de discontinuidad presenta en $x = 1$ la función $f(x) = \frac{x^2 + 4}{|x - 1|}$ ? ¿Podrías definir $f(1)$ para que fuese continua en $\mathbb{R}$?

14.- ¿Tiene la ecuación $x^5 - 3x = 1$ alguna raíz comprendida entre 1 y 2?

15.- ¿Existe algún valor de $\alpha$ para el que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1} & si\ 0 < x < 1 \\ L[sin^2(x+\alpha)+1] & si\ x \geq 1 \end{cases}$ sea continua en $(0, \infty)$?

## Soluciones:

1.- $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$

2.- $f(x)$ presenta un máximo en el punto (0, 1) y un mínimo en (5, 1/26) ; $g(x)$ no presenta extremos en [-3, 2] porque no es continua en -2 $\in$ (-3, 2).

4.- Para que sea continua en $x = 0$ debe ser $a = 0$. En $x = 1$ es continua por la derecha pero no lo es por la izquierda. Por tanto, no es continua. Presenta discontinuidad de salto finito. En $x = e$ es continua.

5.- No contradice el resultado porque $g$ no es continua en $f(0) = 1$.

6.- Continua en $\mathbb{R}$ - {-3}. En $x = -3$ presenta discontinuidad evitable.

7.- Sí es continua.

10.- En $\mathbb{R}$ tiene mínimo en (0, 0) y no tiene máximo. En el intervalo cerrado [2, 5], como consecuencia del Teorema de Bolzano-Weierstrass, mínimo en el punto (2, 4) y máximo en el punto (5, 25).

11.- No, porque en $x = 0$ presenta discontinuidad <u>no</u> evitable.

12.- $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ x^2 + 1 & si\ 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$

13.- Presenta una discontinuidad infinita (límites laterales infinitos del mismo signo), con lo que el dominio no sería ampliable.

14.- Entre 1 y 2 tiene una raíz.

15.- Sí, por ejemplo $\alpha = -1$.

# Tema 4

# Derivación

## 4.1 Definiciones y propiedades básicas

**Definición 4.1.1** Dada una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que $f$ es **derivable** en un punto $x_0 \in D$, si existe el límite siguiente, que denotaremos $f'(x_0)$ o $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$ :

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

El límite $f'(x_0)$ se denomina **derivada** , respecto de $x$, de la función $f$ en el punto $x_0$.

**Ejemplo 4.1.1** Dada la función $f(x) = \ln x$, su derivada en un punto $x$ será:
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} =$
$\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{x}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right] =$
$\lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$

**Ejemplo 4.1.2** En el caso de $f(x) = \sin x$:
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$
Y, recordando que $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} =$
$\lim_{h\to 0} \frac{\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+h}{2} \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$
Ya que, según se vió en el tema 2 (Ejercicios resueltos):$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Dado que la derivada es un límite, igual que existen límites laterales existen derivadas laterales:

**Definición 4.1.2** Dada una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que en $x_0 \in D$ admite:

**derivada lateral por la derecha**, que denotamos $f'_{x_0^+}(x)$ ó $f'\left(x_0^+\right)$ :

$$f'(x_0^+) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

**derivada lateral por la izquierda,** que denotamos $f'(x_0^-)$ ó $f'_{x_0^-}(x)$ :

$$f'(x_0^-) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

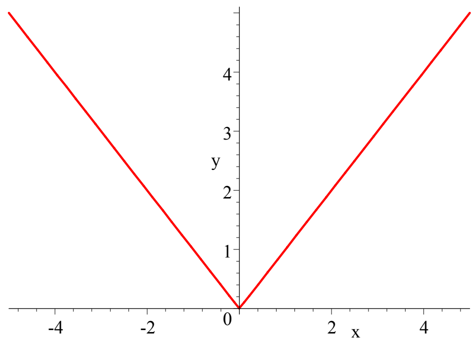
Como en el caso de los límites laterales, la existencia de derivada implica la existencia, e igualdad, de las derivadas laterales. Recíprocamente si existen y coinciden las derivadas laterales, existe la derivada y coincide con ellas.

En caso de que alguna de las derivadas laterales no exista, o en caso de que sean distintas, no existe la derivada. Igual que no existe el límite, si los límites laterales son distintos o alguno de ellos no existe.

**Teorema 4.1.1** *Dada la función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenemos:*

$$f \textit{ derivable en } x \in D \Rightarrow f \textit{ continua en } x.$$

**Nota 4.1.1** El recíproco del teorema precedente es falso, como puede verse, por ejemplo, con la función $f(x) := |x|$, en el punto $x = 0$:




$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{h\to 0} |0+h| = 0 = \lim_{h\to 0} |0-h| = \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

Límites que coinciden con $f(0)$, es decir $f$ es continua en 0, pero:

$$f'(0^+) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \tfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \tfrac{|h|-0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \tfrac{h}{h} = 1$$
$$f'(0^-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \tfrac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \tfrac{|-h|-0}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \tfrac{h}{-h} = -1$$

Las derivadas laterales son diferentes, por lo que $f$ no es derivable en 0.

## 4.2 Interpretación geométrica de la derivada

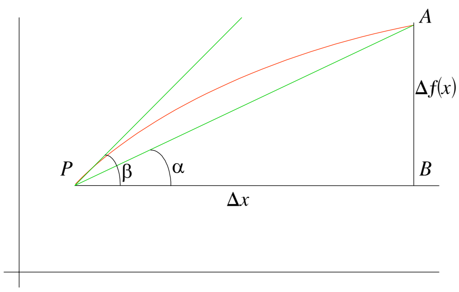
Supuesto que la curva representada en la figura corresponde a la función de ecuación $y = f(x)$, consideremos los puntos:

$$P = (x, f(x)),\ A = (x + \Delta x, f(x) + \Delta f(x))$$

Como podemos ver, considerando el triángulo $APB$: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \tan\alpha$, pero, cuando $\Delta x \to 0$, el punto $A$ tiende a coincidir con el punto $P$, de manera que la cuerda $\overline{AP}$ pasa a ser la tangente a la curva en $P$ y, en el límite, el ángulo $\alpha$ pasa a coincidir con el ángulo $\beta$, así

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \tan\alpha = \tan\beta$$

Por tanto la derivada de una función en un punto es, numéricamente, igual al valor de la tangente **trigonométrica** del ángulo formado, con el sentido positivo del eje $OX$, por la tangente **geométrica** a la curva correspondiente, en el punto dado. En los puntos en que la curva admite dos tangentes distintas, la derivada no existe, pues tendría dos derivadas distintas, una por cada tangente.




## 4.3 Derivadas de las operaciones con funciones

**Teorema 4.3.1** *Dadas dos funciones $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivables en un punto $x \in X$, con derivadas respectivas $f'(x), g'(x)$ en tal punto, se verifica:*

*i.* $f+g$ *es derivable en* $x$*, siendo* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
*ii. Dada una constante* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f$ *es derivable en* $x$ *y* $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
*iii.* $f \cdot g$ *es derivable en* $x$*, siendo* $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.
*iv.* $\frac{f}{g}$ *es derivable en* $x$ *si* $g(x) \neq 0$*, siendo* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

## 4.4 Derivadas de funciones elementales

Veremos algunas, las derivadas de las funciones $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$, se deducen de la derivada de la función $\sin x$.

**Teorema 4.4.1** *Se verifica:*
*i.* $f(x) = cte \Rightarrow f'(x) = 0$
*ii.* $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
*iii.* $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
*iv.* $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$.

## 4.5 Regla de la cadena

(Derivada de la función de función)

Dada una función $g(f)$, en la que $f$ a su vez es función de otra variable $x$, se trata de dar una regla que permita derivar $g$ respecto de $x$.

Por ejemplo si queremos derivar la función $y = \ln \frac{x^2+1}{x^2}$, con respecto a $x$, podemos considerar las funciones $f = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$, y $g = g(f) = \ln f$, el siguiente teorema da una regla para calcular $\frac{dy}{dx}$:

**Teorema 4.5.1** ***(Regla de la cadena)*** *Dadas las funciones:*
$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, derivable en* $x \in A$*, con* $f(A) \subseteq B$
$g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, derivable en* $y = f(x) \in B$
*La función compuesta* $g \circ f$*, es derivable en* $x$*; siendo:*

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$$

En el ejemplo precedente será:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx} = \frac{d\ln f}{df} \cdot \frac{d\frac{x^2+1}{x^2}}{dx} =$$
$$\frac{1}{f}\frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2+1)}{x^4} = \frac{x^2}{x^2+1}\frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x(x^2+1)}$$

Como consecuencia inmediata de este teorema, resultan las reglas usuales de derivación:

$f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow f'(x) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$
$-\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$

$f(x) = u^n(x) \Rightarrow f'(x) = nu^{n-1}(x)\, u'(x)$

$f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$f(x) = a^{u(x)}$, siendo $a$ constante:

$\ln f(x) = u(x) \cdot \ln a \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = u'(x) \ln a \Rightarrow f'(x) = a^{u(x)} \cdot$
$\ln a \cdot u'(x)$

$f(x) = \sin u(x) \Rightarrow f'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x)$.

## 4.6 Derivada de la función inversa

Recordemos que, tal como se definió en el tema relativo a funciones y continuidad, dada una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(A) := B \subset \mathbb{R}$, diremos que $f$ admite una **inversa** $f^{-1} : B \longrightarrow A$, si $f \circ f^{-1}(y) = y$, $\forall y \in B$ es decir $f \circ f^{-1} = 1_B$, y $f^{-1} \circ f(x) = x$,$\forall x \in A$, o $f^{-1} \circ f = 1_A$, donde $1_A$, y $1_B$, representan las funciones identidad de $A$ y $B$ respectivamente, es decir $1_A(x) = x$,$\forall x \in A$, y $1_B(y) = y$,$\forall y \in B$.

$$A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$$

El siguiente teorema da una regla de derivación de la función inversa de una dada:

**Teorema 4.6.1** *Dada una función monótona $f : [a,b] \to [c,d] = f([a,b])$, verificando:*

*i. Es derivable en $[a,b]$*

*ii. Admite inversa $g$*

*Entonces $g$ es derivable en $[c,d]$, siendo: $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$ $\forall y = f(x) \in [c,d]$.*

Debe tenerse cuidado con las variables que utilizan $f$ y $g$:

**Ejemplo 4.6.1** Calcular la derivada de $y = \arcsin x$

Sea $g(x) = \arcsin x$, es la inversa de $f(y) = \sin y$, así aplicando el resultado anterior será:

$g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ *o bien:* $g'(x) = \frac{1}{\cos y}$

Pero la derivada $g'(x)$, debe darse en función de $x$, así que:

$g'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

En casos como el precedente, puede utilizarse otro método: Dada $y = \arccos x$, tenemos: $\cos y = x$, derivando, de acuerdo con la regla de la cadena: $-\sin y \cdot y' = 1$, por tanto:

$y' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

De todo lo anterior podemos deducir una tabla de derivadas:

| función $f(x)$ | función derivada $f'(x)$ |
|---|---|
| $u^n(x)$ | $nu^{n-1}(x)\,u'(x)$ |
| $\ln u(x)$ | $\frac{u'(x)}{u(x)}$ |
| $a^{u(x)}$ | $a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$ |
| $\sin u(x)$ | $\cos u(x) \cdot u'(x)$ |
| $\cos u(x)$ | $-\sin u(x) \cdot u'(x)$ |
| $\tan u(x)$ | $[1+\tan^2 u(x)] \cdot u'(x) = \sec^2 u(x) \cdot u'(x)$ |
| $\cot u(x)$ | $-[1+\cot^2 u(x)]\,u'(x) = -\csc^2 u(x) \cdot u'(x)$ |
| $\sec u(x)$ | $\sec u(x) \cdot \tan u(x) \cdot u'(x)$ |
| $\csc u(x)$ | $\csc u(x) \cdot \cot u(x) \cdot u'(x)$ |
| $\arcsin u(x)$ | $\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$ |
| $\arccos u(x)$ | $\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$ |
| $\arctan u(x)$ | $\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ |

## 4.7 Teoremas de valor medio. Aplicaciones

### 4.7.1 Teoremas de valor medio

**Definición 4.7.1** Dada una función $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que $x_0 \in X$ es un punto **crítico** (a veces **estacionario**) si la función $f$ es derivable en $x_0$ y $f'(x_0) = 0$.

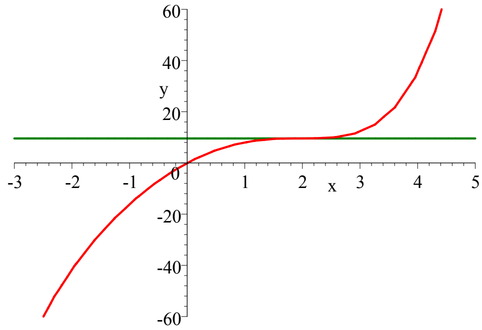
**Teorema 4.7.1** *Dada una función* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *verificando:*

*i.* $f$ *continua en* $[a,b]$

*ii.* $f$ *derivable en* $(a,b)$

*En estas condiciones si* $f$ *tiene un extremo (máximo o mínimo), local en* $x_0 \in (a,b)$ *entonces* $x_0$ *es un punto crítico de* $f$, *es decir* $f'(x_0) = 0$.

**Advertencia 4.7.1** El recíproco del anterior no es cierto, como podemos ver con la función: $f(x) := \frac{x^5}{20} - 4x^2 + 12x$, su derivada $f'(x) = \frac{x^4}{4} - 8x + 12$ se anula para $x = 2$ donde $f$ no tiene extremo




**Teorema 4.7.2** (De **Rolle**):

*Dada una función* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que*

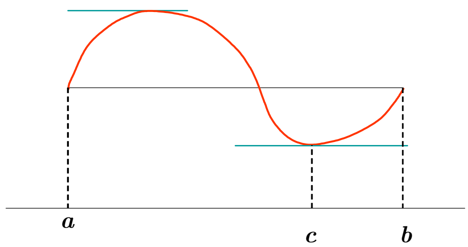
*i.* $f$ *continua en* $[a, b]$

*ii.* $f$ *derivable en* $(a, b)$

*iii.* $f(a) = f(b)$

En estas condiciones existe al menos un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Gráficamente este teorema asegura, de acuerdo con la interpretación geométrica de la derivada, que la curva representativa de la función dada, tiene al menos un punto en el que la tangente es paralela a $OX$ :




**Teorema 4.7.3** *(Del **valor medio**, o de los **incrementos finitos** de **Lagrange**):*

*Dada una función* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que*

*i.* $f$ *continua en* $[a, b]$

*ii.* $f$ *derivable en* $(a, b)$

*En estas condiciones existe un $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

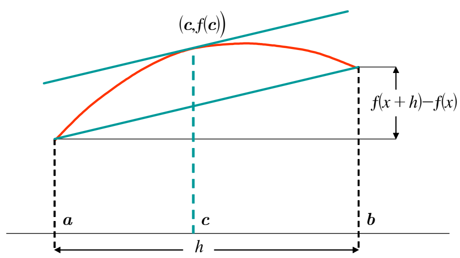
Así en las hipótesis del teorema, podemos escribir:

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, o bien poniendo $a = x$, $b = x + h$, $c = x + \theta h$ con $\theta \in (0, 1)$:x

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h) \text{ o } \Delta f = \Delta x \cdot f'(x + \theta \Delta x)$$

Que es la ***fórmula de los incrementos finitos de Lagrange.***

Esta propiedad tiene una interpretación gráfica: existe un $c \in (a, b)$, tal que la tangente a la curva, representada por $f(x)$, en el punto $(c, f(c))$, es paralela a la cuerda que une $(a, f(a))$, con $(b, f(b))$




**Teorema 4.7.4** (*Del **valor medio generalizado** de **Cauchy***)

*Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que:*

*i. $f, g$ continuas en $[a, b]$*

*ii. $f, g$ derivables en $(a, b)$, con $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$*

*En estas condiciones existe un $c \in (a, b)$, tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

## 4.8 Aplicación al estudio de límites indeterminados

**Teorema 4.8.1** *(regla de **L'Hôpital-Bernoulli**):*

*Dadas dos funciones $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que:*

*i. $f, g$ derivables en $(a, b)$, con $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$*

*ii. Se verifica una de las condiciones:* $\begin{cases} \textit{1.}\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \\ \textit{2.}\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty \end{cases}$

*En tal caso será* $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$*, siempre que exista el* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

El resultado sigue siendo válido si se reemplaza $\lim_{x\to a^+}$ por $\lim_{x\to a^-}$

El resultado anterior permite resolver directamente las indeterminaciones de tipo $\frac{\infty}{\infty}$, o $\frac{0}{0}$. Otras formas de indeterminación se estudiaron en la sección 2.4, de entre las resolubles usando la regla de l'Hôpital-Bernoulli, tenemos:

- Caso $0 \cdot \infty$ :

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, Podemos poner:

$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, que denotando $G(x) = \frac{1}{g(x)}$, resulta:

$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{G(x)}$, y estamos en la forma $\frac{0}{0}$:

En los casos sìguientes utilizamos la transformación, vista ya en 2.4:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

- Caso $0^0$ :

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, la transformación mencionada la transforma en $e^{0\cdot\infty}$, dado que:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = e^{0\cdot(-\infty)}$$

Con lo que estamos en el caso anterior

- Caso $\infty^0$ :

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, esta forma queda:

$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = e^{0\cdot\infty}$

- Caso $1^\infty$ :

$\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, esta forma puede resolverse como la anterior:

$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = e^{\infty\cdot 0}$

O bien tal como se indicó en 2.4, con la transformación $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)[f(x)-1]}$

**Ejemplo 4.8.1** Calcular $\lim_{x\to 2} (x^2-4)\ln(x-2)$

Es del caso $0\cdot\infty$:

$\lim_{x\to 2} (x^2-4)\ln(x-2) = \lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{-2x}{(x^2-4)^2}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)^2}{-2x(x-2)}$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)^2}{-2x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x^2-4)2x}{-2(x-2)-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{0}{-4} = 0$

**Ejemplo 4.8.2** Calcular $\lim_{x\to 2}[\ln(x-2)]^{\left(x^2-4\right)}$

Es del caso $\infty^0$:

$\lim_{x\to 2}[\ln(x-2)]^{\left(x^2-4\right)} = \lim_{x\to 2} e^{\left(x^2-4\right)\ln[\ln(x-2)]} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{\ln[\ln(x-2)]}{\frac{1}{x^2-4}}}$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$\lim_{x\to 2}\frac{\ln[\ln(x-2)]}{\frac{1}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{\frac{1}{x-2}}{\ln(x-2)}}{\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}}{\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}} =$

$\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4\right)^2}{-2x(x-2)\ln(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{-2x(x-2)\ln(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)^2}{-2x\ln(x-2)} = 0$

Por tanto $\lim_{x\to 2}\frac{\ln[\ln(x-2)]}{\frac{1}{x^2-4}} = 0$. Es importante recordar, que el límite pedido no es este, sino $\lim_{x\to 2}[\ln(x-2)]^{\left(x^2-4\right)} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{\ln[\ln(x-2)]}{\frac{1}{x^2-4}}}$, así que: $\lim_{x\to 2}[\ln(x-2)]^{\left(x^2-4\right)} = e^0 = 1$.

**Ejemplo 4.8.3** Calcular $\lim_{x\to 2}\left(x^2-3\right)^{\ln(x-2)}$

Es del caso $1^\infty$:

$\lim_{x\to 2} e^{[\ln(x-2)]\left(x^2-3-1\right)} = \lim_{x\to 2} e^{\left(x^2-4\right)\ln(x-2)} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x^2-4}}}$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$\lim_{x\to 2} e^{\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x^2-4}}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{\left(x^2-4\right)^2}{-2x(x-2)}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{-2x(x-2)}} =$

$\lim_{x\to 2} e^{\frac{(x-2)(x+2)^2}{-2x}} = e^0 = 1.$

# 4.9 Determinación de extremos locales

Vimos que si una función derivable en un punto $x$, tiene un extremo en $x$, su derivada en tal punto $x$ es nula, es decir $x$ es un punto crítico.

Una función puede tener extremo en un punto $x_0$, y no ser derivable en él, por ejemplo $y = |x|$ en el punto $x = 0$.

## 4.9.1 Criterio de la primera derivada

**Teorema 4.9.1** *Dada una función* $f : [x_0 - h, x_0 + h] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, continua en* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *y derivable en* $(x_0 - h, x_0) \cup (x_0, x_0 + h)$*.*

*En tal caso:*

*i. Si* $x < x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$ y $x > x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$: $f$ *tiene máximo local en* $x_0$.

*ii.* Si $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$ y $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$:$f$ *tiene mínimo local en* $x_0$.

**Definición 4.9.1** Diremos que una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es de clase $\mathcal{C}^k$ en $I$, lo que se denota $f \in \mathcal{C}^k(I)$, si la función y sus derivadas de orden menor o igual que $k$, son continuas en $I$.

### 4.9.2 Criterio de la segunda derivada

**Teorema 4.9.2** *Dada una función* $f : [x_0 - h, x_0 + h] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que:*
*i.* $f \in \mathcal{C}^2([x_0 - h, x_0 + h])$.
*ii.* $f'(x_0) = 0$
*En estas condiciones:*
*1.* $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ *tiene mínimo local en* $x_0$.
*2.* $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ *tiene máximo local en* $x_0$.

### 4.9.3 Caso de la segunda derivada nula

Considerando una función $f$ de clase $\mathcal{C}^n$, caso de tener extremo en un punto $x_0$, deberá ser $f'(x_0) = 0$, supongamos además que $f''(x_0) = 0$, o más generalmente que $f^{(k}(x_0) = 0$, $2 \leq k < n$, con lo que el criterio precedente no decide sobre la existencia de extremo. El siguiente teorema da un criterio basado en el orden de la primera derivada no nula en $x_0$:

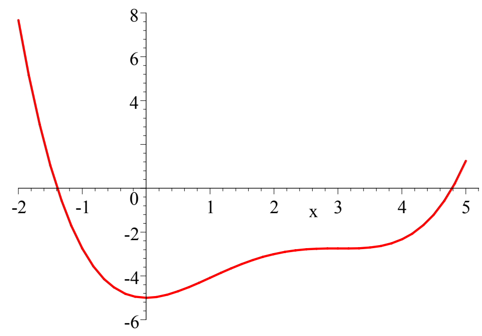
**Teorema 4.9.3** *Dada una función* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *verificando:*
*i* $f$ *es de clase* $C^n$ *en un entorno* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *de un punto* $x_0 \in D$
*ii.* $f^{(k}(x_0) = 0$, $k < n$
*iii.* $f^{(n}(x_0) \neq 0$
*En estas condiciones*:

1. *si* $n$ *es par y* $\begin{cases} a.\ f^{(n}(x_0) > 0 & \Rightarrow \text{ tiene mínimo local en } x_0 \\ b.\ f^{(n}(x) < 0 & \Rightarrow \text{ tiene máximo local en } x_0 \end{cases}$

2. *si* $n$ *es impar y* $\begin{cases} a.\ f^{(n}(x_0) > 0 & \Rightarrow f \text{ es creciente en } x_0 \\ b.\ f^{(n}(x) < 0 & \Rightarrow f \text{ es decreciente en } x_0 \end{cases}$

En realidad este criterio incluye los dos anteriores.

**Ejemplo 4.9.1** Determianr los extremos de $y = \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5$
$y' = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$, que se anula para $x = 0$ y $x = 3$
$y'' = x^2 - 4x + 3$, para $x = 0$ vale 3, por lo que hay un mínimo en $(0, -5)$
Pero para $x = 3$, se anula.
$y''' = 2x - 4$, que para $x = 3$, vale $+2$, por lo que al ser la primera derivada no nula (para $x = 3$), de orden impar, y positiva, la función crece en $x = 3$.




## 4.10 Asíntotas

**Definición 4.10.1** Diremos que una recta es una **asíntota** de una curva de ecuación $y = f(x)$ si la distancia entre un punto de la curva, y la recta tiende a cero, cuando la distancia entre tal punto de la curva y $(0,0)$, tiende a infinito.

Hay tres tipos de asíntotas:

a. asíntotas **horizontales**:

$f$ tiene una asíntota horizontal $y = b$ si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \neq \infty$

b. asíntotas **verticales**:

$f$ tiene una asíntota vertical $x = a \neq \infty$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

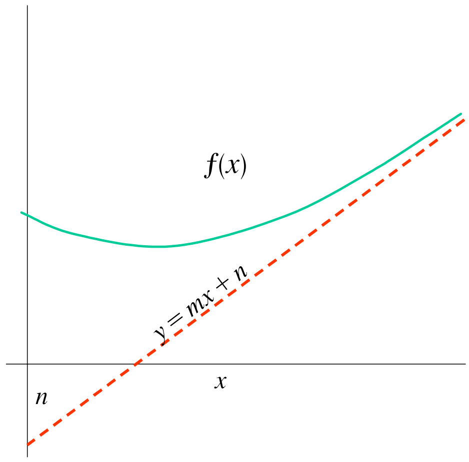
c. asíntotas **oblícuas**:

$f$ tiene una asíntota *oblícua* $y = mx + n$ si la distancia entre esta recta y $(x, f(x))$ tiende a cero al tender $x$ a $\pm\infty$

**Teorema 4.10.1** *(Determinación de las asíntotas oblícuas):*

*Si* $y := mx + n$ $(0 \neq m \neq \infty, n \neq \infty)$ *es una asíntota oblícua de la curva representada por* $f(x)$ *entonces:*

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$$

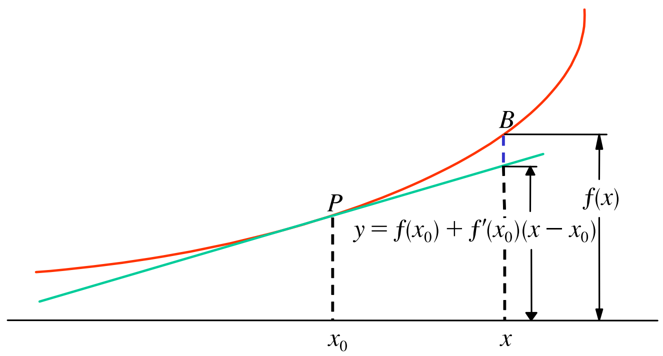



**Advertencia 4.10.1** Suele decirse, que una curva que admite asíntota horizontal no admite asíntota oblícua, esto es cierto con matices: si hay asíntota horizontal con $x \to +\infty$ no hay asíntota oblícua con $x \to +\infty$, pero puede haberla con $x \to -\infty$, lo mismo puede decirse si hay asíntota horizontal con $x \to -\infty$. Ver por ejemplo el ejercicio resuelto n$^o$10.

## 4.11 Concavidad

**Definición 4.11.1** Diremos que una curva es **cóncava hacia arriba** "$\cup$", (o convexa hacia abajo), entorno de un punto $x_0$ si, entorno de $x_0$ la curva está situada por encima de la tangente a la curva en $x_{0.}$ De manera análoga se define la concavidad hacia abajo" $\cap$". Cuando, por el contrario, en un semientorno de $x_0$ la curva está por encima, y en otro por debajo de la tangente, diremos que en $x_0$ hay un **punto de inflexión**.

**Ejemplo 4.11.1** En la figura adjunta, la curva tiene una concavidad de tipo $\cup$ en $x_0$:




**Teorema 4.11.1** *Dada la ecuación $y = f(x)$, de una curva. Si entorno de un punto $x_0$ la función $f$ es de clase $C^2$, y:*

*i. $f''(x) > 0$ en tal entorno la curva es cóncava hacia las $YY$ positivas.*

*ii. $f''(x) < 0$ en tal entorno la curva es cóncava hacia las $YY$ negativas.*

*iii. $f''(x)$ cambia de signo al pasar de valores menores que $x_0$ a valores mayores que $x_0$, en $x_0$ la curva tiene un punto de inflexión.*

### 4.11.1 Caso de la segunda derivada nula

**Teorema 4.11.2** *Dada la ecuación de una curva $y = f(x)$. Si entorno de un punto $x_0$, se verifica que $f$* es de clase $\mathcal{C}^n$ en tal entorno, *con $f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1}(x_0) = 0$, $f^{(n}(x_0) \neq 0$:*

*i. caso de ser $n$* par*:*

*1. si $f^{(n}(x) > 0$ la curva es cóncava hacia las $YY$ positivas entorno de $x_0$.*

*2. si $f^{(n}(x) < 0$ la curva es cóncava hacia las $YY$ negativas entorno de $x_0$.*

*ii. caso de ser $n$* impar, *la curva tiene un punto de inflexión en $x_0$ siendo:*

*1. creciente si $f^{(n}(x_0) > 0$*

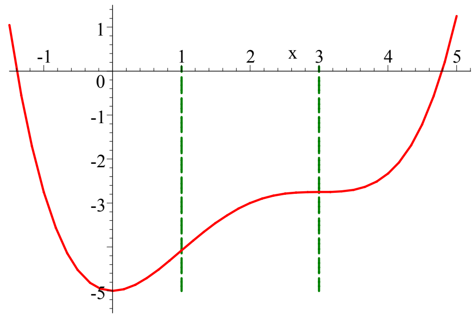
*2. decreciente si $f^{(n}(x_0) < 0$.*

**Ejemplo 4.11.2** En el ejemplo anterior (4.9.1), la función $y = \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5$

$y' = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$,

$y'' = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, es negativa en $(1,3)$, por lo que es cóncava hacia abajo "$\cap$", y cóncava hacia arriba "$\cup$",en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, $y''$ se anula $x = 1$ y $x = 3$.

$y''' = 2x - 4$, que para $x = 3$, vale $+2$, por lo que al ser la primera derivada no nula (para $x = 3$), de orden impar, y positiva, la función crece en $x = 3$, a la inversa en $x = 1$, es negativa por lo que decrece, habiendo punto de inflexión en ambos casos, como se aprecia en la figura.



# Tema 4

# Derivación

## Ejercicios resueltos

### Derivación

**Ejercicio 1** Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$f(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x \leq 2 \\ (x-2)\,2^x - 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$ en el punto $x = 2$.

**Solución:**

Estudiemos primero los límites laterales en $x = 2$:

$f(2^-) = \lim_{h\to 0} f(2-h) = \lim_{h\to 0} -(2-h)^2 =$
$\lim_{h\to 0} -4 + 4h - h^2 = -4$

$f(2^+) = \lim_{h\to 0} f(2+h) = \lim_{h\to 0} (2+h-2)\,2^{2+h} - 4 =$
$\lim_{h\to 0} h2^{2+h} - 4 = -4$

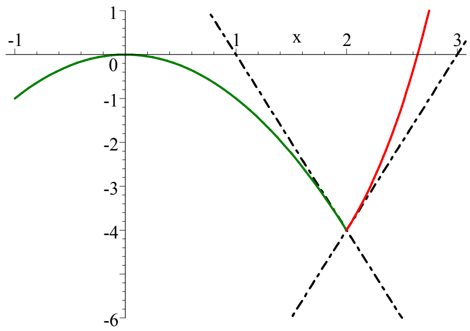
Por tanto $f(2^-) = f(2^+) = f(2)$, y la función es continua en $x = 2$

Derivadas laterales en $x = 2$:

$f'(2^-) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(2-h)^2-4}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h-h^2}{-h} =$
$\lim_{h\to 0} -4 + h = -4$

$f'(2^+) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h-2)2^{2+h}-4-(-4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h2^{2+h}}{h} =$
$\lim_{h\to 0} 2^{2+h} = 4$

Las derivadas laterales son distinitas por lo que la función carece de derivada en $x = 2$, esto significa que hay dos tangentes distintas en el punto $(2, -4)$




■

**Ejercicio 2** Calcular la derivada de $y = x^x$. Se supone $x > 0$.

**Solución:**
Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros:

$$\ln y = x \ln x$$

Derivando ambos miembros respecto de $x$, teniendo en cuenta la regla de la cadena, que nos dice que al ser $y$ función de $x$:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Despejando $y'$:

$$y' = (1 + \ln x)\, y$$

Finalmente reemplazando el valor de $y$:

$$y' = x^x (1 + \ln x)$$

■

**Ejercicio 3** Una epidemia, al cabo de $t$ días de su inicio, infecta a un número de personas dado por $p = 30t^2 + 100t$. ¿Cuantas personas infecta el $5^o$ día?

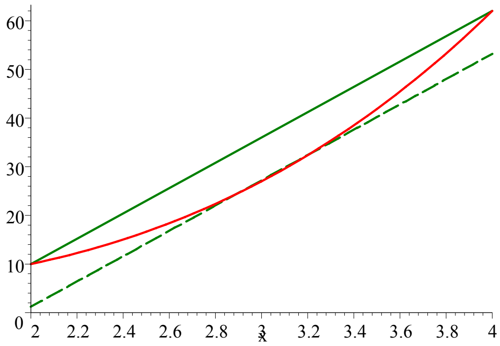
**Solución:**
El número de personas infectado por día vendrá dado por: $\frac{dp}{dt} = 60t + 100$, por lo que en el día $t = 5$, el número de infectados será $60 \cdot 5 + 100 = 400$ personas. ■

**Ejercicio 4** La curva de ecuación $y = x^3 - 2x + 6$, pasa por los puntos $P(2, 10)$ y $Q(4, 62)$, Si el segmento $\overline{PQ}$ se desplaza paralelamente a sí mismo, corta a la curva en varios puntos, o en ninguno; si la corta en un único punto ¿cual es?

**Solución:**
Podría solucionarse determinando la ecuación de la recta $PQ$, resolver el sistema de dos ecuaciones formado por esta ecuación y la de la curva, e igualar las posibles soluciones.

Otra posibilidad es usar el teorema de valor medio de Lagrange, que asegura que la tangente en un punto de la curva, es paralela a la cuerda que une los extremos del arco en cuestión:

Si $P\,(2,10)$, y $Q\,(4,62)$ son los extremos del arco de curva, el teorema afirma que la abscisa $c$ del punto mencionado, verifica $f'\,(c) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{62-10}{4-2} = 26$ y, dado que $f'\,(x) = 3x^2 - 2$, $f'\,(c) = 3c^2 - 2 = 26 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{26}{3}} = 2.94$, el punto buscado es $(2.94, 25.63)$




■

**Ejercicio 5** Mediante la derivación de la función inversa, hallar la derivada de $y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}$

**Solución:**
$y = f\,(x) = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos y = \frac{1-x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\cos y = 1-x \Rightarrow x = 1-\sqrt{2}\cos y$

Por tanto $y = f\,(x)$ es la función inversa de $g\,(y) = 1-\sqrt{2}\cos y$, así que si $g'\,(y) = \frac{1}{f'(x)}$ será $f'\,(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{g'(f(x))}$ o bien: $y' = \frac{1}{\sqrt{2}\sin y} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{(1-x)^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+2x-x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. ■

## Representación gráfica de funciones y optimización.

**Ejercicio 6** Determinar los extremos, si los hay, de la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

**Solución:**
$f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2} = 1 - (x-1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$

Esta derivada nunca se anula, y en ausencia de puntos críticos, debe estudiarse el comportamiento de la derivada, en torno a los puntos de discontinuidad de la derivada, en este caso $x = 1$.

$f'(1^+) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{(1+h-1)^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} -\sqrt[3]{\frac{1}{h}} = -\infty$

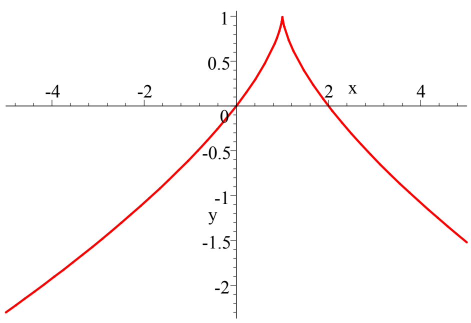
$f'(1^-) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{(1-h-1)^2}-1}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt[3]{h^2}}{-h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{h}} = +\infty$

Así esta función carece de derivada en $x = 1$ por lo que:
$f'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ si $x \neq 1$.

Pero antes del punto de discontinuidad, es decir para $x < 1$:
$x < 1 \Rightarrow x = 1 - h, \ (h > 0)$, y
$f'(1-h) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{1-h-1}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{-h}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{h}} > 0$

Después del punto de discontinuidad, es decir para $x > 1$:
$x > 1 \Rightarrow x = 1 + h, \ (h > 0)$, y
$f'(1+h) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{1+h-1}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{+h}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{h}} < 0$

Por tanto $f$ crece antes de $x = 1$, y decrece con $x > 1$, por lo que, siendo continua en $x = 1$, podemos asegurar que $f$ tiene un máximo en $x = 1$




■

**Ejercicio 7** Determinar los extremos de la función $f(x) = x^4 e^{1-x}$, supuesto que existan, no usar el criterio de la $1^a$ derivada.

**Solución:**
$f$ está definida y es derivable, para todo $x$.

Los posibles extremos corresponden a valores que anulan la $1^a$ derivada:

$$f'(x) = 4x^3e^{1-x} - x^4e^{1-x} = x^3e^{1-x}(4-x)$$

Por tanto puede haber extremos en $x = 4$, y $x = 0$

$f''(x) = 3x^2e^{1-x}(4-x) - x^3e^{1-x}(4-x) - x^3e^{1-x} = x^2e^{1-x}(12-8x+x^2)$

$f''(0) = 0,\ f''(4) = -16e^{-3}(-4) > 0$

Así hay un mínimo en $(4, 256e^{-3})$.

Respecto de $x = 0$ son nulas todas las derivadas en las que aparece $x$, como factor, con exponente $> 0$:

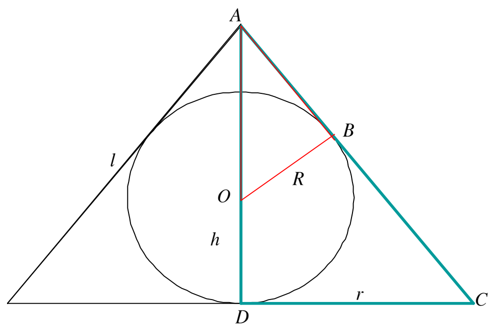
$f'''(x) = 2xe^{1-x}(12-8x+x^2) - x^2e^{1-x}(12-8x+x^2) + x^2e^{1-x}(-8+2x) =$
$xe^{1-x}[2(12-8x+x^2) - x(12-8x+x^2+8-2x)] =$
$xe^{1-x}(24-36x+12x^2-x^3)$

$f^{iv}(x) = e^{1-x}(24-36x+12x^2-x^3) - xe^{1-x}(24-36x+12x^2-x^3) +$
$xe^{1-x}(-36+24x-3x^2) =$
$e^{1-x}[24-36x+12x^2-x^3-x(24-36x+12x^2-x^3+36-24x+3x^2)] =$
$e^{1-x}[24-96x+72x^2-16x^3+x^4]$

Resulta que $f^{iv}(0) = 24e > 0$, por tanto hay un mínimo en $(0,0)$, cosa que era de esperar ya que $x^4e^{1-x} \geq 0$ ■

**Ejercicio 8** Determinar las dimensiones del cono de volumen mínimo circunscrito a una esfera de radio $R$.

**Solución:**




El volumen del cono es $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Los triángulos $AOB$ y $ADC$ son semejantes, la relación de semejanza: $\frac{\overline{DC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, puede escribirse $\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2}}$ ó $\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{\left(\overline{AD}-\overline{OD}\right)^2 - R^2}}$ ó $\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{(h-R)^2 - R^2}}$ con ello $r = \frac{Rh}{\sqrt{h^2-2hR}}$, y

$v = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2h^2}{h^2-2hR}h = \frac{\pi R^2}{3}\frac{h^3}{h^2-2hR}$

Extremos de $v$:

$v' = \frac{\pi R^2}{3}\frac{3h^2\left(h^2-2hR\right)-(2h-2R)h^3}{(h^2-2hR)^2} = \frac{\pi R^2}{3}\frac{h^3(3h-6R-2h+2R)}{(h^2-2hR)^2} = \frac{\pi R^2}{3}\frac{h^3(h-4R)}{(h^2-2hR)^2}$

$v' = 0 \Rightarrow h^3\left(h-4R\right) \Rightarrow h = \begin{cases} 0 \\ 4R \end{cases}$

Dado que, evidentemente $h > 0$, debe excluirse $h = 0$, y el signo de $v'$ depende de $h - 4R$:

Para $h < 4R$ $v' < 0$, por lo que $v$ decrece

Para $h > 4R$ $v' > 0$, por lo que $v$ crece

Por tanto, usando el criterio de la primera derivada, en $h = 4R$ hay un mínimo.

$h = 4R \Rightarrow r = \frac{R4R}{\sqrt{16R^2-8R^2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$,

Con ello el volumen del cono será $v = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi\left(R^2 2\right)(4R)}{3} = \frac{8\pi R^3}{3}$, que es el doble del volumen de la esfera $\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)$. ■

**Ejercicio 9** Un servicio de correos acepta paquetes, en forma de paralelepípedo, a condición de que la suma de la longitud y el doble de la suma de anchura y altura, sea de un máximo de 183 cm. Suponiendo igual anchura que altura ¿Cuáles deben ser las dimensiones del paquete para que tenga la máxima capacidad?

**Solución:**

Si la capacidad, o volumen del paquete es $v$, la anchura $x$ y la longitud $y$, tendremos: $v = x^2y$, además debe ser $183 = 2x + y$, por tanto: $v = x^2\left(183 - 2x\right) = 183x^2 - 2x^3$.

Determinación del máximo de $v$:

$v' = 366x - 6x^2$, $v' = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 61$

La solución $x = 0$ está excluída (no habría caja), para $x = 61$, dado que $v'' = 366-12x$ tenemos $v''\left(61\right) = 366-12\times 61 = -366 < 0$, que efectivamente corresponde a un máximo, con $y = 183 - 2 \times 61 = 61$. El volumen máximo permitido en las condiciones dadas es $61 \times 61 \times 61 = 226\,981 cm^3$ ■

**Ejercicio 10** Estudiar continuidad, puntos de corte con los ejes, asíntotas, e intervalos de monotonía de la función de ecuación $f\left(x\right) = \frac{(x-1)e^x}{e^x-1}$

**Solución:**

Se trata de una función continua, y derivable, en todo $\mathbb{R} - \{0\}$.

Es posible que sea discontinua en $x = 0$, cosa que se debe verificar estudiando los límites laterales:

$\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right) = \lim_{h\to 0} f\left(h\right) = \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)e^h}{e^h-1} = \frac{-1}{0} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-h) = \lim_{h\to 0} \frac{(-h-1)e^{-h}}{e^{-h}-1} = \lim_{h\to 0} \frac{-1-h}{1-e^{h}} =$
$\lim_{h\to 0} \frac{1+h}{e^{h}-1} = \infty$

Así que efectivamente es discontinua en $x = 0$, por tanto tampoco será derivable en tal punto.

Puntos de corte con los ejes: corta a $\overline{OX}$ en $x = 1$

Asíntotas:

Es claro que hay una asíntota vertical en $x = 0$
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)e^{x}}{e^{x}-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{xe^{x}}{e^{x}} = +\infty$

Esto significa que no hay asíntota horizontal para $x > 0$.
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(-x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(-x-1)e^{-x}}{e^{-x}-1} =$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{-x-1}{1-e^{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{e^{x}-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$

Así pues hay una asíntota horizontal $y = 0$, en $x = -\infty$

$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{(x-1)e^{x}}{e^{x}-1}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)e^{x}}{(e^{x}-1)x} =$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x}\frac{e^{x}}{e^{x}-1} = 1$

$n = \lim_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)e^{x}}{e^{x}-1} - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)e^{x} - x(e^{x}-1)}{e^{x}-1} =$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-e^{x}}{e^{x}-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{e^{x}}-1}{1-\frac{1}{e^{x}}} = -1$

Por tanto hay asíntota oblícua (en $x \to \infty$): $y = x - 1$

Debe quedar claro que el hecho de haber asíntota horizontal imposibilita la existencia de asíntota oblícua, pero sólo por el lado donde hay asíntota horizontal, en este caso la hay en $x = -\infty$, y no puede haber asíntota oblícua por este lado; pero no en $x = \infty$, por lo que sí cabe asíntota oblícua por este lado.

Cortes de la curva $y = \frac{(x-1)e^{x}}{e^{x}-1}$ con las asíntotas: $(-\infty, 0)$, $(0^{+}, -\infty)$ y $(0^{-}, +\infty)$,

$\begin{cases} y = \frac{(x-1)e^{x}}{e^{x}-1} \\ y = x-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{(x-1)e^{x}}{e^{x}-1} = x - 1 \Rightarrow (x-1)e^{x} = (x-1)e^{x} - x + 1 \Rightarrow$
$x = 1,\ y = 0$

Posición respecto de la asíntota oblícua:
$\frac{(x-1)e^{x}}{e^{x}-1} - (x-1) = \frac{(x-1)(e^{x}-1)}{e^{x}-1} = x - 1 \Rightarrow$

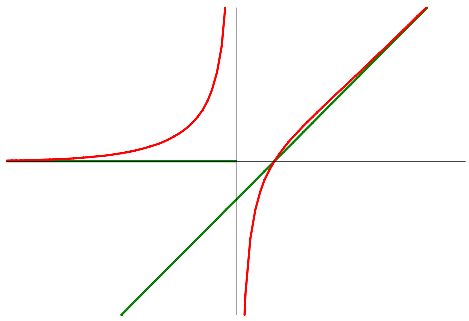
La ordenada de la curva es mayor que la de la asíntota para $x > 1$

La ordenada de la curva es menor que la de la asíntota para $x < 1$

Intervalos de monotonía:

$y' = \frac{xe^{x}(e^{x}-1) - e^{2x}(x-1)}{(e^{x}-1)^{2}} = \frac{e^{x}(e^{x}-x)}{(e^{x}-1)^{2}} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, y la función es siempre creciente.

La curva viene dada por la gráfica siguiente: ■



**Ejercicio 11** Estudiar y representar gráficamente $f(x) = (x+2)\,e^{\frac{1}{x}}$

**Solución:**
Dominio $\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{h\to0}(h+2)\,e^{\frac{1}{h}} = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{h\to0}(-h+2)\,e^{\frac{1}{-h}} = \lim_{h\to0}\frac{-h+2}{e^{\frac{1}{h}}} = 0$

De lo anterior resulta que hay una asíntota vertical en $x=0$

Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}} = \infty\cdot e^0 = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}(-x+2)\,e^{\frac{1}{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+2}{e^{\frac{1}{x}}} = -\infty$

Asíntotas oblícuas:

$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = 1$

$n = \lim_{x\to+\infty}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}} - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) + 2e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} + 2e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} + 2 = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} + 2 = 3$

Así $y = x+3$ es una asíntota oblícua

$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(-x+2)e^{\frac{1}{-x}}}{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = 1$

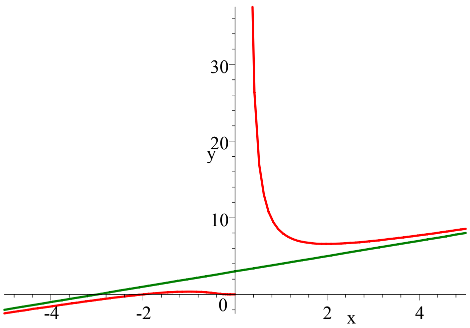
Que es la misma $m$ que antes.

$f'(x) = \frac{d}{dx}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{x+2}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\frac{x^2-x-2}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(x^2-x-2\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(x+1)(x-2)$

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(-1,2)$, y como es continua en todo el dominio, hay máximo en $x=-1$ y mínimo en $x=2$.

$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(x^2-x-2\right) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}\left(x^2-x-2\right) - 2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\left(x^2-x-2\right) + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(2x-1) = e^{\frac{1}{x}}\frac{5x+2}{x^4} \Rightarrow$

$f''(x) > 0$ para $x > -\frac{2}{5}$ concavidad $\cup$, $f''(x) < 0$ para $x < -\frac{2}{5}$ concavidad $\cap$ $\blacksquare$



# Ejercicios propuestos

Las soluciones se encuentran al final

## Derivación

1. Hallar por medio de la definición de derivada, la derivada de $y = \sqrt{x}$

2. Hallar las derivadas laterales de $y = \sqrt{\left|\frac{x^2+2x}{x-3}\right|}$ en $x = -2$.

3. Hallar la derivada de $y = \ln(\ln(\ln x))$ supuesto $x > 0$.

4. Comprobar que, siendo $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$, funciones de $x$, la derivada de $y = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ es $y' = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}$.
   Este resultado es válido para determinantes de orden arbitrario (finito).

5. Dar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^x$ en el punto $(2, 4)$.

6. Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + x^2 - 2x}{x\cos x + (x-1)\sin x}$

7. Calcular: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

8. Calcular: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan 3x$

9. Calcular: $\lim_{x\to 0} x^x$, con $x > 0$

10. Hallar la derivada de $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ supuesto $a$ constante y $a > 0$.

11. Mediante la derivación de la función inversa, hallar la derivada de $y = \arctan\frac{x^2}{a}$

## Representación gráfica de funciones y optimización.

12. Dar las dimensiones del cilindro recto, de volumen máximo, inscrito en una esfera de radio $R$.

13 Dar las dimensiones del cilindro recto de volumen máximo inscrito en un cono circular de altura $h$, y radio $r$.

14. Un barco ha de remontar una distancia $d$ en un rio, si la velocidad de la corriente es $u$, y el consumo de combustible es directamente proporcional al tiempo empleado y al cubo de $u$; determinar la velocidad $v$, del barco, que implica el mínimo gasto de combustible.

15. Se pretende construir un campo de deportes, cuyo perímetro sea una pista de 400 m. Si el campo ha de tener forma de rectángulo con un semicírculo adosado a cada uno de los lados menores ¿Con qué dimensiones se consigue el campo de mayor superficie?

16. Se permite ocupar uno o dos terrenos, en caso de ser dos uno cuadrado y otro circular, separados; con la condición de que la cerca que limite el conjunto de los dos tenga una longitud $l$ dada. ¿Cuales son las dimensiones que dan máxima y mínima superficie de terreno?

Estudiar y representar gráficamente las curvas cuyas ecuaciones se dan a continuación:

17. $y = \frac{5x^4+1}{x^2+1}$

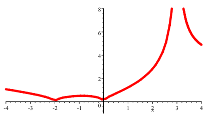
18. $y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

19. $y = +\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-x}}$

20. $y = x + \frac{1}{x}$

## Soluciones a los ejercicios propuestos

1. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $y'\left(-2^+\right) = \sqrt{\frac{1}{5}}$ $y'\left(-2^+\right) = -\sqrt{\frac{1}{5}}$, gráfica: 

3. $\frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$

4.

5. $y - 4 = 4\left(1 + \ln 2\right)\left(x - 2\right)$

6. 1.

7. 0.

8. 0.

9. 1.

10. $a^a x^{a^a-1} + a^{x^a} a x^{a-1} \ln a + a^{a^x} a^x a^{a^x} \ln^2 a$

11. $\frac{2ax}{x^4+a^2}$

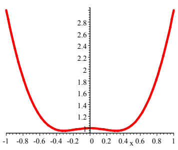
12. Altura $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, radio de la base $\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$

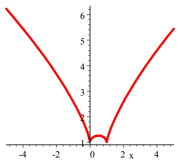
13. Altura $\frac{h}{3}$, radio $\frac{2r}{3}$

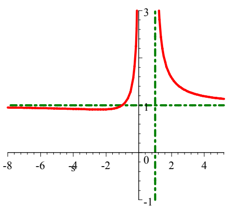
14. $v = \frac{3}{2}u$

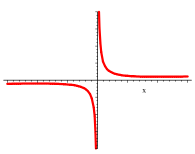
15. Lados del rectángulo 100m., radio de semicírculo $\frac{100}{\pi}$m

16. Máximo: un círculo de radio $\frac{l}{2\pi}$, mínimo: círculo de radio $\frac{l}{2\pi+8}$, y cuadrado de lado $\frac{l}{\pi+4}$

17. 

18. 

19. 

20. 

# Tema 5

# Integración Indefinida

## 5.1 Primitiva de una función. Reglas básicas

En este tema estudiaremos lo que podríamos llamar el problema inverso de la derivación, es decir, dada una función $f$ hallar otra $F$ tal que $F' = f$.

**Definición 5.1.1** Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **primitiva** de $f$ en $[a, b]$ si $F$ es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

**Ejemplo 5.1.1** Sean $f(x) = 3x^2$, $F(x) = x^3$. Claramente $F'(x) = f(x)$ para todo $x$, por lo que $F$ es una primitiva de $f$.

Es evidente que si dos funciones se diferencian en una constante (por ejemplo, $F_1(x) = \operatorname{sen} x$ y $F_2(x) = \operatorname{sen} x + 5$), su derivada será la misma (en este caso, $f(x) = \cos x$), por lo que tanto $F_1$ como $F_2$ son primitivas de $f$. También es cierto el recíproco, es decir, las primitivas de una función se diferencian en una constante:

**Teorema 5.1.1** *Sea $F_1$ una primitiva de $f$ en $[a, b]$. $F_2$ es otra primitiva de $f$ en $[a, b]$ si y sólo si $F_1 - F_2$ es constante en $[a, b]$.*

Este resultado nos permite establecer la siguiente definición:

**Definición 5.1.2** Al conjunto de todas las primitivas de $f$ en $[a, b]$ se le denomina **integral indefinida** de $f$ en $[a, b]$ y se representa por $\int f(x)dx$.

Dicho de otra forma

$$\int f(x)dx = \{F/F \text{ es una primitiva de } f \text{ en } [a,b]\}$$

y si tenemos en cuenta que dos primitivas cualesquiera de $f$ se diferencian en una constante, el conjunto anterior se suele escribir

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde $F$ es una primitiva cualquiera de $f$ y $C$ una constante arbitraria.

Teniendo en cuenta las definiciones de *primitiva* e *integral indefinida* se deduce fácilmente el siguiente resultado, que pone de manifiesto la linealidad de la integral indefinida:

**Teorema 5.1.2** *Sean $f$ y $g$ dos funciones con primitiva en el intervalo $[a,b]$ y sean $\alpha, \beta$ dos números reales cualesquiera. Se verifica que*

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

El teorema anterior debe interpretarse como sigue: para obtener todas las primitivas de $\alpha f + \beta g$ debo calcular una primitiva de $f$ y multiplicarla por $\alpha$, también debo calcular una primitiva de $g$ y multiplicarla por $\beta$, sumar las funciones así obtenidas y añadirle una constante arbitraria. Veámoslo en un ejemplo:

**Ejemplo 5.1.2**

$$\begin{aligned} \int [3\cos x + 4x]\, dx &= 3\int \cos dx + 4\int x dx \\ &= 3 \operatorname{sen} x + 4\frac{1}{2}x^2 + C = 3\operatorname{sen} x + 2x^2 + C \end{aligned}$$

## 5.2 Integrales inmediatas

Entendemos por *integrales inmediatas* algunas integrales sencillas que pueden verificarse directamente derivando, como por ejemplo:

$$\{F(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow F'(x) = \cos x\} \Longrightarrow \int \cos dx = \operatorname{sen} x + C$$

El concepto de integral inmediata es subjetivo, pero suelen considerarse como tales las que se obtienen a partir de la derivación de las funciones elementales y sus combinaciones más sencillas. Estas integrales será necesario manejarlas con soltura, ya que cualquier método de integración termina conduciendo a una o varias integrales inmediatas.

A continuación presentamos una tabla de integrales inmediatas:

---

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R},\ a > 0), \qquad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C,$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C, \qquad \int \cot x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C,$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C, \qquad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C, \qquad \int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + C,$$

$$\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + C, \qquad \int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 x} = -\coth x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C = \operatorname{arg\,senh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C = \operatorname{arg\,cosh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \operatorname{arg\,tanh} x + C.$$

---

Tabla 5.1: Tabla de integrales inmediatas

## 5.3 Integración por partes. Integración por cambio de variable

En esta sección veremos dos de los métodos más utilizados a la hora de calcular primitivas: la *integración por partes* y la *integración por cambio de variable.*

El método de **integración por partes** consiste en aplicar la regla de derivación de un producto a la inversa, y así se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \Longrightarrow$$

$$u(x)v'(x) = \frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right) - u'(x)v(x) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx}$$

Este método será útil cuando la integral $\int u'(x)v(x)dx$ sea más fácil de calcular que la integral $\int u(x)v'(x)dx$.

Teniendo en cuenta la notación $du = u'(x)dx$ y $dv = v'(x)dx$, el método anterior se suele escribir de la siguiente forma más fácil de recordar:

$$\boxed{\int u\ dv = uv - \int v\ du}$$

Veamos un par de ejemplos:

**Ejemplo 5.3.1**

$$\int \ln|x|dx \underset{\substack{u = \ln|x| \ \Rightarrow\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \ \Rightarrow\ v = x}}{=} x\ln|x| - \int dx = x\ln|x| - x + C$$

**Ejemplo 5.3.2**

$$\int x \operatorname{sen} x dx \underset{\substack{u = x \ \Rightarrow\ du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \ \Rightarrow\ v = -\cos x}}{=} -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

El método de **integración por cambio de variable** se basa en observar como afecta un cambio de variable a la derivada de una función. Así, si a la función $F(x)$ le aplicamos el cambio de variable $x = \phi(t)$, obtenemos $G(t) = F(\phi(t))$ y, aplicando la regla de la cadena:

$$F'(x) = f(x) \Longrightarrow G'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

de lo que deducimos el siguiente teorema:

**Teorema 5.3.1** *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y consideremos el cambio de variable* $x = \phi(t)$ *con* $\phi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *con derivada continua. En ese caso tenemos que*

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

El teorema anterior es fácil de recordar si utilizamos la siguiente regla: si el cambio es $x = \phi(t)$ entonces $dx/dt = \phi'(t)$ y, por tanto, $dx = \phi'(t)dt$, por lo que $f(x)dx = f(\phi(t))\phi'(t)dt$. Veamos un par de ejemplos:

**Ejemplo 5.3.3** En la tabla de integrales inmediatas (tabla 5.1) habíamos visto que

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Veamos como podemos utilizar el cambio de variable para calcular

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$$

donde $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0, b > 0$. En efecto, tenemos que

$$I = \int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \int \frac{(1/a^2)dx}{1+(b^2/a^2)x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}$$

y haciendo el cambio de variable

$$\frac{bx}{a} = t \Rightarrow x = \frac{at}{b} \Rightarrow dx = \frac{a}{b}dt$$

obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^2}\int \frac{(a/b)dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{ab}\arctan t + C = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + C \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.3.4** Calculemos ahora

$$I = \int \operatorname{sen}^7 x \ \cos x \ dx$$

Observemos que si consideramos el cambio $\operatorname{sen} x = t$, no nos hace falta despejar $x$ en función de $t$ para derivar, ya que

$$\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \cos x = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \cos x \ dx = dt$$

y por tanto

$$I = \int \operatorname{sen}^7 x \ \cos x \ dx = \int t^7 \ dt = \frac{1}{8}t^8 + C = \frac{\operatorname{sen}^8 x}{8} + C$$

## 5.4 Integración de funciones racionales. Descomposición en suma de fracciones simples

**Definición 5.4.1** La función $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de $x$, se llama **función racional** y la correspondiente integral

$$\int f(x) \ dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \ dx$$

se denomina **integral racional** o **integral de una función racional**.

El método para resolver este tipo de integrales se basa en escribir la función racional $P(x)/Q(x)$ como suma de lo que llamaremos *fracciones simples*, pero para ello previamente habremos de conseguir que $P(x)$ y $Q(x)$ no tengan factores en común y que grado$(P(x)) <$ grado$(Q(x))$. Con ese objetivo realizamos los siguientes pasos:

1. Escribimos $P(x)/Q(x)$ en su forma irreducible, es decir, factorizamos $P(x)$ y $Q(x)$ y eliminamos sus factores en común.

**Ejemplo 5.4.1**

$$\begin{aligned}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2+x-2} &= \frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)}\\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{x+2} = \frac{x^2-3x+2}{x+2}\end{aligned}$$

2. Si grado$(P(x)) \geq$ grado$(Q(x))$ se procede a efectuar la división, obteniéndose un polinomio más una función racional en la que el numerador (el resto de la división) es de menor grado que el denominador, es decir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

   donde $C(x)$ es el cociente de la división, $R(x)$ el resto y, por tanto, grado$(R(x)) <$ grado$(Q(x))$.

   **Ejemplo 5.4.2**

$$\frac{x^2-3x+2}{x+2} = x-5+\frac{12}{x+2}$$

Tras realizar estos dos pasos la integral de la función racional es

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx = \int C(x)\ dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\ dx$$

y, puesto que la integral de un polinomio es inmediata, podemos centrarnos en el caso de que la función racional sea ya una fracción irreducible y el numerador de menor grado que el denominador.

**Definición 5.4.2** Se denominan **fracciones simples** a las funciones racionales de la forma

$$\frac{A}{x-r},\quad \frac{A}{(x-r)^n},\quad \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2},\quad \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

**Teorema 5.4.1** *Dada una función racional irreducible con coeficientes reales $P(x)/Q(x)$ tal que grado$(P(x)) <$ grado$(Q(x))$, si las raíces reales del denominador son $r_1, \ldots, r_k$ y las raíces complejas (que aparecen por pares de* *raíces conjugadas) son* $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_l \pm i\beta_l$*, con multiplicidades respectivas* $m_1, \ldots, m_k$ *y* $n_1, \ldots, n_l$*, es decir, existe* $c \in I\!R$ *(*$c \neq 0$*) tal que*

$$Q(x) = c\ (x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_k)^{m_k}[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{n_1} \cdots [(x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2]^{n_l}$$

*entonces la función racional* $P(x)/Q(x)$ *puede escribirse de modo único como suma de fracciones simples:*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{(x - r_1)^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}}{(x - r_1)^{m_1}} + \cdots \\ & \cdots + \frac{B_1}{x - r_k} + \frac{B_2}{(x - r_k)^2} + \cdots + \frac{B_{m_k}}{(x - r_k)^{m_k}} \\ & + \frac{C_1 x + D_1}{(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{C_2 x + D_2}{[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^2} + \cdots + \frac{C_{n_1} x + D_{n_1}}{[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{n_1}} + \cdots \\ & \cdots + \frac{E_1 x + F_1}{(x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2} + \frac{E_2 x + F_2}{[(x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2]^2} + \cdots + \frac{C_{n_l} x + D_{n_l}}{[(x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2]^{n_l}}\end{aligned}$$

**Observación 5.4.1** El teorema anterior significa que, a la hora de escribir $P(x)/Q(x)$ como suma de fracciones simples, por cada raíz real $r$ de multiplicidad $k$ de $Q(x) = 0$ se añaden los sumandos de la forma

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - r)^k}$$

y por cada par de raíces complejas conjugadas $\alpha \pm \beta i$ de multiplicidad $k$ de $Q(x) = 0$ se añaden los sumandos

$$\frac{A_1 x + B_1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{A_2 x + B_2}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^2} + \cdots + \frac{A_k x + B_k}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^k}$$

**Observación 5.4.2** Los coeficientes $A_1, \ldots, D_{n_l}$ del teorema 5.4.1 se calculan del siguiente modo: se reduce la igualdad de fracciones a un común denominador y, multiplicando la igualdad por él, obtenemos una igualdad de polinomios. Como dos polinomios son iguales si todos sus coeficientes son iguales, basta igualar los coeficientes para obtener un sistema lineal en el que las incógnitas son las constantes a determinar y todo se reduce, por tanto, a resolver el sistema lineal.

**Ejemplo 5.4.3** Veamos como escribir la función racional

$$\frac{5x^4 + 2x^2 + 2x + 3}{x^5 - x^4 - x + 1}$$

como suma de fracciones simples. Si factorizamos el denominador de la función racional obtenemos que

$$x^5 - x^4 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)(x^2+1)$$

Como el denominador no tiene ningún factor en común con el numerador (es fácil de comprobar por simple sustitución de las raíces) y el grado del numerador es menor que el grado del denominador, pasamos a aplicar el teorema 5.4.1, que nos dice que

$$\frac{5x^4+2x^2+2x+3}{x^5-x^4-x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \tag{5.1}$$

Multiplicando la igualdad anterior por $x^5 - x^4 - x + 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} 5x^4+2x^2+2x+3 &= A(x-1)(x+1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) \\ &\quad + C(x-1)^2(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)^2(x+1) \\ &= (A+C+D)x^4 + (B-2C-D+E)x^3 + (B+2C-D-E)x^2 \\ &\quad + (B-2C+D-E)x + (-A+B+C+E) \end{aligned}$$

de donde se deduce que los coeficientes $A, B, C, D, E$ son solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A+C+D & = & 5 \\ B-2C-D+E & = & 0 \\ B+2C-D-E & = & 2 \\ B-2C+D-E & = & 2 \\ -A+B+C+E & = & 3 \end{array} \right.$$

y por tanto tenemos que

$$A = 2,\ B = 3,\ C = 1,\ D = 2,\ E = 1$$

Sustituyendo ahora en (5.1) obtenemos

$$\frac{5x^4+2x^2+2x+3}{x^5-x^4-x+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

con lo que ya hemos obtenido la función racional expresada como suma de fracciones simples.

Para aplicar lo visto hasta ahora en el cálculo de la integral de una función racional nos falta saber integrar las fracciones simples. Veamos como hacerlo.

La integral de la fracción simple de la forma $A/(x-r)$ es casi inmediata:

$$\int \frac{A}{x-r}\,dx \underbrace{\overset{\uparrow}{=}}_{u=x-r\Rightarrow du=dx} \int \frac{A}{u}\,du = A\ln|u|+C = A\ln|x-r|+C$$

y del mismo modo la integral de $A/(x-r)^n$ (para $n\neq 1$) es:

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{(x-r)^n}\,dx &\underbrace{\overset{\uparrow}{=}}_{u=x-r\Rightarrow du=dx} \int \frac{A}{u^n}\,du = \int Au^{-n}\,du = A\frac{u^{-n+1}}{-n+1}+C\\ &= \frac{A}{(1-n)(x-r)^{n-1}}+C\end{aligned}$$

La integral de la fracción simple $(Ax+B)/[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ se obtiene del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx &= \int \left[\frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right]dx\\ &= \int \frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx + \int \frac{A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx \qquad (5.2)\end{aligned}$$

y puesto que tenemos que (haciendo el cambio $u=(x-\alpha)^2+\beta^2$)

$$\int \frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{A}{2}\ln|(x-\alpha)^2+\beta^2|+C \qquad (5.3)$$

y también que (haciendo ahora el cambio $u=(x-\alpha)/\beta$)

$$\int \frac{A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int \frac{\frac{A\alpha+B}{\beta^2}}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}\,dx = \frac{A\alpha+B}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+C \qquad (5.4)$$

basta ahora con sustituir (5.3) y (5.4) en (5.2) para obtener

$$\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{A}{2}\ln|(x-\alpha)^2+\beta^2| + \frac{A\alpha+B}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+C$$

Tan solo nos queda por calcular la primitiva de la fracción simple de la forma $(Ax+B)/[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n$. Es el caso más laborioso y no se supone conocido por los alumnos que acceden a la Universidad, por lo que lo cosideramos opcional y lo dejamos para la sección 5.5 con el único ánimo de completar la exposición de esta sección.

Aplicando lo visto hasta el momento (si incluimos lo expuesto en la sección 5.5) podemos calcular la integral de cualquier función racional. Veámoslo con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.4.4** Calculemos

$$I = \int \frac{x^7 - 2x^6 - 4x^5 + 12x^4 - 3x^3 - x^2 + 25x - 26}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4}\, dx \tag{5.5}$$

Para resolver (5.5) primero debemos hacer la división entre el polinomio del numerador y el del denominador, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{x^7 - 2x^6 - 4x^5 + 12x^4 - 3x^3 - x^2 + 25x - 26}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4} &= x^2 + x - 2 \\ &+ \frac{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4} \end{aligned}$$

por lo que, si sustituimos en (5.5) obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \left(x^2 + x - 2\right)\, dx + \int \frac{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4}\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \int \frac{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4}\, dx \end{aligned} \tag{5.6}$$

Para resolver la integral de (5.6) debemos primero calcular las raíces del polinomio del denominador, y obtenemos[1]

$$x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1)(x^2+1)$$

de lo que deducimos que existen constantes $A, B, C, D, E$ tales que

$$\begin{aligned} \frac{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \\ &+ \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \end{aligned}$$

[1] Para calcular las raíces del polinomio y factorizarlo utilizamos, por ejemplo, el método de Ruffini.

Multiplicando la igualdad anterior por $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4$ obtenemos

$$\begin{aligned}
4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18 &= A(x-2)(x+1)(x^2+1) \\
&\quad + B(x+1)(x^2+1) + C(x-2)^2(x^2+1) \\
&\quad + (Dx+E)(x-2)^2(x+1) \\
&= (A+C+D)x^4 + (-A+B-4C-3D+E)x^3 \\
&\quad + (-A+B+5C-3E)x^2 + (-A+B-4C+4D)x \\
&\quad + (-2A+B+4C+4E)
\end{aligned}$$

por lo que $A, B, C, D, E$ son solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{lcr}
A+C+D & = & 4 \\
-A+B-4C-3D+E & = & -2 \\
-A+B+5C-3E & = & -3 \\
-A+B-4C+4D & = & 21 \\
-2A+B+4C+4E & = & -18
\end{array}\right.$$

es decir

$$A = 3, B = 4, C = -2, D = 3, E = -2$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4} &= \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \\
&\quad - \frac{2}{x+1} + \frac{3x-2}{x^2+1}
\end{aligned}$$

y sustituyendo en (5.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \\
&\quad + \int \left[\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{3x-2}{x^2+1}\right] dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \int \frac{3}{x-2}\, dx \\
&\quad + \int \frac{4}{(x-2)^2}\, dx - \int \frac{2}{x+1}\, dx + \int \frac{3x-2}{x^2+1}\, dx
\end{aligned}$$

y utilizando las expresiones que hemos visto para las integrales de fracciones simples

$$I = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln|x-2| - \frac{4}{(x-2)}$$
$$- 2\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x^2+1| - 2\arctan x + C$$

## 5.5 Integrales de funciones racionales: Caso de raíces complejas múltiples

Recordamos que esta sección es opcional por no incluirse entre los conocimientos previos al acceso a la Universidad.

Para integrar la fracción simple $(Ax+B)/[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n$ tenemos en cuenta que

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx = \int \left[\frac{A(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{A\alpha+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\right]\,dx$$
$$= \int \frac{A(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx + \int \frac{A\alpha+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx$$

y como para la primera de las integrales del último miembro de la igualdad tenemos que (haciendo el cambio de variable $u = (x-\alpha)^2+\beta^2$)

$$\int \frac{A(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx = \frac{A}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + C$$

obtenemos

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx = \frac{A}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

La integral que queda pendiente

$$I_n = \int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

puede calcularse del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
I_n = \int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} &= \frac{1}{\beta^2}\int \frac{(x-\alpha)^2+\beta^2-(x-\alpha)^2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx \\
&= \frac{1}{\beta^2}\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} - \frac{1}{\beta^2}\int \frac{(x-\alpha)^2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

donde la primera de las integrales en la última igualdad es exactamente la misma que la de inicio (multiplicada por una constante) pero con el denominador elevado a $n-1$ en lugar de $n$, es decir, es $I_{n-1}$ multiplicada por una constante, y la segunda de las integrales se resuelve por partes, obteniendo de ese modo

$$
\underbrace{\begin{aligned}
u = x-\alpha \quad &\Rightarrow \quad du = dx \\
dv = \frac{(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} \quad &\Rightarrow \quad v = \frac{1}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}
\end{aligned}}
$$

$$\downarrow$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{(x-\alpha)^2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx &= \frac{x-\alpha}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} \\
&\quad - \int \frac{dx}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}\,dx \\
&= \frac{x-\alpha}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}I_{n-1} \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

y sustituyendo (5.8) en (5.7) obtenemos

$$
I_n = \frac{x-\alpha}{2\beta^2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\beta^2}I_{n-1}
$$

Este método concluye cuando llegamos hasta $I_1$, que como ya hemos visto es

$$
I_1 = \int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]} = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C
$$

**Observación 5.5.1** El método expuesto aquí para el cálculo de la primitiva de una fracción simple cuyo denominador tiene raíces complejas múltiples puede hacerse de forma más simple mediante la aplicación del *método de Hermite*. La explicación de este método es más propia de un primer curso universitario, por lo que no lo expondremos aquí.

**Ejemplo 5.5.1** Calculemos

$$I = \int \frac{2x^4 + 12x^2 - 11x + 5}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12}\, dx \tag{5.9}$$

Puesto que el polinomio del numerador en (5.9) es ya de menor grado que el del denominador, el siguiente paso es factorizar el polinomio del denominador y obtenemos

$$x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12 = (x-3)(x^2+2)^2$$

que no tiene raíces en común con el polinomio del numerador. Así, existen constantes $A, B, C, D, E$ tales que

$$\frac{2x^4 + 12x^2 - 11x + 5}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx + C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

y multiplicando por $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12$ obtenemos

$$\begin{aligned} 2x^4 + 12x^2 - 11x + 5 &= A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x-3)(x^2+2) \\ &\quad + (Dx+E)(x-3) \\ &= (A+B)x^4 + (-3B+C)x^3 + (4A+2B-3C+D)x^2 \\ &\quad + (-6B+2C-3D+E)x + (4A-6C-3E) \end{aligned}$$

por lo que $A, B, C, D, E$ son solución del sistema

$$\begin{cases} A + B & = & 2 \\ -3B + C & = & 0 \\ 4A + 2B - 3C + D & = & 12 \\ -6B + 2C - 3D + E & = & -11 \\ 4A - 6C - 3E & = & 5 \end{cases}$$

es decir

$$A = 2, B = 0, C = 0, D = 4, E = 1$$

Por tanto tenemos que

$$\frac{2x^4 + 12x^2 - 11x + 5}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12} = \frac{2}{x-3} + \frac{4x+1}{(x^2+2)^2}$$

y sustituyendo en (5.9) obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{x-3}\,dx + \int \frac{4x+1}{(x^2+2)^2}\,dx \\ &= 2\ln|x-3| + \int \frac{4x+1}{(x^2+2)^2}\,dx \end{aligned} \tag{5.10}$$

Para resolver esta última integral hacemos como hemos visto antes en el caso general de este tipo de fracción simple:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+1}{(x^2+2)^2}\,dx &= \int \frac{4x}{(x^2+2)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx \\ &= \frac{-2}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2-x^2}{(x^2+2)^2}\,dx \\ &= \frac{-2}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx \\ &= \frac{-2}{x^2+2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx \end{aligned} \tag{5.11}$$

y esta última integral se resuelve por partes, de modo que si tomamos

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \frac{xdx}{(x^2+2)^2} \quad &\Rightarrow \quad v = \frac{-1}{2(x^2+2)} \end{aligned}$$

obtendremos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx &= \frac{-x}{2(x^2+2)} + \int \frac{dx}{2(x^2+2)}\,dx \\ &= \frac{-x}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned} \tag{5.12}$$

Finalmente, si sustituimos ahora (5.12) en (5.11) y éste a su vez en (5.10), obtenemos

$$\begin{aligned} I &= 2\ln|x-3| - \frac{2}{x^2+2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\left[\frac{-x}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] + C \\ &= 2\ln|x-3| + \frac{x-8}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned}$$

# Tema 5

# Integración Indefinida

## Ejercicios resueltos

**Ejercicio 1** Calcular la integral

$$\int x \ln |x| dx$$

**Solución:** Resolvemos la integral por partes. Si hacemos $u = \ln |x|$ y $dv = x\ dx$, entonces

$$\begin{aligned} u = \ln |x| \quad &\Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\ dx \\ dv = x\ dx \quad &\Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\ x^2 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int x \ln |x| dx &= \frac{1}{2}\ x^2 \ln |x| - \int \frac{1}{2}\ x^2\ \frac{1}{x}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\ x^2 \ln |x| - \int \frac{x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\ x^2 \ln |x| - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

**Ejercicio 2** Calcular la integral

$$\int \arctan x\ dx$$

**Solución:** Como en el ejercicio anterior, esta integral se resuelve por partes. Haciendo $u = \arctan x$ y $dv = dx$, obtenemos

$$\begin{aligned} u = \arctan x \quad &\Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}\ dx \\ dv = dx \quad &\Rightarrow \quad v = x \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}\int \arctan x \; dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \; dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C\end{aligned}$$

**Nota:** La integral $\int x/(1+x^2) \; dx$ se calcula de forma inmediata derivando $\ln |1+x^2|$ o bien mediante el método de cambio de variable, de modo que si hacemos $w = 1+x^2$, entonces $dw = 2x \; dx$ y, por tanto,

$$\int \frac{x}{1+x^2} \; dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{w} \; dw = \frac{1}{2} \ln |w| + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

**Ejercicio 3** Calcular la integral

$$\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \; dx$$

**Solución:** Esta integral podemos resolverla mediante el método de cambio de variable. Si hacemos $u = \operatorname{sen} x$ entonces $du = \cos x \; dx$, y obtenemos

$$\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \; dx = \int \frac{du}{1+u} = \ln |1+u| + C = \ln |1 + \operatorname{sen} x| + C$$

**Ejercicio 4** Calcular la integral

$$\int (\cos^3 x - 2\cos^2 x + 3\cos x - 5) \operatorname{sen} x \; dx$$

**Solución:** Podemos resolver esta integral por el método de cambio de variable. Haciendo el cambio de variable $t = \cos x$ tenemos $dt = -\operatorname{sen} x \; dx$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\int (\cos^3 x - 2\cos^2 x + 3\cos x - 5) \operatorname{sen} x \; dx &= -\int (t^3 - 2t^2 + 3t - 5) \; dt \\ &= -\left( \frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 5t \right) + C \\ &= -\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{3\cos^2 x}{2} + 5\cos x + C\end{aligned}$$

**Ejercicio 5** Comprobar que las funciones

$$f(x) = \ln |x + \sqrt{x^2+1}|, \qquad g(x) = \operatorname{arg\,senh} x$$

se diferencian en una constante.

**Solución:** De la tabla 5.1 de integrales inmediatas sabemos que

$$f'(x) = g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

por lo que tanto $f$ como $g$ son primitivas de una misma función y, por tanto (véase teorema 5.1.1), se diferencian en una constante.

**Ejercicio 6** Calcular la integral

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$$

**Solución:** Es la integral de una función racional, por lo que en primer lugar calculamos las raíces de $x^2-4x+3=0$. Obtenemos que $x=1$ y $x=3$ son las raíces del denominador, así que existen $A$ y $B$ tales que

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

Multiplicando por $x^2-4x+3$ obtenemos

$$1 = A(x-3) + B(x-1) = (A+B)x + (-3A-B)$$

Por tanto

$$A+B=0, \qquad -3A-B=1$$

y, en consecuencia, $A=-1/2$ y $B=1/2$. Así obtenemos que

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-3)}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx &= -\int \frac{1}{2(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{2(x-3)}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C = \ln\sqrt{\frac{x-3}{x-1}} + C
\end{aligned}$$

**Ejercicio 7** Calcular la integral

$$\int x\sqrt{9-2x^2}\ dx$$

**Solución:** Si hacemos el cambio de variable $u = 9 - 2x^2$, basta con derivar $u$ para obtener $du = -4x\ dx$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{9-2x^2}\ dx &= -\frac{1}{4}\int u^{1/2}\ du = -\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\ u^{3/2}\right] + C \\ &= -\frac{1}{6}(9-2x^2)^{3/2} + C\end{aligned}$$

**Ejercicio 8** Calcular la integral

$$\int \frac{4x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 13x + 12}{3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4}\ dx$$

**Solución:** Es la integral de una función racional. El primer paso es calcular las raíces de $3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4 = 0$. Aplicando, por ejemplo, el método de Ruffini, observamos que $x = 1$ es raíz doble y $x = 2$ raíz simple, quedando como resto $3x^2 + 2$, por lo que obtenemos que

$$3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4 = (x-1)^2(x-2)(3x^2+2)$$

Sabemos, por tanto, que

$$\begin{aligned}\frac{4x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 13x + 12}{3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4} &= \frac{A}{x-1} \\ &+ \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{3x^2+2}\end{aligned}$$

Multiplicando ahora por $3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4$ obtenemos

$$\begin{aligned}4x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 13x + 12 &= A(x-1)(x-2)(3x^2+2) \\ &+ B(x-2)(3x^2+2) + C(x-1)^2(3x^2+2) \\ &+ (Dx+E)(x-1)^2(x-2) \\ &= (3A + 3C + D)x^4 + (-9A + 3B - 6C - 4D + E)x^3 \\ &+ (8A - 6B + 5C + 5D - 4E)x^2 + (-6A + 2B - 4C - 2D + 5E)x \\ &+ (4A - 4B + 2C - 2E)\end{aligned}$$

De esta última ecuación deducimos que las constantes $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ satisfacen el sistema

$$\begin{aligned}
3A+3C+D &= 4\\
-9A+3B-6C-4D+E &= -30\\
8A-6B+5C+5D-4E &= 37\\
-6A+2B-4C-2D+5E &= -13\\
4A-4B+2C-2E &= 12
\end{aligned}$$

Este sistema tiene por solución

$$A=3,\ B=-2,\ C=-3,\ D=4,\ E=1,$$

por lo que sustituyendo en las expresiones anteriores, y teniendo en cuenta las propiedades de la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^4-30x^3+37x^2-13x+12}{3x^5-12x^4+17x^3-14x^2+10x-4}\,dx &= \int \frac{3}{x-1}\,dx\\
-\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{4x+1}{3x^2+2}\,dx & \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Las integrales pendientes son inmediatas y se obtiene

$$\int \frac{3}{x-1}\,dx = 3\ln|x-1|+C,$$

$$-\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = \frac{2}{x-1}+C,$$

$$-\int \frac{3}{x-2}\,dx = -3\ln|x-2|+C,$$

y

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x+1}{3x^2+2}\,dx &= \frac{4}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2}\,dx + \int \frac{1}{3x^2+2}\,dx\\
&= \frac{2}{3}\ln|3x^2+2| + \int \frac{1/2}{(3/2)x^2+1}\,dx\\
&= \frac{2}{3}\ln|3x^2+2| + \frac{1}{2\sqrt{3/2}}\int \frac{\sqrt{3/2}}{(\sqrt{3/2}x)^2+1}\,dx\\
&= \frac{2}{3}\ln|3x^2+2| + \frac{1}{2\sqrt{3/2}}\arctan(\sqrt{3/2}x)+C
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (5.1) y teniendo en cuenta que

$$3\ln|x-1| - 3\ln|x-2| = 3\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$$

obtenemos que

$$\int \frac{4x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 13x + 12}{3x^5 - 12x^4 + 17x^3 - 14x^2 + 10x - 4}\, dx = 3\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{3}\ln|3x^2+2| + \frac{1}{2\sqrt{3/2}}\arctan(\sqrt{3/2}x) + C$$

**Ejercicio 9** Calcular la integral

$$\int \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)(1-\operatorname{sen} x)}\, dx$$

**Solución:** Para resolver esta integral en primer lugar realizamos el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$. Así tenemos $dt = \cos x\ dx$, por lo que

$$\int \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)(1-\operatorname{sen} x)}\, dx = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1-t)}\, dt$$

Esta última es la integral de una función racional. La escribimos como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{(1+t^2)(1-t)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{1-t}$$

Multiplicando por $(1+t^2)(1-t)$ obtenemos

$$1 = (At+B)(1-t) + C(1+t^2) = (C-A)t^2 + (A-B)t + (B+C)$$

por lo que $A$, $B$ y $C$ son solución del sistema

$$C - A = 0, \qquad A - B = 0, \qquad B + C = 1$$

cuya solución es

$$A = B = C = 1/2$$

En consecuencia obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(1+t^2)(1-t)}\, dt &= \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\, dt\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\, dt\\ &= \frac{1}{4}\ln|1+t^2| + \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\ln|1-t| + C\end{aligned}$$

Ahora sólo falta deshacer el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, y obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)(1-\operatorname{sen} x)}\, dx &= \frac{1}{4}\ln|1+\operatorname{sen}^2 x|\\ &+ \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2}\ln|1-\operatorname{sen} x| + C\end{aligned}$$

**Ejercicio 10** Calcular la integral

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

**Solución:** Resolveremos esta integral por partes. Si hacemos $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = e^x\, dx$, entonces

$$\begin{aligned} u = \operatorname{sen} x &\Rightarrow du = \cos x\, dx\\ dv = e^x\, dx &\Rightarrow v = e^x\end{aligned}$$

y por tanto

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx \tag{5.2}$$

Aplicando de nuevo la integración por partes en la segunda integral, donde tomamos

$$\begin{aligned} u = \cos x &\Rightarrow du = -\operatorname{sen} x\, dx\\ dv = e^x\, dx &\Rightarrow v = e^x\end{aligned}$$

obtenemos

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \tag{5.3}$$

Si ahora sustituimos (5.3) en (5.2) obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

de donde deducimos que

$$2\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + C$$

por lo que finalmente resulta que

$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

# Ejercicios propuestos

Las soluciones se encuentran al final.

**Ejercicio 1** Calcular la integral

$$\int x^2 \ln |x| \; dx$$

**Ejercicio 2** Calcular la integral

$$\int x^3 \cos x \; dx$$

**Ejercicio 3** Calcular la integral

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \; dx$$

**Ejercicio 4** Calcular la integral

$$\int \frac{2x-3}{1+(x^2-3x+4)^2} \; dx$$

**Ejercicio 5** Calcular la integral

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}} \; dx$$

**Ejercicio 6** Calcular la integral

$$\int \frac{4x^3+14x^2+8x+18}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4} \; dx$$

**Ejercicio 7** Calcular la integral

$$\int \frac{3x^7+21x^6+31x^5-47x^4-69x^3+77x^2+35x+77}{x^5+7x^4+10x^3-18x^2-27x+27} \; dx$$

**Ejercicio 8** Calcular la integral

$$\int \frac{-28x^4+53x^3+32x^2+36x+21}{(x+5)(3x^2+1)(4x^2+3)} \; dx$$

**Ejercicio 9** Calcular la integral

$$\int (\ln x)^4 \; dx$$

**Ejercicio 10** Calcular la integral

$$\int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x - 3\tan x + 2} \; dx$$

**Soluciones de los ejercicios propuestos:**

1. $\displaystyle\int x^2 \ln|x| \; dx = -\frac{x^3}{9} + \frac{x^3 \ln|x|}{3} + C$

2. $\displaystyle\int x^3 \cos x \; dx = x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6x \operatorname{sen} x - 6\cos x + C$

3. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \; dx = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{1+(x^2-3x+4)^2} \; dx = \arctan(x^2-3x+4) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}} \; dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{e^x}{4}\right) + C$

6. $\displaystyle\int \frac{4x^3+14x^2+8x+18}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4} \; dx = 2\ln|x^2+4| + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{4}{x+1} + C$

7. $\displaystyle\int \frac{3x^7+21x^6+31x^5-47x^4-69x^3+77x^2+35x+77}{x^5+7x^4+10x^3-18x^2-27x+27} \; dx = x^3 + x - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x+3)^2} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{-28x^4+53x^3+32x^2+36x+21}{(x+5)(3x^2+1)(4x^2+3)} \; dx = -3\ln|x+5| + \frac{1}{3}\ln|3x^2+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$

9. $\displaystyle\int (\ln x)^4 \; dx = x(\ln x)^4 - 4x(\ln x)^3 + 12x(\ln x)^2 - 24x\ln x + 24x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x - 3\tan x + 2} \; dx = \ln\left|\frac{\tan x - 2}{\tan x - 1}\right| + C$