
CÁLCULO INFINITESIMAL 1

APUNTES DE LA ASIGNATURA
EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN
CUESTIONES Y PROBLEMAS DE EXAMEN

Jaime Fe Marqués

ETSI Caminos – A Coruña

Índice general

Presentación	9
1. El número real	11
1.1. Introducción	11
1.1.1. Condición necesaria y suficiente	11
1.1.2. Demostración por reducción al absurdo	12
1.2. Sucesivas ampliaciones del concepto de número	12
1.2.1. Números naturales	12
1.2.2. Números enteros	13
1.2.3. Números racionales	13
1.2.4. Conjuntos numerables. Principio de inducción	14
1.3. Estructura de cuerpo y relaciones de orden	15
1.3.1. Definición de cuerpo	15
1.3.2. Relación de orden	15
1.3.3. Cuerpo ordenado	16
1.3.4. Cotas e intervalos	17
1.3.5. Valor absoluto	17
1.4. Sucesiones en $\mathbb{Q}$	18
1.4.1. Definición	18
1.4.2. Sucesión convergente	18
1.4.3. Sucesión de Cauchy	19
1.5. Propiedades de $\mathbb{Q}$	19
1.5.1. Cuerpo ordenado	19
1.5.2. Orden denso	19
1.5.3. Conjunto numerable	20
1.5.4. Expresión decimal de un número racional	20
1.6. Necesidad de ampliar $\mathbb{Q}$. Los números reales	21
1.7. Propiedades de $\mathbb{R}$	22
1.7.1. Cuerpo ordenado	22
1.7.2. Racionales e irracionales, densos en $\mathbb{R}$	23
1.7.3. $\mathbb{R}$ es completo	23
1.7.4. $\mathbb{R}$ no es numerable	23
1.8. Operaciones en $\mathbb{R}$	24
1.9. Ejercicios de autoevaluación	25
1.9.1. Test verdadero/falso	25
1.9.2. Cuestión	25
1.9.3. Solución del test verdadero/falso	25
1.9.4. Solución de la cuestión	26
2. Espacios Métricos	27
2.1. Distancia	27
2.1.1. Definición	27

2.1.2.	Métricas más comunes	27
2.2.	Bolas y entornos	28
2.2.1.	Bola abierta	28
2.2.2.	Bola cerrada	28
2.2.3.	Entorno	28
2.3.	Puntos notables en un espacio métrico	28
2.3.1.	Punto de adherencia	29
2.3.2.	Punto de acumulación	29
2.3.3.	Punto aislado	29
2.3.4.	Punto interior	29
2.3.5.	Punto exterior	29
2.3.6.	Punto frontera	30
2.4.	Conjuntos notables en un espacio métrico	30
2.4.1.	Adherencia o conjunto adherente	30
2.4.2.	Conjunto de los puntos aislados	30
2.4.3.	Derivado de A	30
2.4.4.	Interior de A	31
2.4.5.	Exterior de A	31
2.4.6.	Frontera de A	32
2.5.	Conjuntos cerrado, abierto, compacto	33
2.5.1.	Cerrado	33
2.5.2.	Abierto	33
2.5.3.	Relación entre abierto y cerrado	34
2.5.4.	Compacto	34
2.6.	El espacio métrico $(\mathbb{R},)$	34
2.6.1.	Distancia	35
2.6.2.	Abiertos y cerrados	35
2.6.3.	Teorema de Bolzano-Weierstrass	35
2.7.	Ejercicios de autoevaluación	36
2.7.1.	Test verdadero/falso	36
2.7.2.	Cuestión	36
2.7.3.	Solución del test verdadero/falso	37
2.7.4.	Solución de la cuestión	37
3.	Sucesiones en $\mathbb{R}$	39
3.1.	Definición y tipos de sucesiones	39
3.1.1.	Sucesión numérica	39
3.1.2.	Concepto de límite	39
3.1.3.	Tipos de sucesiones	39
3.2.	Propiedades de los límites	40
3.3.	Sucesiones monótonas	41
3.3.1.	Definiciones	41
3.3.2.	Teorema de las sucesiones monótonas	42
3.3.3.	Sucesiones de intervalos encajados	42
3.4.	Operaciones con límites	43
3.4.1.	Suma y diferencia	43
3.4.2.	Producto	43
3.4.3.	Inverso	44
3.4.4.	Cociente	44
3.4.5.	Logaritmo	44
3.4.6.	Exponencial	44

3.4.7.	Potencial-exponencial	45
3.4.8.	Tipos de indeterminación	45
3.5.	Criterios de convergencia	45
3.5.1.	Criterio de Stolz	45
3.5.2.	Criterio de la media aritmética	45
3.5.3.	Criterio de la media geométrica	46
3.5.4.	Regla de la raíz	46
3.6.	Infinitos e infinitésimos	46
3.6.1.	Definiciones	46
3.6.2.	Comparación	47
3.6.3.	Relación entre tipos de infinito	47
3.7.	Sucesiones equivalentes	48
3.7.1.	Definición	48
3.7.2.	Propiedades	48
3.7.3.	Equivalencia con las partes principales	48
3.8.	Sustitución por sucesiones equivalentes	49
3.8.1.	Producto y cociente	49
3.8.2.	Logaritmo	49
3.8.3.	Potencial-exponencial	50
3.8.4.	Suma o diferencia	50
3.9.	Cálculo de límites	51
3.9.1.	A partir del número e	51
3.9.2.	Expresiones polinómicas	53
3.9.3.	Sucesiones recurrentes	54
3.9.4.	Equivalencias de Stirling y trigonométricas	54
3.9.5.	Cambio del tipo de indeterminación	55
	Anexo. Tabla de equivalencias	56
3.10.	Ejercicios de autoevaluación	57
3.10.1.	Test verdadero/falso	57
3.10.2.	Cuestiones	57
3.10.3.	Solución del test verdadero/falso	58
3.10.4.	Solución de las cuestiones	58
4.	Funciones en $\mathbb{R}$	61
4.1.	Nociones generales	61
4.1.1.	Definiciones.	61
4.1.2.	Operaciones con funciones	61
4.1.3.	Tipos de funciones	62
4.2.	Límites de funciones	63
4.2.1.	Límite funcional	63
4.2.2.	Límites laterales	63
4.2.3.	Extensión del concepto de límite	64
4.2.4.	Límite por sucesiones. Relación con el límite funcional	65
4.2.5.	Propiedades de los límites	66
4.2.6.	Operaciones con límites	67
4.3.	Infinitos e infinitésimos	68
4.3.1.	Definiciones	68
4.3.2.	Comparación	68
4.3.3.	Relación entre tipos de infinito	69
4.4.	Funciones equivalentes en un punto	69
4.4.1.	Definición	69

4.4.2.	Sustitución por funciones equivalentes	69
	Anexo. Tabla de equivalencias	71
4.5.	Continuidad de funciones	72
4.5.1.	Función continua	72
4.5.2.	Continuidad lateral	72
4.5.3.	Discontinuidades	73
4.5.4.	Operaciones con funciones continuas	74
4.5.5.	Continuidad de las funciones elementales	74
4.5.6.	Composición de funciones continuas	74
4.6.	Teoremas de las funciones continuas	75
4.6.1.	Teorema de Bolzano (o de los ceros)	75
4.6.2.	Propiedad de Darboux (del valor intermedio)	75
4.6.3.	Teorema de Weierstrass	76
4.6.4.	Imagen de un intervalo cerrado	76
4.6.5.	Imagen de un intervalo	76
4.7.	Continuidad uniforme	77
4.7.1.	Definición	77
4.7.2.	Teorema de Heine	78
4.7.3.	Composición de funciones uniformemente continuas	78
4.8.	Derivabilidad y diferenciabilidad	78
4.8.1.	Función derivable	78
4.8.2.	Función diferenciable	79
4.8.3.	Relación entre ambos conceptos	80
4.8.4.	Interpretación gráfica	81
4.8.5.	Relación entre continuidad y diferenciabilidad	81
4.8.6.	Operaciones con funciones diferenciables	81
4.9.	Regla de la cadena. Aplicaciones	82
4.9.1.	Derivada de la función compuesta	82
4.9.2.	Aplicaciones de la regla de la cadena	83
4.10.	La función inversa	83
4.10.1.	Existencia de la función inversa	83
4.10.2.	Derivada de la función inversa	84
4.11.	Teoremas del valor medio	84
4.11.1.	Teorema de Rolle	84
4.11.2.	Teorema de Cauchy	85
4.11.3.	Teorema de Lagrange o de los incrementos finitos	86
4.11.4.	Funciones monótonas derivables	86
4.11.5.	Funciones constantes	86
4.12.	La derivada como límite de derivadas	87
4.13.	Reglas de L'Hôpital	88
4.14.	Derivadas sucesivas	90
4.15.	Desarrollos limitados de Taylor y MacLaurin	91
4.15.1.	Desarrollo limitado de Taylor de orden n	91
4.15.2.	Desarrollo limitado de MacLaurin de orden n	93
4.15.3.	Término complementario de Lagrange	93
4.15.4.	Teorema del extremo relativo	94
4.15.5.	Aplicaciones del desarrollo de Taylor	95
4.15.6.	Desarrollos deducidos de otros	96
4.16.	Representación de curvas	97
4.17.	Ejercicios de autoevaluación	98
4.17.1.	Tests verdadero/falso	98

4.17.2. Cuestión	99
4.17.3. Solución de los tests verdadero/falso	99
4.17.4. Solución de la cuestión	100
5. Cálculo de primitivas	101
5.1. Introducción y conceptos básicos	101
5.1.1. Funciones trigonométricas	101
5.1.2. Logaritmo neperiano	102
5.2. Funciones hiperbólicas	102
5.2.1. Definición	102
5.2.2. Función par e impar	102
5.2.3. Relación entre el seno y el coseno hiperbólicos	102
5.2.4. Seno, coseno y tangente hiperbólicas de $x + y$	102
5.2.5. Derivadas de las funciones hiperbólicas	102
5.2.6. Funciones inversas	102
5.2.7. Funciones hiperbólicas inversas	103
5.2.8. Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas	104
5.3. Función primitiva. Integrales inmediatas	104
5.3.1. Primitiva de una función	104
5.3.2. Diferencial	105
5.3.3. Linealidad de la integral	105
5.3.4. Integrales inmediatas	105
5.4. Integrales semiinmediatas y cambios de variable	105
5.5. Integración por partes	106
5.6. Fórmulas de reducción	106
5.7. Integrales racionales	107
5.8. Integrales trigonométricas. Cambios de variable.	109
5.9. Integrales irracionales. Cambios de variable.	110
Anexo. Tabla de integrales inmediatas	112
6. Documentos de apoyo	113
6.1. Término general de los enteros (apdo. 1.2.4)	113
6.2. Principio de Inducción: ejemplo (apdo. 1.2.4)	114
6.3. Racionales e irracionales densos en $\mathbb{R}$ (apdo. 1.7.2)	115
6.3.1. Entre dos reales existe un racional	115
6.3.2. Entre dos reales existe un irracional	115
6.4. Regla de L'Hôpital. Ejemplos (apdo 4.13)	116
6.4.1. Aplicación reiterada de la regla de L'Hôpital	116
6.4.2. No existencia del límite del cociente de derivadas	116
6.5. Desarrollos de algunas funciones (apdo. 4.15.2)	117
6.6. Nociones básicas de dibujo de curvas (apdo. 4.16)	117
6.6.1. Dominio, ceros y simetrías	117
6.6.2. Asíntotas	118
6.6.3. Máximos, mínimos y puntos de inflexión	118
6.6.4. Caso particular de funciones racionales	118
6.6.5. Ejercicios	118
6.7. Introducción a los cambios de variable (apdo. 5.4)	119
6.7.1. Cambio de variable explícito	119
6.7.2. Cambio de variable implícito	119
6.7.3. Combinación de ambos métodos	119

7. Cuestiones y problemas de examen	121
7.1. Cuestiones de examen	121
Curso 10/11	121
Curso 11/12	121
Curso 12/13	122
Curso 13/14	122
Curso 14/15	123
Curso 15/16	123
Curso 16/17	123
Curso 17/18	124
Curso 18/19	124
Curso 19/20	125
Curso 20/21	125
Curso 21/22	125
Curso 22/23	126
Curso 23/24	126
Curso 24/25	126
7.2. Soluciones a las cuestiones	127
7.3. Problemas de examen	141
Curso 10/11	141
Curso 11/12	141
Curso 12/13	143
Curso 13/14	143
Curso 14/15	145
Curso 15/16	146
Curso 16/17	148
Curso 17/18	149
Curso 18/19	150
Curso 19/20	151
Curso 20/21	152
Curso 21/22	153
Curso 22/23	154
Curso 23/24	155
Curso 24/25	156
7.4. Soluciones a los problemas	158
7.5. Cuestiones tipo test (V-F)	168
7.6. Soluciones a las cuestiones tipo test	173

Presentación

El presente texto está dirigido a los estudiantes de la asignatura Cálculo Infinitesimal 1 del Grado en Tecnología de la Ingeniería Civil, impartido en la Escuela de Ingenieros de Caminos de la Universidad de A Coruña. Contiene las ideas fundamentales que se exponen en las clases de teoría, acompañadas de ejemplos resueltos y ejercicios propuestos, así como una recopilación de cuestiones y problemas de examen.

Los cinco primeros capítulos corresponden a los correspondientes temas del programa de la asignatura: 1. El número real, 2. Espacios métricos, 3. Sucesiones en $\mathbb{R}$, 4. Funciones reales y 5. Cálculo de primitivas.

El capítulo 6 contiene diversos documentos de apoyo: se incluyen en él algunos ejercicios de cierta extensión que clarifican distintos aspectos de la teoría y complementan los ejemplos resueltos; también figuran algunas demostraciones de interés, que se ha visto preferible no incluir en el tema correspondiente, así como unas nociones breves de dibujo de curvas en coordenadas cartesianas.

Por último, en el capítulo 7 se reúnen 47 cuestiones y 136 problemas propuestos en examen desde el curso 2010/11 al 2024/25. Las cuestiones incluyen su resolución detallada y los problemas sólo el resultado final.

Al recoger la mayor parte del contenido de las clases, los apuntes permiten dedicar mayor atención a la explicación, facilitando así la comprensión de la materia. Los ejercicios de auto-evaluación del final de cada capítulo, tipo test y cuestiones cortas, facilitan asimismo el estudio personal posterior y la comprobación de la asimilación de los conceptos expuestos. En el caso de utilizar para el estudio el documento en pdf, los enlaces desde el índice a los distintos apartados, y entre estos, facilitan su localización.

Este material pretende ser un apoyo para las clases, pero no sustituirlas. En el aula se desarrollan y comentan las ideas aquí contenidas, se relacionan conceptos, se resuelven ejercicios y se dibujan algunos gráficos que complementan los apuntes. Por ello se recomienda vivamente la asistencia a clase para facilitar el dominio de la materia.

La mayor parte de los ejercicios de examen del capítulo 7 son originales y en su preparación han participado los distintos profesores que han colaborado en la asignatura durante estos años: Xesús Nogueira, Andrés Soage, Marco Campo, Iván Couceiro y Guillermo Lorenzo. Asimismo, a lo largo del texto aparecen referencias al libro de Juan de Burgos Román “Cálculo infinitesimal de una variable” (2ª ed.), que ha sido de gran ayuda en este intento de preparar unos apuntes útiles, claros y con el suficiente rigor.

A Coruña, 24 de junio de 2026

Capítulo 1

El número real

1.1. Introducción

La principal finalidad de este tema es presentar los distintos tipos de números como modo de dar solución a ecuaciones cada vez más complicadas, así como definir el concepto de distancia y clasificar los distintos puntos que podemos encontrar en un espacio métrico. Un segundo objetivo, no menos importante, es aclarar los conceptos de condición necesaria, condición suficiente y reducción al absurdo, imprescindibles en un razonamiento lógico, así como reunir algunos conceptos (relación de orden, supremo e ínfimo, valor absoluto...) de uso muy frecuente.

1.1.1. Condición necesaria y suficiente

Implicación. Cuando de un hecho (suceso, propiedad...) A , se deduce otro B , decimos que “ A implica B ”, lo cual se denota con el símbolo $\implies$:

$$\boxed{A \implies B}$$

Esto se enuncia también como “si A , entonces B ”.

En este caso, **A es condición suficiente de B** (es suficiente que ocurra A para que ocurra B). Y **B es condición necesaria de A** (B se deduce necesariamente de A).

Ejemplo. En la frase “si piso una bombilla, se rompe”, afirmamos que el hecho de pisar la bombilla es suficiente para que se rompa, luego es condición suficiente; y que la rotura se produce necesariamente como consecuencia, luego es condición necesaria. Pero no es necesario pisar la bombilla para que se rompa, pues se puede romper por otra causa; y el hecho de que la bombilla se rompa no es suficiente para asegurar que la hemos pisado, por la misma razón.

Es decir, “pisar la bombilla” es condición suficiente para romperse, pero no necesaria; y “romperse” es condición necesaria de pisar la bombilla, pero no suficiente.

Equivalencia. Si se dan a la vez “ A implica B ” y “ B implica A ”, entonces A es condición necesaria y suficiente de B y B es condición necesaria y suficiente de A . En este caso se dice que “ A equivale a B ” (o “ B equivale a A ”); o también “ A si y sólo si B ”. Se denota como:

$$\boxed{A \iff B}$$

Ejemplo. Si el único modo de aprobar una asignatura es obtener una nota N mayor o igual que 6 en un trabajo, “ $N \geq 6$ ” es la condición necesaria y suficiente para aprobar. Es decir que si es $N \geq 6$, se aprueba. Y si se aprueba, entonces $N \geq 6$.

Proposición contraria. Dada una proposición A , su contraria representa el caso o suceso complementario a la proposición A y se denota por $\text{no}(A)$.

Ejemplo. Dados los números x e y , si la proposición A es “ x es mayor que y ”, su contraria, $\text{no}(A)$, es “ x es menor o igual que y ”.

Si la proposición contraria de una dada A , es $\text{no}(A)$, es inmediato ver que la proposición contraria de $\text{no}(A)$ será A .

$$\boxed{\text{no}(\text{no}(A)) = A}$$

En el ejemplo anterior, la proposición contraria de $\text{no}(A)$ (“ x es menor o igual que y ”) es “ x es mayor que y ”, es decir A .

Relación entre proposiciones contrarias. Si entre dos proposiciones se da una implicación, entre sus contrarias se da la implicación en sentido contrario y viceversa, es decir:

$$\boxed{[A \implies B] \iff [\text{no}(B) \implies \text{no}(A)]}$$

Demostración. Lo razonamos de izquierda a derecha (de derecha a izquierda se razona igual). Veamos que si $[A \implies B]$, entonces $[\text{no}(B) \implies \text{no}(A)]$. En efecto, si de $\text{no}(B)$ no se dedujera $\text{no}(A)$, significa que podría darse A . Y al darse A , se daría B , con lo que tendríamos a la vez $\text{no}(B)$ y B , lo cual no tiene sentido (no puede ocurrir algo y su contrario a la vez).

Ejemplo. Si obtener una nota N mayor o igual que 5 en el examen supone aprobar una asignatura, entonces no aprobar supone que no se ha obtenido esa nota (por obtener una menor o no obtener ninguna), pues si se hubiera obtenido, se habría aprobado.

1.1.2. Demostración por reducción al absurdo

Este modo de demostración consiste en que, para probar una propiedad P , suponemos lo contrario y razonamos. Si llegamos a un resultado falso (un absurdo), hemos probado la propiedad. Resulta particularmente útil cuando hemos de demostrar algo y no sabemos de qué partir.

Demostración. Queremos probar P . Para ello suponemos $\text{no}(P)$ y -razonando- llegamos a R (falso). A partir de la relación entre proposiciones contrarias del apdo. 1.1.1, tenemos:

$$[\text{no}(P) \implies R] \iff [\text{no}(R) \implies \text{no}(\text{no}(P)) = P]$$

Es decir, nuestro razonamiento -obtener R a partir de $\text{no}(P)$ - equivale a obtener P a partir de algo verdadero ($\text{no}(R)$), con lo que hemos demostrado la propiedad P , como queríamos.

1.2. Sucesivas ampliaciones del concepto de número

Vamos a revisar brevemente los distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales), ya conocidos, mostrando que cada nuevo conjunto da solución a una operación que no la tenía en el conjunto anterior. Esto será de utilidad para la posterior introducción de los números reales.

1.2.1. Números naturales

Denotamos como $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, que nos permite contar y enumerar:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Vemos que tiene un número infinito de elementos y no contiene al 0. Observamos que la suma y el producto de elementos de $\mathbb{N}$ pertenecen a $\mathbb{N}$, es decir que $+$ y $\cdot$ son operaciones “cerradas”.

Subconjuntos de $\mathbb{N}$. El conjunto $\mathbb{N}$ tiene subconjuntos como los pares, los múltiplos de 3 o las potencias de 5. Representamos estos subconjuntos respectivamente como:

$$\{2n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \{3n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \{5^n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

y sus elementos se obtienen dando valores naturales a n en la expresión entre llaves. Comparando $\mathbb{N}$ con el conjunto de los pares, podemos hacernos la pregunta de si hay más naturales que pares. Por un lado es claro que hay un par cada dos naturales. Por otro, podemos asignar un par a cada natural, de modo que para cada natural haya un par y viceversa:

$$1 \longleftrightarrow 2, \quad 2 \longleftrightarrow 4, \quad 3 \longleftrightarrow 6, \dots, \quad n \longleftrightarrow 2n, \dots$$

en cuyo caso parece que hay el mismo número. Incluso podemos encontrar correspondencias como la anterior, que sugieran que hay más pares que naturales. La conclusión de esta aparente contradicción es que, al tratarse de conjuntos infinitos, es inadecuado decir que uno tiene más o menos elementos que otro. Lo que podemos afirmar es que entre ambos conjuntos existe una biyección, por lo que decimos que tienen el mismo **cardinal**.

Se demuestra que ser biyectivo con un subconjunto suyo distinto de él (subconjunto **propio**) es una **condición suficiente** para que un **conjunto** sea **infinito**.

1.2.2. Números enteros

Si en el conjunto de los naturales tratamos de dar solución a la ecuación $3 + x = 8$, la solución es el número natural $x = 5$. Pero, si la ecuación es $8 + x = 3$, vemos que ningún natural la cumple, lo que nos lleva al concepto de número negativo y a la necesidad de la ampliación de $\mathbb{N}$ para obtener el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Además de incluir el elemento neutro 0, observamos que para cada número natural n hemos añadido su opuesto (elemento que sumado a n da como resultado el 0):

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists (-n) \in \mathbb{Z} / n + (-n) = 0$$

lo que permite definir la diferencia como **suma del opuesto**. Es inmediato que los naturales son un subconjunto de los enteros, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, y podemos describir $\mathbb{Z}$ como **una ampliación de $\mathbb{N}$ que nos permite definir la diferencia**.

1.2.3. Números racionales

Si en $\mathbb{Z}$ tratamos de dar solución a la ecuación $3x = 12$, la solución es el entero $x = 4$. Pero, si la ecuación es $12x = 3$, vemos que no existe solución. Esto nos lleva al concepto de número fraccionario y a la necesidad de ampliar $\mathbb{Z}$ para obtener el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \text{ donde } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

donde p/q y p'/q' representan el mismo número si $pq' = p'q$.

Las operaciones de suma y producto de fracciones son conocidas. Y ahora podemos obtener el inverso de cualquier elemento distinto de 0 (cuyo producto por el elemento da 1):

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} (p \neq 0) \exists \left(\frac{p}{q} \right)^{-1} / \frac{p}{q} \left(\frac{p}{q} \right)^{-1} = 1$$

lo que nos permite definir el cociente como producto por el inverso.

Es fácil ver que los números de la forma $p/1, p \in \mathbb{Z}$ se comportan como los enteros, lo que nos permite afirmar que éstos son un subconjunto de los racionales, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, y podemos describir $\mathbb{Q}$ como **una ampliación de $\mathbb{Z}$ que nos permite definir el cociente**.

1.2.4. Conjuntos numerables. Principio de inducción

Definición. Un conjunto es numerable si es biyectivo con $\mathbb{N}$ o un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Ejemplos. Con la definición dada, todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es numerable. También es fácil demostrar que $\mathbb{Z}$ es numerable. Para ello basta tomar en primer lugar el 0 y a continuación enteros positivos y negativos alternativamente:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

Todo entero aparece en la lista una sola vez y es fácil obtener la posición de cualquiera de ellos, a partir de lo cual se puede despejar el valor del entero que ocupa una determinada posición, par o impar. Más complicado resulta obtener una única expresión para el número que ocupa la posición n (véase el documento de apoyo [6.1](#)).

Principio de inducción. Para demostrar una propiedad P de los elementos de un conjunto numerable, podemos proceder del siguiente modo:

- 1) Se comprueba que se cumple la propiedad para el primer elemento: $P(1)$ es cierta.
- 2) Se demuestra que, si se cumple la propiedad para $n = k$, se cumple para $n = k + 1$.

$$P(k) \text{ es cierta} \implies P(k + 1) \text{ es cierta}$$

A partir de lo anterior, podemos asegurar que la propiedad se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{1) + 2) \implies P(n) \text{ es cierta } \forall n \in \mathbb{N}}$$

Ejemplo. Hemos de demostrar la fórmula de la suma de los n primeros naturales:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Lo comprobamos para $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \implies P(1) \text{ es cierta}$$

- 2) Suponemos que la fórmula se cumple para $n = k$:

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Para demostrar que se cumple para $n = k + 1$, añadimos $(k + 1)$ al miembro izquierdo y operamos, teniendo en cuenta la igualdad anterior:

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = (k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

que corresponde a la expresión que hemos de demostrar, para $n = k + 1$, es decir $P(k + 1)$, por lo que hemos demostrado que se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicios. Demuestra que:

- a) La suma de los n primeros impares vale n^2 .
- b) La suma de los cubos de los n primeros naturales vale $(1 + 2 + \dots + n)^2$. (Solución en [6.2](#)).

1.3. Estructura de cuerpo y relaciones de orden

1.3.1. Definición de cuerpo

En esta asignatura no estudiamos estructuras algebraicas. La única que vamos a considerar es la de cuerpo, que agrupa las propiedades que cumplen la suma y el producto de números racionales y que también cumplirán los números reales que vamos a definir.

Sea un conjunto K , de dos o más elementos, en el que se definen dos operaciones internas $+$ y $\cdot$ (suma y producto). Decimos que tiene estructura de **cuerpo conmutativo** si y sólo si:

- a) Con respecto a $+$, tiene las propiedades asociativa, conmutativa, existencia del neutro y existencia del opuesto. Es decir que, si x, y, z son elementos cualesquiera de K , se cumple:

$$x + (y + z) = (x + y) + z; \quad x + y = y + x; \quad \exists 0 \in K / \forall x, x + 0 = x; \quad \exists (-x) \in K / x + (-x) = 0$$

- b) Con respecto a $\cdot$, tiene las propiedades asociativa, conmutativa, existencia del elemento unidad y existencia del inverso. Si x, y, z son elementos cualesquiera de K , se cumple:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z; \quad x \cdot y = y \cdot x; \quad \exists 1 \in K / \forall x, x \cdot 1 = x; \quad \forall x \neq 0, \exists x^{-1} \in K / x \cdot (x^{-1}) = 1$$

- c) La operación $\cdot$ es distributiva respecto a $+$. Es decir, $\forall x, y, z \in K$ se cumple:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Ejemplo. Es fácil comprobar que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no tienen estructura de cuerpo, pero $\mathbb{Q}$ sí la tiene.

1.3.2. Relación de orden

Dado un conjunto K , una relación R entre sus elementos es de orden si y sólo si $\forall a, b, c \in K$ se cumplen las propiedades siguientes:

- a) Reflexiva. Todo elemento está relacionado consigo mismo: aRa .

- b) Antisimétrica. Si a está relacionado con b y b con a , coinciden:

$$\left. \begin{array}{l} a R b \\ b R a \end{array} \right\} \implies a = b$$

- c) Transitiva. Si a está relacionado con b y b con c , a lo estará con c :

$$\left. \begin{array}{l} a R b \\ b R c \end{array} \right\} \implies a R c$$

Las relaciones de orden suelen denotarse con el símbolo $\leq$. También usamos el símbolo $\geq$:

$$a \geq b \iff b \leq a$$

Si a está en relación con b , pero son distintos, se escribe $a < b$ (relación de **orden estricto**):

$$a \leq b, a \neq b \implies a < b$$

Orden total. El orden es total si dos elementos cualesquiera están relacionados:

$$\forall a, b \in K \implies a \leq b \text{ o bien } b \leq a$$

De lo contrario, se trata de un **orden parcial**.

Orden compatible. Si en K están definidas las operaciones $+$ y $\cdot$, decimos que el orden es:

- Compatible con la suma, si y sólo si:

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c, \forall c \in K$$

- Compatible con el producto, si y sólo si:

$$a \leq b \implies a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c \in K, c > 0$$

Ejemplo 1. La relación $\leq$ entre dos racionales p, q , definida como:

$$p \leq q \iff \exists r \in \mathbb{Q}, r \geq 0 / p + r = q$$

es de orden total compatible con la suma y el producto.

Ejemplo 2. La relación de inclusión entre conjuntos, que se denota por $\subset$, es de orden parcial.

1.3.3. Cuerpo ordenado

Definición. Es un cuerpo conmutativo dotado de una relación de orden total, compatible con las operaciones suma y producto.

Propiedades. Un cuerpo ordenado posee diversas propiedades, que se enumeran a continuación. Algunas, como la **a)**, la **e)** o la **f)**, parecen evidentes, aunque no lo son. Por ejemplo, no es evidente que el producto de un elemento por el neutro de la suma dé como resultado el neutro de la suma ($a \cdot 0 = 0$). Algunas se demuestran a continuación.

a) $\boxed{a \leq b, c \leq d \implies a + c \leq b + d}$

D: $a \leq b \implies a + c \leq b + c; \quad c \leq d \implies b + c \leq b + d.$ Entonces $a + c \leq b + d$.

b) $\boxed{a \leq 0 \implies -a \geq 0}$

D: $a \leq 0 \implies a + (-a) \leq 0 + (-a) \implies 0 \leq -a \implies -a \geq 0.$

c) $\boxed{a \leq b \implies -a \geq -b}$

D: Se propone como ejercicio, a partir de la demostración anterior.

d) $\boxed{a \leq b, c < 0 \implies ac \geq bc}$

D: Se demuestra a partir de **b)**, **c)**, **f)** y la definición de cuerpo ordenado.

e) $\boxed{a \cdot 0 = 0}$

D: $ab = a(b + 0) = ab + a \cdot 0 \implies \overbrace{-(ab) + (ab)}^0 = \overbrace{-(ab) + (ab)}^0 + a \cdot 0 \implies a \cdot 0 = 0.$

f) $\boxed{a(-1) = -a}$

D: $0 = a \cdot 0 = a(-1 + 1) = a(-1) + a \cdot 1 \implies 0 = a(-1) + a \implies a(-1) = -a.$

g) $\boxed{(-a)(-b) = ab}$

D: Se propone como ejercicio, a partir de **f)**.

h) $\boxed{-a - b = -(a + b)}$

D: Se propone como ejercicio, a partir de **f)**.

1.3.4. Cotas e intervalos

Sea A un conjunto entre cuyos elementos existe una relación de orden. Sea $D \subset A$. Definimos:

- a) El elemento $M \in A$ es **cota superior** de D si

$$M \geq x, \forall x \in D$$

en cuyo caso se dice que D está acotado superiormente. La menor de las cotas superiores (si existe) es el **supremo**. Si el supremo pertenece a D , se le llama **máximo**.

- b) El elemento $m \in A$ es **cota inferior** de D si

$$m \leq x, \forall x \in D$$

En este caso se dice que D está acotado inferiormente. La mayor de las cotas inferiores (si existe) es el **ínfimo**. Si el ínfimo pertenece a D , se le llama **mínimo**.

- c) **Intervalos.** En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, un intervalo cerrado de extremos a y b es el conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{Q} / a \leq x \leq b\}$$

Ejercicios.

1. Define los intervalos (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, obteniendo para cada uno de ellos una cota superior y otra inferior, así como el supremo, ínfimo, máximo y mínimo.
2. Demuestra que el supremo, si existe, es único.

1.3.5. Valor absoluto

Definición. Sea K un cuerpo ordenado y sea $K^+ = \{x \in K / x > 0\}$. Llamamos valor absoluto a la siguiente aplicación de K en $K^+ \cup \{0\}$:

$$|| : K \rightarrow K^+ \cup \{0\} / |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

A partir de la definición dada y de la propiedad **b)** de un cuerpo ordenado, se cumple:

$$|x| = \max \{x, -x\}$$

En efecto, si $x \geq 0$, entonces $-x \leq 0$, luego

$$|x| = x \geq 0 \geq -x \implies |x| = \max \{x, -x\}$$

Si $x < 0$, entonces $-x > 0$, luego

$$|x| = -x > 0 > x \implies |x| = \max \{x, -x\}$$

Propiedades.

a) $|x| > 0, \forall x \neq 0; |0| = 0$

b) $|x| < y \iff -y < x < y$

c) $|xy| = |x||y|$, a partir de la cual, si $x \neq 0$, $|x^{-1}| = |x|^{-1}$

d) $|x + y| \leq |x| + |y|$, a partir de la cual $|x - y| \geq ||x| - |y||$

Demostraciones.

a) Si $x > 0 \implies |x| = x > 0$. Si $x < 0 \implies |x| = -x > 0$. Luego $|x| > 0, \forall x \neq 0$.

Si $x = 0 \implies |x| = x = 0$.

b) Usando la propiedad $|x| = \max\{x, -x\}$, resulta $|x| \geq x$ y $|x| \geq -x$. Por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} y > |x| \geq x \implies x < y \\ y > |x| \geq -x \implies -y < x \end{array} \right\} \implies -y < x < y$$

c) La primera igualdad se demuestra utilizando las propiedades de un cuerpo ordenado en los distintos casos posibles, a saber: x o y nulo, ambos positivos, ambos negativos, x e y de distinto signo. Demostramos la segunda:

$$1 = |1| = |x x^{-1}| = |x| |x^{-1}| \implies |x^{-1}| = |x|^{-1}$$

d) Sabemos que $|x| \geq x$, $|x| \geq -x$. También $|y| \geq y$, $|y| \geq -y$. Entonces:

$$|x| + |y| \geq x + y; \quad |x| + |y| \geq -x - y = -(x + y)$$

Si $|x| + |y|$ es mayor o igual que $x + y$ y que $-(x + y)$, será mayor o igual que el mayor de ambos; o sea, $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Para demostrar la segunda desigualdad, se propone como ejercicio hacer con y las operaciones que se muestran a continuación para x , y concluir.

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \implies |x - y| \geq |x| - |y|$$

1.4. Sucesiones en $\mathbb{Q}$

Vamos a continuación a dar unas ideas básicas de sucesiones, que se tratarán con más profundidad en el tema 3. Las sucesiones nos serán de utilidad al estudiar las propiedades y también las “carencias” del conjunto $\mathbb{Q}$, que nos llevarán a definir los números reales.

1.4.1. Definición

De modo informal, podemos definir una sucesión en $\mathbb{Q}$ como un conjunto ordenado de infinitos racionales. Sus términos se obtienen dando valores a n en el término general $a_n \in \mathbb{Q}$:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots$$

Un caso particular de interés es el de las sucesiones **monótonas crecientes**, que cumplen:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una sucesión está **acotada superiormente** si sus términos no superan un cierto valor:

$$\exists k \in \mathbb{Q} / a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.4.2. Sucesión convergente

Una sucesión converge en $\mathbb{Q}$ si tiene límite finito, es decir existe un número racional al que los términos de la sucesión se acercan tanto como queramos, sin más que tomar términos suficientemente avanzados. Esta condición se expresa como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} / |a_m - \alpha| < \varepsilon \quad \forall m \geq n$$

Ejemplo. Sea la sucesión de término general a_n :

$$a_n = \frac{2n+3}{n+1} \quad \left(= \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots \right)$$

Esta sucesión tiene como límite 2. Esto se puede justificar, por ejemplo, descomponiendo a_n y observando que el segundo sumando llega a hacerse tan pequeño como queramos:

$$a_n = \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1} \longrightarrow 2$$

En el tema 3 estudiaremos métodos más generales para el cálculo de límites.

1.4.3. Sucesión de Cauchy

Una sucesión es de Cauchy si sus términos llegan a acercarse entre sí tanto como queramos, sin más que tomar términos suficientemente avanzados. Es decir:

$$\{a_n\} \text{ es de Cauchy} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} / |a_p - a_q| < \varepsilon \forall p, q \geq n$$

Relación. Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Demostración. Partimos de la definición de sucesión convergente, usando $\varepsilon/2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \implies \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} / |a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \forall m \geq n$$

Entonces, $\forall p, q \geq n$ se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} |a_p - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |a_q - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \implies |a_p - a_q| = |a_p - \alpha + \alpha - a_q| \leq |a_p - \alpha| + |\alpha - a_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

luego dos términos llegan a estar tan próximos entre sí como queramos.

1.5. Propiedades de $\mathbb{Q}$

1.5.1. Cuerpo ordenado

El conjunto $\mathbb{Q}$ tiene estructura de cuerpo conmutativo (apdo. 1.3.1) y la relación $\leq$ definida en 1.3.2 cumple las propiedades de orden total compatible, por lo que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado.

1.5.2. Orden denso

Decimos que el orden en un conjunto C es denso si, entre dos elementos distintos en relación de orden, existe otro, c . Para justificar que el orden en $\mathbb{Q}$ es denso, basta encontrar, para cualquier par de elementos, uno intermedio c . El más sencillo es la semisuma de ambos.

Demostración. Sea $a < b$. Entonces, al ser el orden compatible con la suma y el producto,

$$a < b \implies \left\{ \begin{array}{l} a + a < a + b \\ a + b < b + b \end{array} \right\} \implies 2a < a + b < 2b \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} a < \frac{a+b}{2} < b$$

Consecuencias.

1. Si entre los racionales a y b existe, al menos, otro (c), entre a y c existirá un segundo (c_1) y, entre c y b , un tercero (c_2). Entre cada dos consecutivos de los anteriores habrá un nuevo racional y así sucesivamente. Como podemos repetir el proceso tantas veces como queramos, concluimos que **entre dos racionales distintos hay infinitos racionales**.
2. Una segunda consecuencia del orden denso es que **no existe el racional siguiente a uno dado** (en la recta). Si dado $p \in \mathbb{Q}$, pudiéramos encontrar el racional q inmediatamente posterior a p , al ser $p < q$ habría infinitos racionales entre ambos, luego queda demostrado por reducción al absurdo que no existe el racional siguiente a p .

1.5.3. Conjunto numerable

En el apartado 1.2.4 hemos visto que $\mathbb{Z}$ es numerable tomando alternativamente enteros positivos y negativos. Pero entre cada dos enteros hay infinitos racionales, por lo que no es tan inmediato demostrar la numerabilidad de $\mathbb{Q}$. Para simplificar consideraremos sólo los racionales positivos. En primer lugar construimos una tabla en la que estén todos:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & , & \frac{2}{1} & , & \frac{3}{1} & , & \frac{4}{1} & , & \cdots \\ \frac{1}{2} & , & \frac{2}{2} & , & \frac{3}{2} & , & \frac{4}{2} & , & \cdots \\ \frac{1}{3} & , & \frac{2}{3} & , & \frac{3}{3} & , & \frac{4}{3} & , & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Todo elemento de la tabla corresponde a un número racional y un racional cualquiera p/q estará en la fila q , columna p . Para ordenarlos procedemos por diagonales: la primera contiene al $1/1$, la segunda al $1/2$ y al $2/1$, etc. Los racionales positivos ordenados quedan como sigue:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \dots$$

De este modo, vemos que cada número racional corresponde en la lista a un número natural, con lo que demostramos que el conjunto de los racionales es biyectivo con $\mathbb{N}$, por tanto numerable.

Ejercicio. Calcula la posición que ocupa $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. **Sol.** $n_{p,q} = p + \frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}$

1.5.4. Expresión decimal de un número racional

Todo número racional puede expresarse en forma decimal. Esta representación es de uno de los tres tipos siguientes:

1. Decimal finita. Ej: $7/2 = 3.5$
2. Decimal periódica pura. Ej: $7/3 = 2.33333\dots = 2.\widehat{3}$
3. Decimal periódica mixta. Ej: $7/6 = 1.16666\dots = 1.\widehat{16}$

Entonces podemos definir un número racional como límite de una sucesión monótona creciente. Por ejemplo, para el $7/6$,

$$a_0 = 1, a_1 = 1.1, a_2 = 1.16, a_3 = 1.166, a_4 = 1.1666, \dots a_n = 1.\overbrace{1666\dots}^{n \text{ cifras}}$$

1.6. Necesidad de ampliar $\mathbb{Q}$. Los números reales

Como acabamos de ver, el conjunto $\mathbb{Q}$ soluciona distintos problemas, como el cociente de enteros, pero tiene algunas “carencias”. Señalamos tres, que se justificarán a continuación.

1. Existen puntos de la recta que no corresponden a un número racional.
2. Existen subconjuntos de $\mathbb{Q}$ no vacíos, acotados superiormente, que no tienen supremo.
3. Existen sucesiones de Cauchy sin límite en $\mathbb{Q}$.

Antes de empezar, demostraremos que **la raíz cuadrada de 2 no es racional**. Llamamos raíz cuadrada de un número a a otro número b cuyo cuadrado nos da el primero, es decir:

$$\sqrt{a} = b \iff b^2 = a$$

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 4 es ± 2 , luego hay dos racionales cuyo cuadrado es 4. Sin embargo no existe un número racional cuyo cuadrado sea igual a 2, luego $\sqrt{2}$ no es racional.

Demostración. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir que puede escribirse como p/q , $p, q \in \mathbb{N}$, siendo p/q una fracción irreducible. Resulta lo siguiente:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \implies \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \implies p^2 = 2q^2 \implies p^2 \text{ es par}$$

luego p es par (como se prueba más abajo) y puede expresarse como $p = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Sustituyendo resulta:

$$p^2 = 4m^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2m^2$$

luego q^2 es par, por lo que q es par y p/q no es una fracción irreducible, como habíamos supuesto.

Nota. Si el cuadrado p^2 de un número natural es par, p también lo es. De lo contrario sería impar, con lo que su cuadrado también lo sería. En efecto,

$$p = 2n - 1, n \in \mathbb{N} \implies p^2 = 4n^2 - 4n + 1$$

Como $4n^2$ y $4n$ son pares, p^2 sería impar, contra la hipótesis.

Justificación de las “carencias” del conjunto $\mathbb{Q}$. Analizamos las afirmaciones anteriores.

1. Existen puntos de la recta que no corresponden a un número racional.

Por ejemplo, consideramos un triángulo rectángulo con catetos de longitud igual a 1, de modo que uno de ellos está sobre OX . Calculamos la longitud de la hipotenusa:

$$l^2 = 1^2 + 1^2 \implies l = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Por otro lado, abatiendo sobre el cateto horizontal la hipotenusa, su extremo determina un punto en el eje OX . Pero $\sqrt{2}$ no es un número racional como se ha demostrado, lo que significa que existen puntos de la recta que no corresponden a números racionales.

2. Existen subconjuntos de $\mathbb{Q}$ no vacíos, acotados superiormente, que no tienen supremo.

Por ejemplo, consideramos el conjunto A:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 4\} = \{x \in \mathbb{Q} / |x| < 2\} \implies \sup A = 2$$

y vemos que tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Si ahora definimos el conjunto B:

$$B = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} / |x| < \sqrt{2}\} \implies \sup B = \sqrt{2}$$

resulta que su supremo es $\sqrt{2}$, que no es racional, luego B no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

3. Existen sucesiones de Cauchy sin límite en $\mathbb{Q}$.

Sea la sucesión de las raíces cuadradas por defecto de $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$, es decir:

$$a_0 = 1, a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, a_4 = 1.4142, a_5 = 1.41421, \dots$$

En esta sucesión vemos que:

- Cada término tiene una cifra decimal más que el anterior y a_n tiene n cifras.
- La diferencia entre a_n y cualquiera de los siguientes es menor que 10^{-n} y se puede hacer tan pequeña como se quiera tomando n suficientemente alto, luego es de Cauchy.
- Por otro lado $\sqrt{2}$ está comprendido entre cada aproximación por defecto y la correspondiente por exceso:

$$a_n < \sqrt{2} < a_n + \frac{1}{10^n} \implies \sqrt{2} - a_n < \frac{1}{10^n}$$

por lo que la diferencia entre $\sqrt{2}$ y a_n será menor que 10^{-n} . Entonces los términos pueden acercarse a $\sqrt{2}$ tanto como queramos y hemos encontrado una sucesión de Cauchy de límite $\sqrt{2}$, por tanto sin límite en $\mathbb{Q}$.

Un posible modo de definir los números irracionales. Hemos visto, que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional, pero puede aproximarse tanto como se quiera por una sucesión monótona creciente acotada de racionales. Ello sugiere que podríamos definirlo como el límite de esa sucesión. Cualquier otro número no racional (como $e, \pi, \dots$) puede ser también aproximado tanto como se quiera por una sucesión análoga y definido como límite de esa sucesión.

Resulta entonces que una sucesión monótona creciente acotada de racionales puede tener límite racional (el caso de $7/6$ en el apdo. 1.5.4) o no tenerlo ($\sqrt{2}, e, \pi, \sqrt{3}, \dots$). Si asignamos un número irracional (no-racional) como límite a las sucesiones que no lo tienen en $\mathbb{Q}$ y ampliamos $\mathbb{Q}$ con los irracionales, estamos dando lugar al conjunto $\mathbb{R}$ de los reales. Como consecuencia, toda sucesión monótona creciente acotada de racionales tendrá límite en $\mathbb{R}$.

Obviamente lo anterior es sólo una aproximación intuitiva a los números reales. Para una definición rigurosa habría que definirlos, por ejemplo, como límite de sucesiones monótonas crecientes acotadas, agrupar las sucesiones que tienen el mismo límite, definir las operaciones entre dichas agrupaciones y comprobar que se cumplen ciertas propiedades.

Distintos matemáticos han seguido este sistema, justificando el conjunto $\mathbb{R}$ de diversos modos, como Dedekind (método de las cortaduras) o Cantor (método de las sucesiones de Cauchy). Según el método utilizado, la propiedad fundamental que caracteriza al conjunto $\mathbb{R}$ (propiedad de **completitud**) se enuncia de distinta manera. Dos de las más habituales son:

1. En $\mathbb{R}$, todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo.
2. En $\mathbb{R}$, toda sucesión de Cauchy tiene límite.

1.7. Propiedades de $\mathbb{R}$

1.7.1. Cuerpo ordenado

Al igual que $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números reales, dotado de la suma, el producto y la relación de orden $\leq$, es un cuerpo ordenado, pues sus elementos cumplen las propiedades correspondientes.

1.7.2. Racionales e irracionales, densos en $\mathbb{R}$

En el apdo. 1.5.2 dijimos que el orden en $\mathbb{Q}$ es denso, pues entre dos racionales siempre existe otro. En $\mathbb{R}$ ocurre lo mismo, más aún, se demuestra en los documentos de apoyo (6.3) que entre dos reales existe un racional y un irracional. Entonces resulta:

1. Entre dos reales existe un racional. Como el racional es real, aplicando repetidamente la propiedad concluimos que entre dos reales hay infinitos racionales. Esto se expresa también diciendo que **el conjunto de los racionales es denso en $\mathbb{R}$** .
2. Entre dos reales existe un irracional, luego por el razonamiento anterior hay infinitos. Esto se expresa también diciendo que **el conjunto de los irracionales es denso en $\mathbb{R}$** .

1.7.3. $\mathbb{R}$ es completo

Ya se ha enunciado de dos maneras la propiedad de completitud (apdo. 1.6). Una tercera forma de hacerlo, equivalente a las anteriores, es que **existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta**.

1.7.4. $\mathbb{R}$ no es numerable

Como se ha visto en los apartados anteriores, $\mathbb{R}$ habitualmente posee las propiedades de $\mathbb{Q}$ (y alguna más). Pero existe una propiedad de los racionales -la numerabilidad- que se pierde al ampliarlos con los irracionales, debido precisamente a que el cardinal de estos es un infinito de orden superior al de los racionales.

Demostración. Veamos por reducción al absurdo que el subconjunto de los reales formado por el intervalo $(0, 1)$ no es numerable. Para ello, suponemos que lo es. Eso significa que podemos escribir en una lista ordenada todos los números reales comprendidos entre el 0 y el 1, por ejemplo:

1. $0.a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots$
2. $0.a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots$
3. $0.a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots$
4. $0.a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \dots$
5. $0.a_{51} a_{52} a_{53} a_{54} \dots$
- $\vdots$

A partir de esta lista (en la que suponemos que están todos los números entre 0 y 1), vamos a definir otro y probaremos que no está en ella. Definimos $X = 0.x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$, siendo sus cifras:

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{si } a_{nn} \neq 1 \\ 0, & \text{si } a_{nn} = 1 \end{cases}$$

El número X está entre 0 y 1, pero no está en la tabla: no puede estar en el puesto 1, pues su primera cifra es distinta de la primera del primero; no puede estar en el puesto 2, pues su segunda cifra es distinta de la segunda del segundo... no puede estar en el puesto n , pues su n -ésima cifra es distinta de la n -ésima cifra del n -ésimo número de la tabla.

Así pues, hemos definido un número que se distingue de cada uno, al menos en una cifra. Luego no puede estar en la tabla. Luego los números reales del intervalo $(0, 1)$ no son numerables, ni lo es por tanto $\mathbb{R}$.

1.8. Operaciones en $\mathbb{R}$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se definen las siguientes operaciones (las tres primeras coinciden con las ya definidas en los racionales):

a) Suma y diferencia: $\boxed{\alpha \pm \beta \in \mathbb{R}}$

b) Producto y cociente: $\boxed{\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}}$; $\boxed{\alpha/\beta \in \mathbb{R}, \forall \beta \neq 0}$

c) Potencia entera: $\alpha^m, m \in \mathbb{Z}$. Distinguimos tres casos:

- Si $m \in \mathbb{N}$, $\boxed{\alpha^m = \overset{\leftarrow m \text{ factores} \rightarrow}{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}}$

- Si $m \in \mathbb{Z}^- (\alpha \neq 0)$, $\alpha^m = \alpha^{-|m|} = \frac{1}{\alpha^{|m|}}$.

- Si $m = 0 (\alpha \neq 0)$, se define $\boxed{\alpha^0 = 1}$ (lo que es coherente con $\alpha^0 = \alpha^{n-n} = \alpha^n/\alpha^n = 1$).

d) Raíz n -ésima, $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}} = x / x^n = \alpha}$ (con n par, se define sólo para $\alpha \geq 0$).

e) Potencia de exponente racional (fracción irreducible $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$).

- Si $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, $\alpha^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^m}$; $\alpha^{\frac{m}{n}} = x / x^n = \alpha^m$ (si n es par, $\alpha \geq 0$).

- Si $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^- (\alpha \neq 0)$, $\alpha^{\frac{m}{n}} = \alpha^{-|\frac{m}{n}|} = \frac{1}{\alpha^{|\frac{m}{n}|}}$ (si n es par, $\alpha > 0$).

f) Potencia de base un número positivo y exponente irracional $\alpha^\beta, \alpha > 0$: se define como límite de una sucesión.

- Si expresamos β como límite de una sucesión monótona de racionales,

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$$

entonces la sucesión $\{\alpha^{\beta_n}\}$ tiene límite (como veremos en el Tema 3) y α^β se define como:

$$\boxed{\alpha^\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{\beta_n}}$$

- Podemos considerar el caso $\alpha = 0$ con $\beta > 0$, tomando una sucesión de límite β y términos positivos. Entonces los términos 0^{β_n} son nulos $\forall n$, con lo que $\boxed{0^\beta = 0}$.

- En los demás casos ($\alpha = 0$, con $\beta < 0$ y $\alpha < 0, \forall \beta$) no se define la potencia de exponente irracional.

g) Logaritmo. Dados dos números reales $\alpha, \beta > 0, \beta \neq 1$, existe un único $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\beta^\gamma = \alpha$. A este γ se le llama logaritmo en base β de α , $\gamma = \log_\beta \alpha$, es decir:

$$\boxed{\gamma = \log_\beta \alpha \iff \beta^\gamma = \alpha}$$

Los logaritmos más comunes, de base el número e , se llaman naturales o neperianos. También son muy utilizados los decimales, de base 10.

1.9. Ejercicios de autoevaluación

1.9.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. El principio de inducción puede utilizarse para demostrar propiedades de un conjunto infinito, siempre que entre sus elementos esté definida una relación de orden.
2. Decimos de A que es subconjunto propio de B si está contenido estrictamente en B , es decir: $A \subset B$, $A \neq B$. Por tanto, un conjunto nunca puede ser biyectivo con un subconjunto propio suyo.
3. El conjunto de los números enteros es numerable aunque no esté acotado por la derecha ni por la izquierda.
4. Entre racionales, la condición “ser menor que” se expresa: $p/q < r/s \iff ps < qr$.
5. Entre conjuntos, la relación “estar incluido en” es de orden parcial.
6. En un cuerpo ordenado K , la propiedad $a \cdot 0 = 0$, $\forall a \in K$, es evidente y no necesita demostración.
7. El conjunto $\{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\}$ tiene supremo y máximo en $\mathbb{R}$.
8. En un cuerpo conmutativo, el inverso del inverso de cualquier número x es x .
9. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.
10. $\mathbb{Q}$ es denso, por lo que no es numerable.
11. $1.\hat{9} = 1.999999\dots$ es el racional inmediatamente anterior a 2.
12. En $\mathbb{R}$, todo conjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo.
13. No existe la potencia $3/2$ de un número negativo.
14. Cualquier número positivo puede ser base de un sistema de logaritmos.
15. Entre dos números reales distintos hay siempre un racional, pero puede no haber ningún irracional.

1.9.2. Cuestión

Halla los valores de x que son solución de la inecuación $|x| > k \in \mathbb{R}$.

1.9.3. Solución del test verdadero/falso

1. **F**. Es necesario que el conjunto sea numerable.
2. **F**. $\mathbb{N}$ es biyectivo con infinitos subconjuntos propios suyos, por ejemplo los pares, los impares, los múltiplos de cinco...
3. **V**. Es suficiente con tomar en primer lugar el 0, luego el 1, luego -1, 2, -2, y así sucesivamente.
4. **V**. Basta multiplicar ambos miembros de $p/q < r/s$ por el producto qs .

5. **V.** La relación cumple las propiedades Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva. Pero, dados dos conjuntos cualesquiera, no tiene por qué estar uno de ellos contenido en el otro, luego no tienen por qué estar en relación de orden.
6. **F.** El 0 es el neutro de la suma (elemento que, sumado a uno cualquiera, no lo modifica). En principio, desconocemos el resultado de multiplicarlo por cualquier otro número. Se demuestra que dicho producto es 0.
7. **F.** No tiene máximo, pues el supremo ($\sqrt{2}$) no pertenece al conjunto.
8. **F.** En un cuerpo conmutativo, el inverso del inverso de cualquier número $x \neq 0$ es x .
9. **V.** Es convergente (y su límite es 0). Por lo tanto es de Cauchy.
10. **F.** Es denso y también numerable (se demuestra en **1.5.2** y **1.5.3**).
11. **F.** La diferencia entre 1.999999... y 2 puede hacerse tan pequeña como se quiera, sin más que tomar un número suficientemente grande de cifras, por lo que representan el mismo número racional. La fracción generatriz de 1.999999... es $\frac{19-1}{9} = 2$.
12. **V.** Es una de las formas de expresar la completitud de $\mathbb{R}$ (véase **1.6**).
13. **V.** Sea $r < 0$. Se cumple $r^{3/2} = (r^3)^{1/2}$. Como $r^3 < 0$, no existe su raíz cuadrada.
De otro modo: $r^{3/2} = p \iff r^3 = p^2$. Pero $r^3 = r \cdot r \cdot r < 0$ y no puede ser igual a $p^2 \geq 0$.
14. **F.** Cualquier número positivo **y distinto de 1** puede ser base de un sistema de logaritmos.
15. **F.** Entre dos números reales distintos hay siempre un racional (por tanto infinitos) y un irracional (por tanto infinitos). Esto se expresa también diciendo que, tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$ (véase el apdo. **1.7.2**. Racionales e irracionales, densos en $\mathbb{R}$).

1.9.4. Solución de la cuestión

Distinguiamos dos casos, $x \geq 0$ y $x < 0$. Entonces, a partir de la definición de valor absoluto de un número real:

- a) Si $x \geq 0 \implies x = |x| > k \implies x \in (k, \infty)$.
- b) Si $x < 0 \implies -x = |x| > k \implies x < -k \implies x \in (-\infty, -k)$.

Así pues, cumplen la condición los x pertenecientes al conjunto $(-\infty, -k) \cup (k, \infty)$.

Nota. No se ha dicho nada del signo de k . Si $k \geq 0$, el conjunto solución es la unión de dos intervalos disjuntos y se puede escribir también como $\mathbb{R} \setminus [-k, k]$. Este conjunto es el complementario del conjunto solución de la condición $|x| \leq k$.

Si, por el contrario, $k < 0$, los intervalos $(-\infty, -k)$ y (k, ∞) se solapan, por lo que su unión es todo $\mathbb{R}$. Este resultado es lógico pues, si $k < 0$, la condición se cumple para todo x , ya que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0 > k$.

Capítulo 2

Espacios Métricos

2.1. Distancia

2.1.1. Definición

Sea un conjunto E no vacío. Llamamos **distancia** o **métrica** a toda aplicación

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

que, a cada par (x, y) de elementos de E , le hace corresponder un número real $d(x, y) \geq 0$, tal que se cumplen las propiedades siguientes:

1. Positividad: $d(x, y) > 0, \forall x \neq y; \quad d(x, x) = 0$.
2. Simetría: $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in E$.
3. Desigualdad triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in E$.

Llamamos espacio métrico al conjunto E dotado de la distancia d , lo que se denota por (E, d) . Los elementos $x \in E$ se denominan puntos.

2.1.2. Métricas más comunes

Entre las aplicaciones que cumplen las propiedades de distancia, distinguimos las siguientes.

- a) En $\mathbb{R}$ se define la métrica natural -o del valor absoluto- como:

$$d(x, y) = |x - y|$$

- b) Métricas en $\mathbb{R}^n$. Sean los elementos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

- b.1. Distancia “del taxi”.

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$$

- b.2. Distancia euclídea.

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

- b.3. Distancia del supremo.

$$d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \sup |x_i - y_i|_{i=1, \dots, n} = \sup (|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$$

- c) Métrica discreta. En este caso sólo hay dos valores posibles para la distancia entre los elementos de E .

$$d(x, y) = 1 \quad \forall x \neq y; \quad d(x, x) = 0$$

2.2. Bolas y entornos

Definimos a continuación los conceptos de bola y entorno, unas agrupaciones de puntos que nos van a servir para caracterizar los distintos tipos de puntos y conjuntos de un espacio métrico.

2.2.1. Bola abierta

Sean $a \in E$, $r > 0$. Se llama bola abierta de centro a y radio r al conjunto de puntos de E cuya distancia al punto a es menor que r :

$$B(a, r) = \{x \in E / d(a, x) < r\}$$

2.2.2. Bola cerrada

Sean $a \in E$, $r \geq 0$. Se llama bola cerrada de centro a y radio r al conjunto de puntos de E cuya distancia al punto a es menor o igual que r :

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E / d(a, x) \leq r\}$$

Ejemplos. En $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, una bola abierta es un intervalo abierto y una bola cerrada, un intervalo cerrado. En $(\mathbb{R}^2, d_2)$, una bola abierta es un círculo sin la circunferencia y una bola cerrada, un círculo incluida la circunferencia.

Ejercicio. Obtén en $\mathbb{R}^2$ las bolas cerradas de centro el origen y radio $r = 1$, correspondientes a las distancias **a)** d_1 ; **b)** d_∞ . **Sol.** Se trata de las áreas limitadas por los cuadrados de vértices: **a)** $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ y $D(0, -1)$; **b)** $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -1)$ y $D(1, -1)$.

Bola reducida. Llamamos así a la que no contiene a su centro. Su expresión será:

$$B^*(a, r) = \{x \in E / 0 < d(a, x) < r\}$$

2.2.3. Entorno

Definición. Entorno de $a \in E$ es todo conjunto que contiene a una bola abierta de centro a .

$$U_a \text{ entorno de } a \iff \exists r > 0 / B(a, r) \subset U_a$$

La bola $B(a, r)$ contiene al punto a y está contenida en ella misma, luego una bola abierta de centro a es entorno de a .

Propiedades.

1. Si un conjunto V contiene a un entorno de a , V es entorno de a .
2. La intersección de dos entornos de a es entorno de a .
3. Dos puntos distintos tienen entornos disjuntos.

2.3. Puntos notables en un espacio métrico

Sea un espacio métrico (E, d) y un conjunto $A \subset E$. Definimos diversos tipos de puntos según su relación con A . Los ejemplos se refieren a $C = [0, 2) \cup \{3\}$, en el espacio métrico $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.

2.3.1. Punto de adherencia

El punto $x \in E$ es de adherencia de A si y sólo si toda bola abierta de centro x contiene algún punto de A ; es decir, si:

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

Podemos decir que x es de adherencia de A si tiene puntos de A tan cerca como se quiera. Obviamente, los puntos de A son de adherencia de A .

Ejemplo. Son de adherencia de $\mathbb{C}$ -entre otros- los puntos $\{0, 1, 2, 3\}$.

2.3.2. Punto de acumulación

El punto $x \in E$ es de acumulación de A si y sólo si toda bola abierta de centro x contiene algún punto de A , distinto de x . Utilizando la bola reducida, la condición es:

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, B^*(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

Podemos decir que x es de acumulación de A si tiene puntos de A -distintos de él- tan cerca como se quiera. Es inmediato que todo punto de acumulación es de adherencia.

Ejemplo. Son de acumulación de $\mathbb{C}$ -entre otros- los puntos $\{0, 1, 2\}$.

2.3.3. Punto aislado

El punto $x \in E$ es aislado de A si y sólo si pertenece a A y existe una bola abierta de centro x que no contiene ningún otro punto de A ; es decir, si:

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ / B(x, r) \cap A = \{x\}$$

Un punto de adherencia es de acumulación, salvo si existe alguna bola centrada en él que no contiene otro punto de A más que él, en cuyo caso es aislado. Luego todo punto de adherencia, o es de acumulación o es aislado.

Ejemplo. El único punto aislado de $\mathbb{C}$ es el $\{3\}$.

2.3.4. Punto interior

El punto $x \in E$ es interior de A si y sólo si existe una bola abierta de centro x contenida en A ; es decir, si:

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ / B(x, r) \subset A$$

Ejemplo. Son interiores de $\mathbb{C}$ -entre otros- los puntos del intervalo $[1, 2)$.

2.3.5. Punto exterior

El punto $x \in E$ es exterior de A si y sólo si existe una bola abierta de centro x que no contiene ningún punto de A ; es decir, si:

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ / B(x, r) \cap A = \emptyset$$

Ejemplo. Son exteriores de C -entre otros- los puntos $\{4, 5\}$ y los comprendidos entre ellos.

2.3.6. Punto frontera

El punto $x \in E$ es frontera de A si y sólo si toda bola abierta de centro x contiene puntos de A y de su complementario $E \setminus A$ (véase 2.4.3); es decir, si:

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ \begin{cases} B(x, r) \cap A \neq \emptyset \\ B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset \end{cases}$$

Podemos decir que x es frontera de A si tiene puntos de A y de $E \setminus A$ tan cerca como se quiera. Como consecuencia, un punto frontera de A : 1) es de adherencia de A y de adherencia de su complementario; 2) no es ni interior ni exterior.

Ejemplo. Son frontera de C los puntos $\{0, 2, 3\}$.

Ejercicio. Demuestra que un punto exterior de A es interior de $E \setminus A$ y que un punto interior de A es exterior de $E \setminus A$.

2.4. Conjuntos notables en un espacio métrico

2.4.1. Adherencia o conjunto adherente

Definición. La adherencia del conjunto A es el conjunto de sus puntos de adherencia, $\bar{A}$.

Propiedades.

- a) $A \subset \bar{A}$. Por convenio, $\bar{E} = E$, $\bar{\emptyset} = \emptyset$.
- b) $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$.
- c) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- d) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. No se cumple la igualdad, por ejemplo, en el caso de conjuntos sin puntos en común, tales que sus adherencias sí los tienen. Por ejemplo, los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

2.4.2. Conjunto de los puntos aislados

Definición. El conjunto formado por los puntos aislados de A se denota $Aisl(A)$.

2.4.3. Derivado de A

Definición. El conjunto derivado de A es el conjunto de sus puntos de acumulación, A' .

Diferencia de conjuntos. Si los conjuntos A y B son disjuntos y C es su unión,

$$A \cup B = C; \quad A \cap B = \emptyset$$

entonces decimos que A es igual a C menos B y lo escribimos:

$$A = C \setminus B$$

(obviamente B es igual a C menos A). El conjunto A está formado por los elementos de C que no pertenecen a B :

$$A = C \setminus B = \{x \in C / x \notin B\}$$

En esta definición exigimos que A y B sean subconjuntos disjuntos de C , luego, para “restar” B de C , el primero debe estar contenido en el segundo. La diferencia de conjuntos puede definirse de otras maneras; la definición dada aquí será útil para obtener el conjunto derivado.

Aplicación. A partir de esta definición y de lo visto en el apdo. 2.3.3, entre la adherencia, el derivado y el conjunto de puntos aislados de A se da la relación siguiente:

$$A' = \overline{A} \setminus Aisl(A)$$

que permite obtener el conjunto derivado de A por diferencia entre la adherencia y los aislados.

Demostración.

1. Tanto los puntos aislados como los de acumulación son de adherencia, luego la unión de los conjuntos $Aisl(A)$ y A' está contenida en $\overline{A}$.

Por otro lado, todo punto de adherencia o bien es de acumulación o bien aislado, por lo que $\overline{A} \subset Aisl(A) \cup A'$. Entonces los conjuntos $\overline{A}$ y $A' \cup Aisl(A)$ coinciden.

2. A partir de las respectivas definiciones, un punto no puede ser a la vez de acumulación y aislado, por lo que la intersección de A' y $Aisl(A)$ es vacía.

Entonces podemos afirmar que $A' = \overline{A} \setminus Aisl(A)$.

2.4.4. Interior de A

Definición. El interior de A , $\overset{\circ}{A}$, es el conjunto de sus puntos interiores.

Propiedades.

- a) $\overset{\circ}{A} \subset A$. Por convenio, $\overset{\circ}{E} = E$, $\overset{\circ}{\phi} = \phi$.
- b) $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
- c) $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
- d) $(A \cup B)^\circ \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. No se cumple la igualdad, por ejemplo, en el caso de conjuntos con puntos en común, tales que sus interiores no los tienen. Ejemplo: $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$.

2.4.5. Exterior de A

Definición. El exterior de A , $Ext(A)$, es el conjunto de sus puntos exteriores.

Obtención. En el ejercicio del apdo. 2.3 se indica que un punto exterior de un conjunto es interior de su complementario y que un punto interior de un conjunto es exterior de su complementario. Entonces:

- Si x es exterior de A , es interior de $E \setminus A$.
- Si x es interior de $E \setminus A$ es exterior del complementario de $E \setminus A$, es decir de A .

Es decir, x es exterior de A si y sólo si es interior de $E \setminus A$, por lo que el conjunto exterior de A puede obtenerse como el interior del complementario de A .

$$\boxed{Ext(A) = (E \setminus A)^\circ}$$

Resulta más sencillo obtener el conjunto exterior de A utilizando la expresión:

$$\boxed{Ext(A) = E \setminus \overline{A}}$$

Demostración. Para realizarla, veamos que se cumple la inclusión en ambos sentidos.

($\rightarrow$) Si x es un punto exterior de A , existe una bola centrada en x que no contiene puntos de A , por lo que x no es de adherencia de A , luego pertenece al complementario de $\overline{A}$.

$$\forall x \in Ext(A) \exists r / B(x, r) \cap A = \emptyset \implies x \notin \overline{A} \implies x \in E \setminus \overline{A} \implies Ext(A) \subset E \setminus \overline{A}$$

($\leftarrow$) Si x pertenece al complementario de $\overline{A}$, no es de adherencia de A , luego existe alguna bola centrada en x que no contiene puntos de A , por lo que x es exterior de A .

$$\forall x \in E \setminus \overline{A} \implies x \notin \overline{A} \implies \exists r / B(x, r) \cap A = \emptyset \implies x \in Ext(A) \implies E \setminus \overline{A} \subset Ext(A)$$

2.4.6. Frontera de A

Definición. La frontera de A , $Fr(A)$, es el conjunto de sus puntos frontera.

Obtención. Sabemos (2.3.6) que un punto es frontera si y sólo si es de adherencia de A y de $E \setminus A$, luego podemos obtener la frontera de A como intersección de ambas adherencias:

$$\boxed{Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}}$$

Resulta más sencillo obtener el conjunto frontera por medio de la siguiente expresión:

$$\boxed{Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}}$$

Demostración. Se cumple la doble inclusión.

($\rightarrow$) Sea $x \in Fr(A)$. Entonces $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{E \setminus A}$. Por pertenecer x a $\overline{E \setminus A}$, toda bola abierta centrada en x contiene puntos de $E \setminus A$ luego ninguna está contenida en A ; es decir, $x \notin \overset{\circ}{A}$. Como $x \in \overline{A}$ y $x \notin \overset{\circ}{A}$ y además $\overset{\circ}{A} \subset \overline{A}$, resulta que $x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

($\leftarrow$) Sea $x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, luego $x \in \overline{A}$ y $x \notin \overset{\circ}{A}$. Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, ninguna bola abierta centrada en x está contenida en A , por lo que toda bola contiene puntos del complementario de A . Entonces x pertenece a la adherencia de $E \setminus A$. Como también pertenece a la adherencia de A , pertenece a la intersección de ambas, luego pertenece a la frontera.

Ejemplo. Como en el apartado 2.3, calculamos los conjuntos notables referidos al conjunto $C = [0, 2] \cup \{3\}$ en el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$.

1. Adherencia: $\overline{C} = [0, 2] \cup \{3\}$.
2. Conjunto de puntos aislados: $Aisl(C) = \{3\}$.
3. Derivado: $C' = \overline{C} \setminus Aisl(C) = [0, 2]$.
4. Interior: $\overset{\circ}{C} = (0, 2)$.
5. Exterior: $Ext(C) = \mathbb{R} \setminus \overline{C} = (-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$
6. Frontera: $Fr(C) = \overline{C} \setminus \overset{\circ}{C} = \{0, 2, 3\}$

2.5. Conjuntos cerrado, abierto, compacto

Sea el espacio métrico E y el conjunto $A \subset E$. Vamos a estudiar las condiciones que deben cumplirse para afirmar que dicho conjunto es cerrado, abierto o compacto.

2.5.1. Cerrado

Definición. Un conjunto A es cerrado si y sólo si coincide con su adherencia: $A = \overline{A}$

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, el intervalo $[a, b]$ es un conjunto cerrado.

Condiciones equivalentes. Otras condiciones de conjunto cerrado son: “contener a su derivado” y “contener a su frontera”. Demostramos la primera de ellas: un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a sus puntos de acumulación.

$$A = \overline{A} \iff A' \subset A$$

($\rightarrow$) Los puntos de acumulación son de adherencia, luego $A' \subset \overline{A}$. Al ser A cerrado, $\overline{A}$ coincide con A . Entonces $A' \subset A$.

$$A' \subset \overline{A} = A \implies A' \subset A$$

($\leftarrow$) La adherencia $\overline{A}$ es la unión de A' y $Aisl(A)$. Como ambos están contenidos en A , su unión también lo está, por lo que $\overline{A} \subset A$. Como además $A \subset \overline{A}$, se cumple $\overline{A} = A$.

$$A', Aisl(A) \subset A \implies \overline{A} = A' \cup Aisl(A) \subset A \xrightarrow{A \subset \overline{A}} \overline{A} = A$$

Propiedades.

1. $\overline{A}$ es un cerrado, luego la adherencia de $\overline{A}$ es igual a $\overline{A}$: $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
2. E y $\emptyset$ son cerrados, pues coinciden con su adherencia (por convenio).
3. La intersección de cerrados es un cerrado.
4. La unión finita de cerrados es un cerrado (la infinita puede no serlo).

2.5.2. Abierto

Definición. Un conjunto A es abierto si y sólo si coincide con su interior: $A = \overset{\circ}{A}$

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, el intervalo (a, b) es un conjunto abierto.

Condición equivalente. A es abierto si y sólo si tiene intersección vacía con su frontera (ninguno de sus puntos es frontera).

$$A = \overset{\circ}{A} \iff Fr(A) \cap A = \emptyset$$

Demostración.

($\rightarrow$) $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ (apdo. 2.4.6), por lo que la intersección de $\overset{\circ}{A}$ y $Fr(A)$ es vacía. Por ser A abierto, coincide con su interior, entonces la intersección de A y su frontera es vacía.

($\leftarrow$) Si la intersección de A y $Fr(A)$ es vacía, ningún punto de A pertenecerá a su frontera. Como A y su frontera están contenidos en $\overline{A}$, entonces todo punto de A pertenecerá a $\overline{A} \setminus Fr(A) = \overset{\circ}{A}$, por lo que $A \subset \overset{\circ}{A}$. Como además $\overset{\circ}{A} \subset A$, resulta $A = \overset{\circ}{A}$.

Propiedades.

1. $\mathring{A}$ es un abierto, luego el interior de $\mathring{A}$ es igual a $\mathring{A}$: $(\mathring{A})^\circ = \mathring{A}$.
2. E y ϕ son abiertos, pues coinciden con su interior (por convenio).
3. La unión de abiertos es un abierto.
4. La intersección finita de abiertos es un abierto (la infinita puede no serlo).

Ejercicio. Hemos visto que la unión de infinitos cerrados puede no ser cerrado y la intersección de infinitos abiertos puede no ser abierto. Estudia lo que ocurre en los dos siguientes casos:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{n-1}{n} \right] \quad ; \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$$

2.5.3. Relación entre abierto y cerrado

Teorema. *Un conjunto es abierto si y sólo si su complementario es cerrado.*

$$\boxed{A = \mathring{A} \iff E \setminus A = \overline{E \setminus A}}$$

Demostración.

($\rightarrow$) Sea $A = \mathring{A}$. Queremos demostrar que $E \setminus A = \overline{E \setminus A}$. Como se cumple $E \setminus A \subset \overline{E \setminus A}$, basta con demostrar que $\overline{E \setminus A} \subset E \setminus A$.

Sea $x \in \overline{E \setminus A}$. Entonces toda bola abierta centrada en x contiene puntos de $E \setminus A$, luego ninguna está contenida en A , por lo que x no pertenece al conjunto $\mathring{A}$. Como $A = \mathring{A}$, x no pertenece a A , luego pertenece a su complementario $E \setminus A$. Por lo tanto $\overline{E \setminus A} \subset E \setminus A$.

($\leftarrow$) Sea $E \setminus A = \overline{E \setminus A}$. Queremos demostrar que $A = \mathring{A}$. Como se cumple $\mathring{A} \subset A$, basta con demostrar que $A \subset \mathring{A}$.

Sea $x \in A$. Entonces $x \notin E \setminus A$. Como $E \setminus A = \overline{E \setminus A}$, x no pertenece a $\overline{E \setminus A}$. Entonces existe alguna bola abierta centrada en x que no contiene puntos de $E \setminus A$, por lo que está contenida en A , luego $x \in \mathring{A}$. Por lo tanto $A \subset \mathring{A}$.

2.5.4. Compacto

Definición. Tanto en $(\mathbb{R}, ||)$ como en $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclídea, un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

En el caso de $\mathbb{R}^n$, un conjunto es acotado si y sólo si está contenido en una bola de radio finito.

Ejemplo 1. En $(\mathbb{R}, ||)$, son compactos el intervalo $[a, b]$ o una unión finita de intervalos cerrados. No son compactos los intervalos (a, b) o $[a, \infty)$.

Ejemplo 2. En $(\mathbb{R}^2, d_2)$, el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$ es compacto.

2.6. El espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$

Estudiamos ahora un espacio métrico particular: el conjunto de los números reales, dotado de la métrica del valor absoluto. En primer lugar comprobaremos que las distintas distancias estudiadas (salvo la discreta) coinciden. A continuación definiremos los conjuntos abiertos y cerrados y enunciaremos el teorema de Bolzano-Weierstrass.

2.6.1. Distancia

Es inmediato comprobar que las distancias d_1, d_2 y d_∞ se reducen a la del valor absoluto (métrica natural). En efecto, al tener los puntos x e y sólo una coordenada, resulta:

- a) $d_1(x, y) = |x - y|$.
- b) $d_2(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$.
- c) $d_\infty(x, y) = |x - y|$.

Bolas. Para escribir el intervalo (a, b) en forma de bola, obtenemos su centro y su radio:

$$c = \frac{a + b}{2}, \quad r = \frac{b - a}{2} \implies (a, b) = B(c, r)$$

Ejercicio. Escribe la bola $B(x, \delta)$ en forma de intervalo.

2.6.2. Abiertos y cerrados

A partir de la definición de abierto y de la relación entre abierto y cerrado (2.5.3), tenemos:

1. En $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ un abierto es todo conjunto que puede expresarse como unión de intervalos abiertos. Lo justificamos a continuación:

($\rightarrow$) A es abierto si y sólo si coincide con su interior, luego todos sus puntos son interiores. Que $x \in A$ sea interior significa que es el centro de una bola abierta contenida en A, por lo que A puede expresarse como la unión de todas esas bolas (cada una contiene a uno de los puntos de A y está contenida en A). Pero, en $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, una bola abierta es un intervalo abierto, luego si A es abierto, puede expresarse como unión de intervalos abiertos.

($\leftarrow$) Si A puede expresarse como unión de intervalos abiertos, será abierto, pues un intervalo abierto es un abierto y la unión de abiertos también lo es.

2. Definimos cerrado como el complementario de un abierto.

Ejemplos. a) $(a, b) \cup (c, d)$ es un abierto. b) El intervalo $[p, q]$ es un cerrado, pues su complementario es $\mathbb{R} \setminus [p, q] = (-\infty, p) \cup (q, \infty)$, que es una unión de abiertos.

Ejercicio. Razona si es cerrado el conjunto $\{c\}$, formado por un punto.

2.6.3. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Todo subconjunto acotado $S \subset \mathbb{R}$, con infinitos puntos, tiene algún punto de acumulación.

Demostración. Al ser S acotado podemos encontrar unos valores $a, b \in \mathbb{R} / S \subset [a, b]$. Dividimos $[a, b]$ en dos partes iguales y tomamos una que contenga infinitos puntos (al menos una los tiene, pues de lo contrario S sería finito).

Dividimos el semiintervalo elegido en dos partes iguales, tomando de nuevo una que contenga infinitos puntos. Repitiendo la operación, obtenemos -tras n divisiones- el intervalo I_n de longitud

$$l_n = \frac{b - a}{2^n}$$

que tiende a 0, cuando $n \rightarrow \infty$. Pero I_n sigue conteniendo infinitos puntos.

De este modo, acabamos definiendo un punto α , tal que existen infinitos puntos de S en todo entorno suyo, por lo que cumple la condición de punto de acumulación de S. Este punto puede no pertenecer a S, en cuyo caso pertenecerá a su frontera.

Ejemplos. Sean los conjuntos **a)** $S_1 = \left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$; **b)** $S_2 = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$; **c)** $S_3 = (a, b)$.

En **a)**, el punto de acumulación es $\alpha_1 = 1$, que pertenece a S_1 . En **b)**, es $\alpha_2 = 0$, que no pertenece a S_2 . En **c)**, cualquier punto del intervalo $[a, b]$ es de acumulación de S_3 .

Ejercicios.

- Aplica el teorema a $S = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.
- Razona si se puede aplicar a un subconjunto propio de $\mathbb{N}$.
- Justifica que, si el punto de acumulación α no pertenece a S , pertenece a su frontera.

2.7. Ejercicios de autoevaluación

2.7.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

- $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$ se cumple: $d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_1(\bar{x}, \bar{y})$ (d_1 , “distancia del taxi”).
- En $\mathbb{R}^2$ una bola cerrada es un círculo, independientemente de la métrica empleada.
- Un punto frontera no es interior ni exterior.
- $\mathring{A} \subset \mathring{B} \implies A \subset B$.
- $Ext(A) = E \setminus \bar{A}$.
- $A = \bar{A} \iff A' \subset A \iff Fr(A) \subset A$.
- En $(\mathbb{R}, ||)$ todo cerrado es un intervalo cerrado.
- El intervalo $[2, 3]$ es entorno de todos sus puntos.
- Si un conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}$ no posee ningún punto de acumulación, entonces tendrá sólo un número finito de puntos.
- Entre los elementos de $\mathbb{R}^2$ no hay relación de orden, por lo que en $\mathbb{R}^2$ no existen conjuntos acotados.
- Dado el conjunto $A = \left\{ \frac{3n^2}{3n^2 - 1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, obtén:
 - $\bar{A}$:
 - A' :
 - $\mathring{A}$:
 - $Fr(A)$:
 - $Aisl(A)$:

2.7.2. Cuestión

Define punto interior y expresa matemáticamente la condición que debe cumplir. Razona si un punto interior puede ser frontera.

2.7.3. Solución del test verdadero/falso

1. **V.** $d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = d_1(\bar{x}, \bar{y})$.
2. **F.** Una bola cerrada en $\mathbb{R}^2$ puede tomar formas distintas con las distintas distancias: es un rombo con la d_1 y un cuadrado con la d_∞ .
3. **V.** En toda bola centrada en el punto frontera hay puntos del conjunto y del complementario, por lo que ninguna bola está contenida en el conjunto (condición de interior) ni en el complementario (condición de exterior).
4. **F.** Ejemplo: $A = [0, 1]$, $B = (0, 1)$. Con la implicación en sentido contrario, la afirmación es cierta: es una de las propiedades de los conjuntos interiores.
5. **V.** Véase el apdo. **2.4.5**.
6. **V.** Son tres definiciones equivalentes de conjunto cerrado (véase **2.5.1**).
7. **F.** Todo intervalo cerrado es un cerrado, pero no viceversa. La unión de dos intervalos cerrados disjuntos es un cerrado y sin embargo no es un intervalo.
8. **F.** Para los puntos frontera (el 2 y el 3) no existe ninguna bola centrada en ellos y contenida en el intervalo. De hecho, ser entorno de todos sus puntos es una definición alternativa de conjunto abierto y el intervalo $[2, 3]$ es un cerrado, por lo que no la cumple.
9. **V.** Pues, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, “todo subconjunto acotado $S \subset \mathbb{R}$, con infinitos puntos, tiene algún punto de acumulación”. Luego, si S no posee puntos de acumulación, o bien no está acotado o no tiene infinitos puntos. Como está acotado por hipótesis, entonces debe tener un número finito de puntos.
10. **F.** Decimos que un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ está acotado si está contenido en una bola de radio finito. Esta condición no exige una relación de orden entre los elementos de $\mathbb{R}^n$.
11. $A = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{12}{11}, \frac{27}{26}, \frac{48}{47}, \frac{75}{74} \dots \right\}$. La sucesión tiene límite 1. Entonces:
 - a) $\bar{A} = A \cup \{1\}$.
 - b) $A' = \{1\}$.
 - c) $\mathring{A} = \emptyset$.
 - d) $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A}$.
 - e) $Aisl(A) = A$.

2.7.4. Solución de la cuestión

En un espacio métrico (E, d) , un punto $x \in E$ es un punto interior de $A \subset E$ si y sólo si existe una bola abierta de centro x , contenida en A . Es decir:

$$x \text{ es interior de } A \iff \exists r \in \mathbb{R}^+ / B(x, r) \subset A$$

La condición que debe cumplir un punto de E para ser frontera de A es que en toda bola abierta centrada en él existan puntos de A y de su complementario. Entonces, si un punto es frontera de A , en ninguna bola habrá sólo puntos de A , por lo que un punto interior no puede ser frontera.

Capítulo 3

Sucesiones en $\mathbb{R}$

3.1. Definición y tipos de sucesiones

3.1.1. Sucesión numérica

Una sucesión de números reales es la imagen de una aplicación φ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. A cada número natural n le corresponde el término a_n de la sucesión.

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(n) = a_n \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\mathbb{N}) = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

3.1.2. Concepto de límite

El límite de una sucesión $\{a_n\}$ es un número a al que los términos de la sucesión se aproximan tanto como queramos, a partir de uno dado. Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} / |a_m - a| < \varepsilon, \forall m \geq n$$

Interpretación gráfica. La sucesión tiene límite a si, elegido un ε , los términos de $\{a_n\}$, a partir de uno dado, están contenidos en el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

3.1.3. Tipos de sucesiones

a) En relación con la existencia de límite, una sucesión puede converger, diverger u oscilar.

- **Sucesión convergente.** Es la que tiene límite finito.

$$\{a_n\} \text{ es convergente} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

- **Sucesión divergente.** Es aquella cuyos términos en valor absoluto se hacen tan grandes como queramos, a partir de uno dado.

$$\{a_n\} \text{ es divergente} \iff \forall A > 0 \exists n \in \mathbb{N} / |a_m| > A, \forall m \geq n$$

condición que podemos escribir también como $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$.

Si, además, a partir de uno dado los términos son positivos, decimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

(si son negativos, decimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$)

- **Sucesión oscilante.** Es la que no converge ni diverge.

b) En relación con la acotación de sus términos, una sucesión puede ser:

- Acotada superiormente $\iff \exists k \in \mathbb{R} / a_n \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Acotada inferiormente $\iff \exists k \in \mathbb{R} / a_n \geq k, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Una sucesión es acotada si lo es superior e inferiormente.

Ejercicio 1. Determina si las siguientes sucesiones son convergentes, divergentes u oscilantes, indicando además si están acotadas.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} ; \{2^n\} ; \left\{ 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots \right\} ; \left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\} ; \{1, \sqrt{2}, 3, \sqrt{4}, \dots\} ; \{1, -2, 3, -4, \dots\}$$

Ejercicio 2. Encuentra un ejemplo de sucesión:

a) Oscilante acotada; b) Oscilante no acotada; c) Acotada no convergente; d) Acotada no oscilante; e) No acotada ni divergente.

3.2. Propiedades de los límites

1) Si una sucesión tiene límite, éste es único.

D: Por reducción al absurdo. Supongamos que existan dos límites, $\alpha < \beta$.

Tomamos $\varepsilon > 0 / 2\varepsilon < \beta - \alpha$. Al ser límites ambos, existirán n_α, n_β tales que

$$|a_m - \alpha| < \varepsilon, \forall m \geq n_\alpha \text{ y } |a_m - \beta| < \varepsilon, \forall m \geq n_\beta$$

Entonces, se cumplirá, $\forall m \geq \max(n_\alpha, n_\beta)$,

$$\beta - \alpha = |\beta - \alpha| = |\beta - a_m + a_m - \alpha| \leq |a_m - \alpha| + |a_m - \beta| < 2\varepsilon$$

Es decir, $\beta - \alpha < 2\varepsilon$, contra la hipótesis.

2) Si una sucesión tiene límite $a > c$, sus términos a partir de uno dado son mayores que c .

$$\boxed{\{a_n\} \rightarrow a > c \implies \exists n \in \mathbb{N} / a_m > c, \forall m \geq n}$$

D: Tomamos $\varepsilon > 0 / \varepsilon < a - c \implies c < a - \varepsilon$. Por ser a el límite,

$$\exists n / \forall m \geq n, |a_m - a| < \varepsilon \implies -\varepsilon < a_m - a < \varepsilon \implies a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$$

Es decir, $a_m > a - \varepsilon > c$.

3) Si una sucesión tiene límite $a < c$, sus términos a partir de uno dado son menores que c .

$$\boxed{\{a_n\} \rightarrow a < c \implies \exists n \in \mathbb{N} / a_m < c, \forall m \geq n}$$

D: Análoga a la anterior, tomando $\varepsilon > 0 / \varepsilon < c - a$.

4) Si una sucesión tiene límite $a \neq 0$, sus términos a partir de uno dado tienen el signo de a .

D: Si $a > 0$, por la propiedad 2: $\exists n / a_m > 0, \forall m \geq n$.

Si $a < 0$, por la propiedad 3: $\exists n / a_m < 0, \forall m \geq n$.

Es decir, si $a \neq 0$, los términos, a partir de uno dado, tienen el signo de a .

- 5) Si el límite de $\{a_n\}$ es menor que el de $\{b_n\}$, los términos de la primera son menores que los de la segunda, a partir de uno dado.

$$\boxed{\{a_n\} \rightarrow a, \{b_n\} \rightarrow b, a < b \implies \exists n \in \mathbb{N} / a_m < b_m, \forall m \geq n}$$

D: Se toma $c = (a + b)/2$, con lo que $a < c < b$, y se aplican las propiedades 2 y 3.

- 6) Si se cumple $a_n < b_n < c_n, \forall n \geq n_0$ y las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ tienen límite α , entonces la sucesión $\{b_n\}$ tiene límite α .

$$\text{D: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \implies \exists n_1 / |a_m - \alpha| < \varepsilon \implies \boxed{\alpha - \varepsilon < a_m} < \alpha + \varepsilon, \forall m \geq n_1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha \implies \exists n_2 / |c_m - \alpha| < \varepsilon \implies \alpha - \varepsilon < \boxed{c_m < \alpha + \varepsilon}, \forall m \geq n_2.$$

Como, además, $\boxed{a_n < b_n < c_n}, \forall n \geq n_0$, entonces, $\forall m \geq \max(n_0, n_1, n_2)$,

$$\alpha - \varepsilon < a_m < b_m < c_m < \alpha + \varepsilon \implies \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha}$$

- 7) Se obtiene una **subsucesión** de $\{a_n\}$ tomando infinitos términos suyos, sin alterar el orden relativo entre ellos. Si los lugares que ocupan dichos elementos en $\{a_n\}$ son $n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$, la subsucesión será: $\{a_{n_i}\} = a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_i}, \dots$. Por ejemplo, los pares o los múltiplos de 3 son subsucesiones de los naturales.

Propiedad. Si $\{a_n\}$ tiene límite, toda subsucesión suya tiene el mismo límite.

D: Si a es el límite, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists n / |a_m - a| < \varepsilon, \forall m \geq n$. En ese caso, también $|a_{m_i} - a| < \varepsilon, \forall m_i \geq n$, pues los términos $\{a_{n_i}\}$ están contenidos entre los $\{a_n\}$.

- 8) Toda sucesión convergente es acotada.

D: Por ser convergente, $\forall \varepsilon > 0 \exists n / |a_m - a| < \varepsilon, \forall m \geq n$. Entonces, por las propiedades del valor absoluto,

$$|a_m| - |a| \leq |a_m - a| < \varepsilon \implies |a_m| < |a| + \varepsilon, \forall m \geq n$$

Así pues, la cota es $k = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n-1}|, |a| + \varepsilon)$.

3.3. Sucesiones monótonas

3.3.1. Definiciones

Con respecto a la relación entre el valor de sus términos una sucesión numérica $\{a_n\}$ es:

- Monótona creciente, si y sólo si $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$.
- Monótona decreciente, si y sólo si $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$.
- Estrictamente creciente, si y sólo si $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$.
- Estrictamente decreciente, si y sólo si $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio. Indica el tipo de monotonía de las siguientes sucesiones:

- a) $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, \dots$; b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$; c) $1, 1, 1, 1, \dots$; d) $-1, 0, 1, -2, 0, 2, -3, 0, 3, \dots$

3.3.2. Teorema de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona creciente (decreciente) acotada superiormente (inferiormente) tiene límite.

Demostración. Lo demostramos para el caso creciente (partimos de la **propiedad del supremo**, estudiada en el tema 1).

- a) La sucesión $\{a_n\}$ es un conjunto de números reales acotado superiormente, por lo que tiene supremo α . Veamos que, al ser α la menor de las cotas superiores, cualquier valor menor que α debe ser superado por algún término de $\{a_n\}$, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 / \boxed{\alpha - \varepsilon < a_{n_0}}$$

pues, de lo contrario, existiría algún ε tal que $\alpha - \varepsilon \geq a_{n_0}$, $\forall n_0$, en cuyo caso el supremo sería $\alpha - \varepsilon$, contra la hipótesis.

- b) Al ser $\{a_n\}$ monótona creciente, $\boxed{a_{n_0} \leq a_m}$, $\forall m \geq n_0$. Y por ser α el supremo, $\boxed{a_m \leq \alpha}$.

- c) Entonces, a partir de a) y b),

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 / \alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_m \leq \alpha \implies \alpha - \varepsilon < a_m \leq \alpha, \forall m \geq n_0$$

Pero $\alpha - \varepsilon < a_m \implies \alpha - a_m < \varepsilon$ y $a_m \leq \alpha \implies 0 \leq \alpha - a_m$. Es decir

$$0 \leq \alpha - a_m < \varepsilon \implies \boxed{|\alpha - a_m| < \varepsilon, \forall m \geq n_0}$$

que es la condición de límite para $\{a_n\}$. Es decir, el límite de la sucesión es el supremo α .

3.3.3. Sucesiones de intervalos encajados

Una sucesión de intervalos encajados es una sucesión de intervalos reales, tales que cada uno está incluido en el anterior, $I_n \subset I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si los intervalos son cerrados y no vacíos, es decir:

$$I_n = [a_n, b_n], \quad a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces su intersección es el intervalo $[a, b]$, $a \leq b$, siendo

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Si además las amplitudes de los intervalos tienden a cero, es decir $(b_n - a_n) \rightarrow 0$, entonces existe un único número real α común a todos los intervalos y se cumple:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \in \mathbb{R}}$$

Demostración breve. (Demostración completa en J. Burgos, p. 64). Sean las sucesiones $\{a_n\}$ (monótona creciente) y $\{b_n\}$ (monótona decreciente), tales que $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

por lo que

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a_{n-2}, b_{n-2}] \dots$$

luego $\{[a_n, b_n]\}$ es una sucesión de intervalos encajados. La sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente por cualquier b_i y $\{b_n\}$ lo está inferiormente por cualquier a_i , luego ambas sucesiones son monótonas acotadas, por lo que tienen límite, que llamaremos respectivamente a y b . Si $(b_n - a_n) \rightarrow 0$, estos límites coinciden pues, como veremos en [3.4.1](#),

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

3.4. Operaciones con límites

3.4.1. Suma y diferencia

- a) Si dos sucesiones tienen límite **finito**, el límite de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los límites.

$$\boxed{\{a_n\} \rightarrow a, \{b_n\} \rightarrow b \implies \{a_n \pm b_n\} \rightarrow a \pm b}$$

D: Lo demostramos para la suma. Por ser a y b límites, se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists n_a \in \mathbb{N} / |a_m - a| < \varepsilon/2, \forall m \geq n_a \\ \exists n_b \in \mathbb{N} / |b_m - b| < \varepsilon/2, \forall m \geq n_b \end{cases}$$

Entonces, $\forall m \geq \max(n_a, n_b)$, se cumplirán ambas condiciones, por lo que

$$|a_m + b_m - (a + b)| = |(a_m - a) + (b_m - b)| \leq |a_m - a| + |b_m - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

- b) Si $\{a_n\}$ es divergente y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\{a_n \pm b_n\}$ es divergente.
c) Si $\{a_n\} \rightarrow \pm\infty$ y $\{b_n\} \rightarrow \pm\infty$, entonces $\{a_n + b_n\} \rightarrow \pm\infty$.
d) Si $\{a_n\} \rightarrow \pm\infty$ y $\{b_n\} \rightarrow \mp\infty$, entonces $\{a_n - b_n\} \rightarrow \pm\infty$.
e) Si $\{a_n\} \rightarrow \pm\infty$ y $\{b_n\} \rightarrow \pm\infty$, entonces $\{a_n - b_n\}$ es un **caso dudoso**.

3.4.2. Producto

- a) Si dos sucesiones tienen límite **finito**, el límite del producto es el producto de los límites.

$$\boxed{\{a_n\} \rightarrow a, \{b_n\} \rightarrow b \implies \{a_n b_n\} \rightarrow a b}$$

D: Hemos de demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} / |a_m b_m - ab| < \varepsilon, \forall m \geq n \quad (3.1)$$

Al ser $\{a_n\}$ convergente, está acotada: $|a_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$. Estudiamos dos opciones:

a.1) Sea $b \neq 0$. Se cumple $|a_m b_m - ab| = |a_m b_m - a_m b + a_m b - ab| =$

$$|(a_m b_m - a_m b) + (a_m b - ab)| \leq |a_m| |b_m - b| + |b| |a_m - a| \leq K |b_m - b| + |b| |a_m - a|.$$

Por ser ambas convergentes,
$$\begin{cases} \forall \frac{\varepsilon}{2|b|} > 0 \exists n_a / |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}, \forall m \geq n_a \\ \forall \frac{\varepsilon}{2K} > 0 \exists n_b / |b_m - b| < \frac{\varepsilon}{2K}, \forall m \geq n_b \end{cases}$$

Entonces, $\forall m \geq \max(n_a, n_b)$, $|a_m b_m - ab| < K \frac{\varepsilon}{2K} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

a.2) Si $b = 0$, $\forall \frac{\varepsilon}{K} > 0 \exists n / |b_m - 0| < \frac{\varepsilon}{K}, \forall m \geq n$ y, sustituyendo en (3.1), resulta:

$$\forall m \geq n, |a_m b_m - ab| = |a_m b_m - 0| \leq |a_m| |b_m| \leq K |b_m| < K \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

- b) Si $\{a_n\} \rightarrow 0$ y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\{a_n b_n\} \rightarrow 0$.
c) Si $\{a_n\} \rightarrow \pm\infty$ y $b_n \geq k > 0 \forall n_0 \geq 0$, entonces $\{a_n b_n\} \rightarrow \pm\infty$.
d) Si $\{a_n\} \rightarrow \pm\infty$ y $\{b_n\} \rightarrow 0$, entonces $\{a_n b_n\}$ es un **caso dudoso**.

3.4.3. Inverso

a) Si una sucesión tiene límite **finito y no nulo**, el límite del inverso es el inverso del límite.

$$\boxed{\{a_n\} \rightarrow a \neq 0 \implies \left\{\frac{1}{a_n}\right\} \rightarrow \frac{1}{a}}$$

D: Hemos de demostrar que $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} / \left| \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon, \forall m \geq n$.

Operamos: $\left| \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - a_m|}{|a_m| |a|} = \frac{1}{|a|} \frac{1}{|a_m|} |a - a_m|$. En esta expresión:

1. $\frac{1}{|a_m|}$ está acotado. En efecto, si $\{a_n\} \rightarrow a$, entonces $\{|a_n|\} \rightarrow |a|$ (visto en prácticas).

Como $\left| \frac{a}{2} \right| < |a|$ entonces $\exists n_1 / |a_m| > \left| \frac{a}{2} \right| \implies \frac{1}{|a_m|} < \frac{2}{|a|}, \forall m \geq n_1$.

2. El término $|a - a_m|$ puede hacerse tan pequeño como queramos, pues $\{a_n\} \rightarrow a$.

Luego $\forall \varepsilon > 0 \exists n_2 / |a - a_m| < \frac{1}{2} \varepsilon |a|^2, \forall m \geq n_2$.

Entonces $\forall m \geq \max(n_1, n_2), \left| \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{|a|} \frac{1}{|a_m|} |a - a_m| < \frac{1}{|a|} \frac{2}{|a|} \frac{1}{2} \varepsilon |a|^2 = \varepsilon$.

b) Si $\{a_n\}$ es divergente, entonces $\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \rightarrow 0$. Y si $\{a_n\} \rightarrow 0$, entonces $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ es divergente.

3.4.4. Cociente

a) Si dos sucesiones tienen límite **finito**, el límite del cociente es el cociente de los límites **si el denominador no tiende a 0**.

$$\boxed{\{a_n\} \rightarrow a, \{b_n\} \rightarrow b \neq 0 \implies \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \rightarrow \left\{\frac{a}{b}\right\}}$$

D: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{1}{b_n} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = a \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

b) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienden ambas a 0 o a $\pm\infty$, entonces $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ es un **caso dudoso**.

3.4.5. Logaritmo

Si $\{a_n\}$ tiene límite **finito y positivo**, el límite del logaritmo de $\{a_n\}$ es el logaritmo del límite.

$$\boxed{\{a_n\} \rightarrow a > 0 \implies \{\log_b a_n\} \rightarrow \log_b a \quad (b > 0, b \neq 1)}$$

3.4.6. Exponencial

Si $\{a_n\} \rightarrow a$ y $b > 0$, el límite de la exponencial de a_n es la exponencial del límite.

$$\boxed{\{a_n\} \rightarrow a, b > 0 \implies \{b^{a_n}\} \rightarrow b^a}$$

3.4.7. Potencial-exponencial

Si $\{a_n\} \rightarrow a > 0$ y $\{b_n\} \rightarrow b$, entonces el límite de $\{a_n^{b_n}\}$ es a^b .

$$\boxed{\{a_n\} \rightarrow a > 0, \{b_n\} \rightarrow b \implies \{a_n^{b_n}\} \rightarrow a^b}$$

$$\text{D: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln a_n^{b_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n \ln a_n} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \ln a_n} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n} = e^{b \ln a} = a^b.$$

Nota. En la demostración anterior, si $a > 0$ los términos de $\{a_n\}$ son mayores que cero a partir de uno dado (propiedad 4 de los límites), por lo que será también mayor que cero la expresión $a_n^{b_n}$ y podemos calcular su logaritmo.

3.4.8. Tipos de indeterminación

Los casos dudosos (apdos. 3.4.1, 3.4.2 y 3.4.4) y ciertos casos de límite nulo o infinito en la base o el exponente (apdo. 3.4.7) dan lugar a los siguientes tipos de indeterminación:

$$\boxed{\infty - \infty; \quad \infty \cdot 0; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad 0^0; \quad \infty^0; \quad 1^\infty}$$

Nota. En el caso 1^∞ del cuadro anterior, 1 significa una sucesión de límite 1.

3.5. Criterios de convergencia

3.5.1. Criterio de Stolz

El criterio de Stolz es de gran utilidad para resolver indeterminaciones del tipo $0/0$ e ∞/∞ (puede verse una demostración en J. Burgos, p. 45).

Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tales que cumplen dos condiciones:

- a) $\{b_n\}$ es estrictamente monótona.
- b) $\{b_n\} \rightarrow \pm\infty$ o bien $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Entonces se cumple:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l} \quad (l \text{ finito o infinito})$$

3.5.2. Criterio de la media aritmética

Si la sucesión $\{x_n\}$ converge, la sucesión formada por la media aritmética de sus términos tiene el mismo límite. Es decir:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = l} \quad (l \text{ finito o infinito})$$

Demostración. Definimos las sucesiones $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ y $b_n = n$ (que cumple las condiciones de Stolz). Entonces $a_n - a_{n-1} = x_n$ y $b_n - b_{n-1} = 1$, por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1} = l.$$

3.5.3. Criterio de la media geométrica

Sea la sucesión $\{x_n\}/x_n > 0 \forall n$. Si converge, la sucesión formada por la media geométrica de sus términos tiene el mismo límite. Es decir:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = l}$$

Demostración. El criterio es válido para $l \geq 0$ o $l = +\infty$. Lo demostramos para $l > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(x_1 \cdots x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n}} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} e^\lambda,$$

donde

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \ln l$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = e^{\ln l} = l$$

3.5.4. Regla de la raíz

Sea la sucesión $\{a_n\}/a_n > 0 \forall n$. Se cumple:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l}$$

Demostración. Definimos una nueva sucesión $x_1 = a_1, x_2 = \frac{a_2}{a_1}, \dots, x_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Entonces:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{M.G.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Es decir, si existe el límite del cociente, existe el de la raíz y coinciden. Aunque puede no existir el primero y sí el segundo.

3.6. Infinitos e infinitésimos

3.6.1. Definiciones

Sea la sucesión $\{a_n\}$. Decimos que:

a) $\{a_n\}$ es un infinito si $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty}$

b) $\{a_n\}$ es un infinitésimo si $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0}$

Si una sucesión tiene límite 0, se dice también que es una sucesión nula.

Ejemplo.

1. Son infinitos las sucesiones $\{a_n\}$, de término general $n^2, \sqrt{n}, -2^n, \ln n$.
2. Son infinitésimos las sucesiones de término general $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{-1}{2^n}, \frac{(-1)^n}{\ln n}$ ($n \neq 1$).

3.6.2. Comparación

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ infinitos (infinitésimos):

a) Si $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ es un infinito (infinitésimo), $\{a_n\}$ es de mayor orden que $\{b_n\}$.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son del mismo orden. Entonces:

- Sea $\{a_n\}$ un infinito. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^p} = k \neq 0, p > 0$$

decimos que $\{a_n\}$ es de orden p y $\boxed{kn^p}$ es su parte principal.

- Sea $\{a_n\}$ un infinitésimo. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(1/n)^p} = k \neq 0, p > 0$$

decimos que $\{a_n\}$ es de orden p y $\boxed{k/n^p}$ es su parte principal.

c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, decimos que $\{a_n\}$ es despreciable frente a $\{b_n\}$.

Ejemplos. A partir de las definiciones a), b) y c) anteriores, se observa lo siguiente (prescindimos de las llaves que indican sucesión para simplificar):

a.1) El infinito n^3 es de mayor orden que n y de menor orden que n^5 .

a.2) El infinitésimo $\frac{1}{n^3}$ es de mayor orden que $\frac{1}{n}$ y de menor orden que $\frac{1}{n^5}$.

b.1) $3n^2$ es un infinito del mismo orden que n^2 .

b.2) $\frac{3}{n}$ es un infinitésimo del mismo orden que $\frac{1}{n}$.

b.3) $3n^2 + n$ es un infinito de orden 2 y su parte principal es $3n^2$.

b.4) $\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}$ es un infinitésimo de orden 1 y su parte principal es $\frac{3}{n}$.

c.1) $3n$ es despreciable frente a n^2 .

c.2) $\frac{1}{n^2}$ es despreciable frente a $\frac{3}{n}$.

3.6.3. Relación entre tipos de infinito

Se demuestra (J. Burgos, p. 50) que todo infinito logarítmico es despreciable frente a cualquiera potencial; todo potencial frente a cualquiera exponencial; y todo exponencial frente a cualquiera potencial-exponencial. Lo representamos con el símbolo $\ll$:

$$\boxed{\begin{matrix} (\log_p n)^a & \ll & n^b & \ll & c^n & \ll & n^{dn} \\ p>1, a>0 & & b>0 & & c>1 & & d>0 \end{matrix}}$$

Ejemplo. Se cumple: $(\ln n)^{1000} \ll \sqrt{n}$; $n^{1000} \ll 2^n$; $1000^n \ll n^n$.

3.7. Sucesiones equivalentes

3.7.1. Definición

Dadas $\{a_n\}$ y $\{a'_n\}$ con igual límite, finito o infinito, se dice que son equivalentes si el límite de su cociente es igual a 1:

$$a_n \sim a'_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a'_n} = 1$$

Entonces dos sucesiones equivalentes tienen el mismo límite (por definición). Y si dos sucesiones tienen igual límite a , finito y no nulo, son equivalentes. En efecto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a'_n} = \frac{a}{a} = 1$$

3.7.2. Propiedades

Si $a_n \sim a'_n$, se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a'_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a'_n}{a'_n} = 0$$

Demostración. Dividimos la diferencia entre a'_n (se obtiene el mismo resultado dividiendo entre a_n).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a'_n}{a'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a'_n} - 1 = 0$$

Entonces:

- a) La diferencia entre dos infinitésimos equivalentes es otro, de orden superior a ambos.
- b) La diferencia entre dos infinitos equivalentes es despreciable frente a ambos.

3.7.3. Equivalencia con las partes principales

- a) Sea a_n un infinito. Vimos en 3.6.2 que kn^p es la parte principal de a_n si se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^p} = k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{kn^p} = \frac{1}{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^p} = \frac{k}{k} = 1 \implies a_n \sim kn^p$$

luego **un infinito es equivalente a su parte principal**.

- b) Sea a_n un infinitésimo: k/n^p será su parte principal si se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(1/n)^p} = k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{k/n^p} = \frac{1}{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(1/n)^p} = \frac{k}{k} = 1 \implies a_n \sim k/n^p$$

luego **un infinitésimo es equivalente a su parte principal**.

Ejemplo. Sean el infinito $a_n = 2n^3 + 3n$ y el infinitésimo $b_n = 2/n^3 + 3/n$. Cada uno de ellos será equivalente a su parte principal, por lo que $a_n \sim 2n^3$, $b_n \sim 3/n$.

3.8. Sustitución por sucesiones equivalentes

3.8.1. Producto y cociente

Sean $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$. Se verifica lo siguiente (en cada caso se indica el lugar que ocupa en la tabla de equivalencias que se encuentra al final del apdo. 3.9).

a) Si $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n b'_n \implies \boxed{a_n b_n \sim a'_n b'_n}$ (A.1)

D: Veamos que ambos productos tienen igual límite y el límite del cociente de ambos es 1.

a.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n b_n}{a'_n b'_n} a'_n b'_n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{a_n}{a'_n} \right) \left(\frac{b_n}{b'_n} \right) (a'_n b'_n) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n b'_n,$

pues los cocientes a_n/a'_n y b_n/b'_n tienden a 1.

a.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a'_n b'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a'_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b'_n} = 1.$

Así pues, los productos $a_n b_n$ y $a'_n b'_n$ tienen el mismo límite o ambos carecen de él (por a.1). Y, si existe el límite, ambos productos son equivalentes (por a.2).

b) Si $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n}{b'_n} \implies \boxed{\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{a'_n}{b'_n}}$ (A.2)

Así pues, **al sustituir, en productos o cocientes**, alguno de los términos por una sucesión equivalente, **resulta una expresión equivalente** a la primera.

Ejemplo.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + \sqrt{n}}{3n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{3n^2} = \frac{4}{3}.$

2. $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} \right) \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} \right) \sim \frac{1}{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n^2}.$

En el primer caso buscamos el límite de un cociente indeterminado. En el segundo queremos calcular el infinitésimo equivalente al producto (es inmediato que el límite es cero).

3.8.2. Logaritmo

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos a partir de uno dado, tal que su límite es $a \geq 0$, $a \neq 1$ (a puede ser $+\infty$). Se cumple:

$$\boxed{a_n \sim a'_n \implies \log a_n \sim \log a'_n} \quad (\text{A.3})$$

Es decir, **al sustituir el argumento de un logaritmo** por una sucesión equivalente, **resulta una expresión equivalente** a la primera, siempre que el argumento no tenga límite 1. Lo demostramos en dos partes.

a) $\log a_n$ y $\log a'_n$ tienen el mismo límite.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[\frac{a_n}{a'_n} a'_n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log \left(\frac{a_n}{a'_n} \right) + \log a'_n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \log a'_n.$$

Este último límite existe siempre, pues $\log a'_n$ tiende a $\log a$, si $a \in \mathbb{R}^+$; tiende a $+\infty$, si $a_n \rightarrow \infty$; y tiende a $-\infty$ si $a_n \rightarrow 0$.

b) El límite de su cociente es 1.

$$\log a_n - \log a'_n = \log \left(\frac{a_n}{a'_n} \right) \stackrel{\rightarrow 1}{=} \varepsilon_n \implies \log a_n = \log a'_n + \varepsilon_n$$

$$\text{Entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{\log a'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a'_n + \varepsilon_n}{\log a'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\varepsilon_n}{\log a'_n}}_{\rightarrow \log a \neq 0} \right) = 1.$$

Ejemplo.

$$1. \ln(n^4 + 2n^2) \sim \ln n^4 = 4 \ln n.$$

$$2. \ln \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) \sim \ln \frac{1}{\sqrt{n}} = -\ln \sqrt{n} = -\frac{1}{2} \ln n.$$

En ambos casos hemos obtenido un infinito equivalente al inicial, de expresión más sencilla.

3.8.3. Potencial-exponencial

Dados $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$, en general **no se cumple** $a_n^{b_n} \sim a'_n^{b'_n}$.

Ejemplo. El infinito $n + 1 + 1/n$ es equivalente a n . Pero $e^{n+1+\frac{1}{n}} \not\sim e^n$, pues el cociente de ambas expresiones tiene límite $e \neq 1$.

Estas indeterminaciones se resuelven generalmente haciendo:

$$a_n^{b_n} = e^{\ln a_n^{b_n}} = e^{b_n \ln a_n}$$

siempre que $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.8.4. Suma o diferencia

Dados $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$, en general **no se cumple** $a_n \pm b_n \sim a'_n \pm b'_n$.

Ejemplo 1. Los infinitos de segundo orden $n^2 + n + 1$ y $n^2 - n + 1$ son equivalentes entre sí y a su parte principal n^2 . Pero, al restarlos, no podemos sustituirlos por n^2

$$n^2 + n + 1 - (n^2 - n + 1) \not\sim (n^2 - n^2) = 0,$$

pues la diferencia sería 0. En realidad, al restar se obtiene el infinito de primer orden $2n$.

Ejemplo 2. Los infinitésimos de primer orden $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ y $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ son equivalentes entre sí y a su parte principal $1/n$. Pero, al restarlos, no podemos sustituirlos por $1/n$.

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \not\sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,$$

sino que su diferencia es el infinitésimo de segundo orden $2/n^2$.

En ambos casos se trata de dos infinitos (infinitésimos) equivalentes, por lo que poseen la misma parte principal. Al restarlos se simplifican dichas partes principales y pasan a tener importancia infinitos de menor orden (infinitésimos de mayor orden), que no son tenidos en cuenta si se realiza la sustitución, por lo que ésta no es válida.

En el texto “Cálculo Infinitesimal” de F. Granero, p. 153, se enuncia una **regla práctica** para funciones, válida también para sucesiones. Permite aplicar las equivalencias de infinitésimos e infinitos a sumas y diferencias, en los casos en que no desaparecen sus partes principales:

Sea un límite en que aparece un factor o divisor formado por sumas y/o diferencias de infinitos. Sea m el mayor de sus órdenes. Si al sustituir los infinitos por sus partes principales resulta un infinito de orden m , la sustitución es correcta y el límite no varía.

Para infinitésimos se enuncia igual, cambiando *mayor de sus órdenes* por *menor de sus órdenes*. En resumen, en el caso de sumas y diferencias de infinitos o infinitésimos, **podemos usar equivalencias si no desaparecen las partes principales**.

Ejemplo 3.

a) Sean $a_n = n^3 - n^2$, $b_n = n^3 + n^2 \Rightarrow a_n, b_n \sim n^3$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{3a_n - 2b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^3}{3n^3 - 2n^3} = 2$$

Antes y después de sustituir por sus partes principales, los infinitos son de orden 3.

b) Sean $a_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} \Rightarrow a_n, b_n \sim \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4n(a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = 4$$

Antes y después de sustituir por sus partes principales, los infinitésimos son de orden 1.

3.9. Cálculo de límites

3.9.1. A partir del número e

a. Definición

El número e se define como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pero, si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión **divergente** cualquiera, se cumple:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = e} \quad (3.2)$$

D: Lo demostramos en el caso de que $\{\alpha_n\}$ sea monótona creciente de términos positivos.

Sea a_n la parte entera de α_n , $a_n = E(\alpha_n)$. Entonces:

$$\begin{aligned} a_n \leq \alpha_n < a_n + 1 &\Rightarrow \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{\alpha_n} > \frac{1}{a_n + 1} \Rightarrow \\ \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n+1} &> \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} > \left(1 + \frac{1}{a_n + 1}\right)^{a_n} \Rightarrow \\ \underbrace{\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}}_{(1)} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)}_{(2)} &> \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} > \underbrace{\left(1 + \frac{1}{a_n + 1}\right)^{a_n+1}}_{(3)} : \underbrace{\left(1 + \frac{1}{a_n + 1}\right)}_{(4)} \end{aligned}$$

Los factores (1) y (3) corresponden a subsucesiones de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, por lo que tienen límite e .

Los factores (2) y (4) tienen límite 1. Entonces la sucesión tiende a e (prop. 6 de los límites).

b. Generalización

La expresión (3.2) se demuestra también (J. Burgos, p. 40) cuando $\{\alpha_n\}$:

1. Es monótona decreciente de términos negativos.
2. Tiene un número finito de términos negativos y el resto positivos.
3. Tiene un número finito de términos positivos y el resto negativos.
4. Tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos.

c. Aplicación

A partir de esta expresión del número e , podemos resolver distintos límites:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n + a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^a \right] \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^a = e$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + a}\right)^{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + a}\right)^{\alpha_n + a - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_n + a}\right)^{\alpha_n + a} : \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + a}\right)^a \right] \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + a}\right)^{\alpha_n + a} : \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + a}\right)^a = e$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \right]^a \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \right]^a = e^a$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_n/a}\right)^{\frac{\alpha_n}{a}} \right]^a \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n/a}\right)^{\frac{\alpha_n}{a}} \right]^a = e^a$

d. Equivalencias

A partir del número e se justifican distintas equivalencias, como veremos a continuación (en cada una se indica el lugar que ocupa en la tabla de equivalencias). En primer lugar demostramos la relación entre logaritmos neperianos y logaritmos en base a .

1. Cambio de base: $\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}} \quad (a > 0, a \neq 1).$

$$\mathbf{D:} \quad \forall x > 0, \quad x = a^{\log_a x} \implies \ln x = \ln (a^{\log_a x}) = \log_a x \ln a \implies \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

2. $\boxed{\ln(1 + \theta_n) \sim \theta_n} \quad (\text{B.1})$

$\mathbf{D:}$ Calculamos el límite del cociente de ambas expresiones. Al ser $\{1/\theta_n\}$ divergente,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \theta_n)}{\theta_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta_n} \ln \left(1 + \frac{1}{1/\theta_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{1/\theta_n}\right)^{\frac{1}{\theta_n}} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \\ \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1/\theta_n}\right)^{\frac{1}{\theta_n}} &= \ln e = 1 \end{aligned}$$

En caso de que el logaritmo no sea neperiano, $\log_a(1 + \theta_n) = \frac{\ln(1 + \theta_n)}{\ln a} \sim \frac{\theta_n}{\ln a}.$

$$3. \boxed{\ln u_n \sim u_n - 1} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{D:} \quad u_n - 1 = \theta_n \implies u_n = 1 + \theta_n \implies \ln u_n = \ln(1 + \theta_n) \sim \theta_n = u_n - 1$$

$$\text{En caso de que el logaritmo no sea neperiano, } \log_a u_n = \frac{\ln u_n}{\ln a} \sim \frac{u_n - 1}{\ln a}.$$

$$4. \boxed{e^{\theta_n} - 1 \sim \theta_n} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{D:} \quad e^{\theta_n} - 1 \rightarrow 0 \implies e^{\theta_n} - 1 = \theta'_n \sim \ln(1 + \theta'_n) = \ln(1 + e^{\theta_n} - 1) = \ln e^{\theta_n} = \theta_n$$

$$\text{En caso de que la base no sea } e, \quad a^{\theta_n} - 1 = e^{\theta_n \ln a} - 1 \sim \theta_n \ln a.$$

Ejemplos.

$$1. \text{ Si } a = e^2, \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$2. \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$3. \ln \left(\frac{n+3}{n-2} \right) \sim \frac{n+3}{n-2} - 1 = \frac{n+3-n+2}{n-2} = \frac{5}{n-2} \sim \frac{5}{n}$$

$$4. 2^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln 2 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{1/n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{n} \ln 2 = \ln 2$$

3.9.2. Expresiones polinómicas

a. Cociente

Un polinomio en n es un infinito equivalente a su término de mayor grado, pues:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \dots + a_k n^k}{a_k n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_k} \left(\frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \dots + a_k \right) = 1 \implies \boxed{P_k(n) \sim a_k n^k} \quad (\text{C.1})$$

$$\text{Entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{Q_l(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_l} & k = l \\ 0 & k < l \\ \infty \cdot \text{signo}(a_k/b_l) & k > l \end{cases}$$

b. Logaritmo

Si $a_k > 0$, el neperiano de $P_k(n)$ es equivalente al infinito $k \ln n$, pues:

$$\ln(a_0 + \dots + a_k n^k) \sim \ln(a_k n^k) = \ln a_k + k \ln n \sim k \ln n \implies \boxed{\ln P_k(n) \sim k \ln n} \quad (\text{C.2})$$

c. Raíz n -ésima

La raíz n -ésima de $P_k(n)$ tiene límite 1, pues, por la regla de la raíz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Entonces, considerando la sucesión de término general $P_k(n)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n+1)}{P_k(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k(n+1)^k}{a_k n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^k = 1 \implies \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1}$$

d. Diferencia de raíces de polinomios

En ocasiones, la sustitución de cada uno de ellos por su término de mayor grado no da resultado. En ese caso podemos sacar factor común la raíz del término de mayor grado y utilizar la equivalencia:

$$\boxed{\sqrt[p]{1 + \theta_n} - 1 \sim \frac{\theta_n}{p}} \quad (\text{D.1})$$

$$\text{D: } \underbrace{\sqrt[p]{1 + \theta_n} - 1}_{\theta'_n} \sim \ln(1 + \theta'_n) = \ln(1 + \sqrt[p]{1 + \theta_n} - 1) = \ln(1 + \theta_n)^{1/p} = \frac{1}{p} \ln(1 + \theta_n) \sim \frac{\theta_n}{p}$$

Ejercicios. Justifica los resultados siguientes:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n^2}{2n^3 + 4n} = \frac{1}{2}$
2. $\ln(2n^3 - n + 1) \sim 3 \ln n$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n-1}} - 1 \right) = \frac{2}{3}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + a} - \sqrt{n^2 + b}) = 0.$

3.9.3. Sucesiones recurrentes

Son aquellas en las que cada término se deduce de los anteriores:

$$\boxed{a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \dots)}$$

Un ejemplo clásico es la sucesión de Fibonacci, en que cada término se obtiene sumando los dos anteriores, siendo los dos primeros 0 y 1:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \implies \{x_n\} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \dots$$

Para calcular el límite de una sucesión recurrente, suele procederse en dos fases. Primero se demuestra que existe (por ejemplo, por tratarse de una sucesión monótona y acotada). Luego se obtiene el límite a partir de la relación de recurrencia.

Ejercicio. Demuestra que es convergente y calcula el límite de la sucesión definida por:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{3}, \quad x_1 = 1 \quad (\text{Sol. } l = -1)$$

3.9.4. Equivalencias de Stirling y trigonométricas

a. Fórmula de Stirling

$$\boxed{n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \quad (\text{E.1})$$

Ejercicio. A partir de la fórmula de Stirling, se propone justificar el lugar que ocupa el infinito factorial en la siguiente tabla de infinitos (véase el apdo. [3.6.3](#)).

$$\boxed{\begin{matrix} (\log_p n)^a & \ll & n^b & \ll & c^n & \ll & n^{dn} & \ll & n! & \ll & n^{fn} \\ p > 1, a > 0 & & b > 0 & & c > 1 & & 0 < d < 1 & & & & f \geq 1 \end{matrix}}$$

b. Equivalencias trigonométricas

1. La tangente, el seno y el ángulo en radianes son infinitésimos equivalentes.

$$\boxed{\tan \theta_n \sim \sin \theta_n \sim \theta_n} \quad (\text{F.1})$$

2. A partir de la anterior: $\boxed{1 - \cos \theta_n \sim \frac{1}{2}\theta_n^2}$ (F.2)

$$\text{D: } 1 - \cos \theta_n = 2 \sin^2 \frac{\theta_n}{2} \sim 2 \left(\frac{\theta_n}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \theta_n^2$$

Ejemplo. Resolvemos el siguiente límite usando equivalencias trigonométricas:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\tan \frac{2}{n} - \sin \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \tan \frac{2}{n} \left(1 - \cos \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \frac{2}{n} \frac{(2/n)^2}{2} = 4$$

3.9.5. Cambio del tipo de indeterminación

Las indeterminaciones del tipo 1^∞ , 0^0 e ∞^0 suelen resolverse usando la relación:

$$a^b = e^{b \ln a}$$

siempre que $a > 0$. En la del tipo $\infty - \infty$ se saca factor común uno de los dos infinitos.

Simbolizando por θ_n una sucesión nula, por α_n una divergente a $+\infty$ y por u_n una de límite 1, obtenemos los siguientes casos (en los tres primeros la indeterminación ha pasado al exponente).

a) Cambio de la indeterminación tipo 1^∞ en $\infty \cdot 0$: $\boxed{u_n^{\alpha_n} = e^{\alpha_n \ln u_n}}$ (G.1)

b) Cambio de la indeterminación tipo 0^0 en $0 \cdot (-\infty)$: $\boxed{\theta_n^{\theta'_n} = e^{\theta'_n \ln \theta_n}}$ (G.2)

c) Cambio de la indeterminación tipo ∞^0 en $0 \cdot \infty$: $\boxed{\alpha_n^{\theta_n} = e^{\theta_n \ln \alpha_n}}$ (G.3)

d) Indeterminación tipo $\infty - \infty$: $\boxed{\alpha_n - \alpha'_n = \alpha_n \left(1 - \frac{\alpha'_n}{\alpha_n} \right) = \alpha'_n \left(\frac{\alpha_n}{\alpha'_n} - 1 \right)}$ (G.4)

Ejemplos.

$$1. \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln \cos \frac{1}{n}} \stackrel{\text{Si} \exists}{=} e^\lambda; \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \cos \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{2} \implies L = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$2. \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln \tan \frac{1}{n}} \stackrel{\text{Si} \exists}{=} e^\lambda.$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-\ln n) = 0 \implies L = e^0 = 1$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - n^5 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left(1 - \frac{2^n}{3^n} n^5 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \underbrace{\left(1 - \frac{n^5}{(3/2)^n} \right)}_{\rightarrow 0} = \infty$$

TABLA DE EQUIVALENCIAS (SUCESSIONES)

$$\{\alpha_n\} \rightarrow +\infty; \quad \{\theta_n\} \rightarrow 0; \quad \{u_n\} \rightarrow 1; \quad a_n \sim a'_n; \quad b_n \sim b'_n$$

A. EQUIVALENCIAS GENERALES

$$\begin{array}{llll} 1. & a_n b_n & \sim & a'_n b'_n & \left(\text{Si } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n b'_n \right) \\ 2. & \frac{a_n}{b_n} & \sim & \frac{a'_n}{b'_n} & \left(\text{Si } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n}{b'_n} \right) \\ 3. & \log_p(a_n) & \sim & \log_p(a'_n) & \left(\text{Si } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 1 \right) \end{array}$$

B. A PARTIR DEL NÚMERO e

$$\begin{array}{lll} 1. & \ln(1 + \theta_n) & \sim \theta_n \\ 2. & \ln u_n & \sim u_n - 1 \\ 3. & e^{\theta_n} - 1 & \sim \theta_n \end{array}$$

Nota: Para logaritmos en base p , se utiliza la relación $\log_p x = \frac{\ln x}{\ln p}$

C. EXPRESIONES POLINÓMICAS

$$\begin{array}{lll} 1. & a_0 + a_1 \alpha_n + \dots + a_p \alpha_n^p & \sim a_p \alpha_n^p \\ 2. & \ln(a_0 + a_1 \alpha_n + \dots + a_p \alpha_n^p) & \sim p \ln \alpha_n \end{array}$$

D. RAÍCES

$$1. \quad \sqrt[p]{1 + \theta_n} - 1 \sim \frac{\theta_n}{p}$$

E. STIRLING

$$1. \quad n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

F. TRIGONOMÉTRICAS

$$\begin{array}{llll} 1. & \theta_n & \sim \sin \theta_n & \sim \tan \theta_n \\ 2. & 1 - \cos \theta_n & \sim \frac{1}{2} \theta_n^2 & \end{array}$$

G. CAMBIO DEL TIPO DE INDETERMINACIÓN

$$\begin{array}{llll} 1. & u_n^{\alpha_n} & = & e^{\alpha_n \ln u_n} & [1^\infty \rightarrow e^{\infty 0}] \\ 2. & \theta_n^{\theta'_n} & = & e^{\theta'_n \ln \theta_n} & [0^0 \rightarrow e^{0(-\infty)}] \\ 3. & \alpha_n^{\theta_n} & = & e^{\theta_n \ln \alpha_n} & [\infty^0 \rightarrow e^{0\infty}] \\ 4. & \alpha_n - \alpha'_n & = & \alpha_n \left(1 - \frac{\alpha'_n}{\alpha_n} \right) & \left[\infty - \infty \rightarrow \infty \left(1 - \frac{\infty}{\infty} \right) \right] \end{array}$$

3.10. Ejercicios de autoevaluación

3.10.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Toda sucesión convergente está acotada y viceversa.
2. Toda sucesión de Cauchy es convergente en $\mathbb{R}$.
3. Si $\{a_n\} \rightarrow a \in \mathbb{R} \implies \left\{\frac{1}{a_n}\right\} \rightarrow \frac{1}{a}$.
4. Si $\{a_n\} \rightarrow a \in \mathbb{R}$, $\{b_n\} \rightarrow b \in \mathbb{R} \implies \{a_n^{b_n}\} \rightarrow a^b$.
5. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = x \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, si éste último existe.
7. La diferencia de dos infinitos equivalentes puede ser un infinito, pero es despreciable frente a ambos.
8. Sean $a_n, a'_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} / a_n \sim a'_n$. Entonces se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a'_n$.
9. Sea una suma o diferencia de infinitésimos y m el mayor de sus órdenes. Si al sustituir los infinitésimos por sus partes principales resulta un infinitésimo de orden m , el límite no varía.
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{4n}} = e^2$.
11. $n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}$.
12. $\ln(3n^4 + 4n^2 + 4) \sim 4 \ln n$.
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
14. La expresión $n^{\frac{1}{\ln n}}$ vale e , $\forall n > 1$.
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \ln n - n \ln^2 n) = +\infty$.

3.10.2. Cuestiones

Cuestión 1. Razona la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:

“Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tales que $\{a_n\} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ y $\{b_n\}$ no tiene límite, finito ni infinito. Si la sucesión producto $\{a_n b_n\}$ tiene límite $c \in \mathbb{R}$, entonces el límite $a = 0$.”

Cuestión 2. Pon un ejemplo de sucesión divergente obtenida como suma de:

- a) Una divergente y una convergente.
- b) Una divergente y una oscilante.
- c) Dos divergentes.
- d) Dos oscilantes.
- e) Dos convergentes.

Cuestión 3. Sea $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$. ¿Es suficiente que una de las dos sea divergente para que la suma lo sea? ¿Es necesario?

Cuestión 4. Razona qué podemos afirmar de la suma de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ si ambas son:

a) Convergentes. b) Acotadas. c) Oscilantes. d) Divergentes.

3.10.3. Solución del test verdadero/falso

1. **F.** Toda sucesión convergente está acotada (prop. 8 de los límites), pero no viceversa. Ej: la sucesión $\left\{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, \dots\right\}$ está acotada pero no converge.
2. **V.** Es una de las maneras de expresar la completitud de $\mathbb{R}$. No se cumple en $\mathbb{Q}$.
3. **F.** Se cumple sólo si $a \neq 0$.
4. **F.** La potencia de base a y exponente b se define en general para $a > 0$. Si $a > 0$, la implicación es cierta.
5. **F.** Contraejemplo: la sucesión $\{a, -a, a, -a, \dots\}$. Sí se cumple de derecha a izquierda.
6. **V.** Es una consecuencia del criterio de Stolz.
7. **V.** Véase el apdo. 3.7. Sucesiones equivalentes.
8. **V.** Al ser $a_n \sim a'_n$, ambas tienen el mismo límite a . Distinguimos dos casos:
 - a) Si $a \neq 1$, $\ln a_n \sim \ln a'_n$, por lo que tienen igual límite (véase el apdo. 3.8.2).
 - b) Si $a = 1$, tanto $\ln a_n$ como $\ln a'_n$ tienden a $\ln 1 = 0$.
9. **F.** ... y m el **menor** de sus órdenes... (regla práctica para sumas y diferencias 3.8.4)
10. **V.** Haciendo $\sqrt{4n} = 2\sqrt{n}$, resulta uno de los casos estudiados a partir del número e .
11. **V.** $n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ (véase tabla de equivalencias).
12. **V.** $\ln(3n^4 + 4n^2 + 4) \sim \ln(3n^4) = \ln 3 + \ln n^4 \sim 4 \ln n$ (véase tabla de equivalencias).
13. **V.** Usando la fórmula de Stirling y la comparación de infinitésimos potencial y exponencial, queda:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} = 0$$
14. **V.** $n^{\frac{1}{\ln n}} = e^{\ln \left(n^{\frac{1}{\ln n}}\right)} = e^{\left(\frac{1}{\ln n} \ln n\right)} = e^1 = e, \forall n > 1$ (véase el apdo. 3.9.5).
15. **V.** $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \ln n - n \ln^2 n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln n \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = +\infty$ (véase el apdo. 3.9.5).

3.10.4. Solución de las cuestiones

Cuestión 1. “Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tales que $\{a_n\} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ y $\{b_n\}$ no tiene límite, finito ni infinito. Si la sucesión producto $\{a_n b_n\}$ tiene límite $c \in \mathbb{R}$, entonces el límite $a = 0$.”

Puesto que $\{b_n\}$ no tiene límite, tiene que ser divergente u oscilante. En el primer caso sus términos se hacen tan grandes como queramos en valor absoluto, a partir de uno dado. En el segundo, ni se cumple lo anterior ni tiene límite finito.

Entonces, para que el producto $a_n b_n$ tenga límite parece intuirse la necesidad de que $\{a_n\} \rightarrow 0$. Lo demostramos por reducción al absurdo.

Supongamos que $a \neq 0$. Entonces los términos de $\{a_n\}$ serán distintos de 0 a partir de un cierto índice y se cumplirá:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{c}{a} \in \mathbb{R}$$

Pero este resultado contradice la hipótesis de que la sucesión $\{b_n\}$ no tiene límite. Así pues, si $\{a_n b_n\}$ tiene límite $c \in \mathbb{R}$, el límite $a = 0$.

Cuestión 2. Pon un ejemplo de sucesión divergente obtenida como suma de:

- a) Una divergente y una convergente: $\left\{n + \frac{1}{n}\right\} = \{n\} + \left\{\frac{1}{n}\right\}$
- b) Una divergente y una oscilante: $\{n + (-1)^n\} = \{n\} + \{(-1)^n\}$
- c) Dos divergentes: $\{2n\} = \{n\} + \{n\}$
- d) Dos oscilantes: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \{1, 0, 3, 0, 5, 0, \dots\} + \{0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots\}$
- e) Dos convergentes: No existe. La suma de dos convergentes converge a la suma de los límites (apdo. 3.4. Operaciones con límites).

Cuestión 3. Sea $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$. ¿Es suficiente que una de las dos sea divergente para que la suma lo sea? ¿Es necesario?

- No es suficiente. Ejemplo: $\{1, 2, 3, 4, \dots\} + \{0, -2, 0, -4, \dots\} = \{1, 0, 3, 0, \dots\}$, oscilante.
- No es necesario. En la cuestión 2, caso d) se obtiene una divergente sumando dos oscilantes.

Cuestión 4. Razona qué podemos afirmar de la suma de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ si ambas son:

- a) Convergentes: la suma es convergente (véase cuestión 2, caso e)).
- b) Acotadas: la suma es acotada pues, al ser ambas acotadas,
 $\exists k_1, k_2 > 0 \mid |a_n| < k_1, |b_n| < k_2 \forall n$. Entonces, $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < k_1 + k_2 \forall n$.
 Como consecuencia, la suma no puede ser divergente.
- c) Oscilantes: no podemos asegurar nada.
 Ej. 1: $\{0, 1, 0, 1, \dots\} + \{0, -1, 0, -1, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$, convergente.
 Ej. 2: $\{1, 0, 3, 0, \dots\} + \{0, 2, 0, 4, \dots\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, divergente.
 Ej. 3: $\{0, 1, 0, 1, \dots\} + \{0, 1, 0, 1, \dots\} = \{0, 2, 0, 2, \dots\}$, oscilante.
- d) Divergentes: no podemos asegurar nada.
 Ej. 4: $\{1, 2, 3, 4, \dots\} + \{-1, -2, -3, -4, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$, convergente.
 Ej. 5: $\{1, 2, 3, 4, \dots\} + \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, divergente.
 Ej. 6: $\{l, 3, -4, \dots\} = \{2, 0, 6, 0, \dots\}$, oscilante.

Capítulo 4

Funciones en $\mathbb{R}$

4.1. Nociones generales

4.1.1. Definiciones.

Función. Sean los conjuntos A, B y $D \subset A$. Llamamos función f , de D en B , a toda correspondencia que asocia, a cada $x \in D$, un único elemento $f(x) \in B$.

$$f : D \rightarrow B; \quad x \rightarrow y = f(x)$$

A x se le llama variable independiente; y es la variable dependiente.

Si $A = B = \mathbb{R}$, se trata de una función real de variable real. Ejemplo, la función $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Dominio o campo de existencia. Es el conjunto D de valores de la variable independiente para los que existe la función. En el ejemplo, el radicando ha de ser mayor o igual que 0, por lo que

$$1 - x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 1 \implies |x| \leq 1$$

luego el dominio D es el intervalo $[-1, 1]$ o cualquier subconjunto suyo.

Recorrido o conjunto imagen. Es el conjunto de las imágenes de los elementos de D .

$$f(D) = \{f(x) \in B \mid x \in D\}$$

En el ejemplo, $f(D) = [0, 1]$.

Gráfica. La gráfica de una función es el conjunto de puntos $(x, f(x))$.

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$$

En el ejemplo, la gráfica de la función es la semicircunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$.

4.1.2. Operaciones con funciones

Funciones definidas en D . El conjunto de todas las funciones reales de variable real, definidas en un cierto conjunto $D \subset \mathbb{R}$, se denota $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Habitualmente, D es un intervalo.

Operaciones entre funciones. Entre los elementos de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, se definen las operaciones suma, producto y producto por un número real:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x); \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x); \quad \forall x \in D$$

Es decir, la función suma de f y g es aquella que hace corresponder, a x , la suma de $f(x)$ y $g(x)$ (análogamente con las otras dos operaciones).

Relación de orden. Entre funciones se define la relación de orden siguiente:

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x), \forall x \in D$$

Función acotada. Decimos que la función f está acotada en $S \subset D$ si lo está el conjunto $f(S)$. En ese caso, llamamos supremo, ínfimo, máximo o mínimo de f a los correspondientes elementos de $f(S)$.

Composición de funciones. Sean las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : E \rightarrow F$, tales que $f(A) \subset E$. Definimos la función compuesta $g \circ f$ como:

$$g \circ f : A \rightarrow F / (g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A$$

La composición de funciones tiene la propiedad asociativa, pero no la conmutativa.

4.1.3. Tipos de funciones

Función par y función impar. Si el dominio D es simétrico respecto al origen, decimos que una función definida en D es:

- **Par**, si y sólo si: $f(-x) = f(x), \forall x \in D$. Ejemplo: $\cos x, x^2, \cosh x$.
- **Impar**, si y sólo si: $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$. Ejemplo: $\sin x, x^3, \tanh x$.

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje OY . La de una función impar lo es respecto del origen de coordenadas.

Se propone como ejercicio demostrar que la función par e impar a la vez es la función nula.

Funciones periódicas. Se dice que f es periódica de período T si y sólo si se cumple:

$$\exists T \in \mathbb{R} / f(x) = f(x + T), \forall x \in D$$

Al estudiar una función periódica, basta conocer sus valores en un intervalo de amplitud T . Son periódicas, de período 2π , las funciones seno y coseno. La tangente tiene período π .

Funciones monótonas. Distinguimos dos casos:

- Monótona **creciente**: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2), x_1, x_2 \in D$. Ejemplo: $y = \sqrt{x}$.
- Monótona **decreciente**: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2), x_1, x_2 \in D$. Ejemplo: $1/x (x > 0)$.

Si $f(x_1)$ nunca es igual a $f(x_2)$, se trata de monotonía estricta.

Funciones elementales principales. Son la potencia, la exponencial, el logaritmo, el seno, el coseno y la tangente.

$$x^a, a \in \mathbb{R}; \quad b^x, b \in \mathbb{R}^+; \quad \log_c x, c \in \mathbb{R}^+, c \neq 1; \quad \sin x; \quad \cos x; \quad \tan x$$

La suma, el producto, el cociente y la composición de funciones elementales principales (en número finito) da lugar a las funciones elementales.

Algunas funciones particulares.

1. Función parte entera. Nos da el valor del mayor entero, menor o igual que $x \in \mathbb{R}$:

$$E(x) = p \in \mathbb{Z} / p \leq x < p + 1$$

Es una función escalonada, con salto en los valores enteros de x .

2. Función parte decimal. Se define a partir de la función parte entera:

$$\{x\} = x - E(x)$$

3. Función signo. Toma sólo los valores $+1, 0$ y -1 :

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

4. Función de Dirichlet. Vale 1 o 0, según x sea o no racional:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

4.2. Límites de funciones

4.2.1. Límite funcional

Definición. Sea $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Sea un punto a , tal que f está definida en un entorno reducido de a , U_a^* . Decimos que f tiene límite φ en a si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \varphi| < \varepsilon$$

Si x está suficientemente cerca de a , su imagen $f(x)$ estará tan próxima a φ como queramos.

Obsérvese que no nos interesa el valor de $f(a)$ (que ni siquiera tiene por qué existir), sino el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$.

Ejemplo. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$. Su límite, cuando $x \rightarrow 0$, vale 1 ($1 \neq f(0)$).

Nota. Si a un entorno U_a de a le quitamos el punto a , obtenemos un entorno reducido U_a^* . Por ejemplo, si U_a es el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, U_a^* será: $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

4.2.2. Límites laterales

Definición. Si, al calcular el límite, nos acercamos a $x = a$ sólo por un lado, al límite obtenido lo denominamos límite lateral. Para ello, f debe estar definida al menos en un semientorno reducido de a : $(a - \delta, a)$, para el límite por la izquierda, o bien $(a, a + \delta)$ (por la derecha).

La existencia de límites de f en a , por la izquierda o por la derecha, se expresa como:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \varphi^- \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \varphi^+$$

Ejemplo. Sea $\text{sgn}(x)$ la función signo. Se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x) = 1$$

Relación entre los límites laterales y el funcional. Si f existe en un entorno de a , podemos acercarnos al punto por ambos lados. En ese caso se cumple el siguiente teorema:

“Es condición necesaria y suficiente para que f tenga límite en a que existan los límites laterales en a y coincidan”.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \varphi$$

Ejercicio. Calcula los límites laterales de la función parte entera de x , en los puntos $x_p \in \mathbb{Z}$.

4.2.3. Extensión del concepto de límite

Hemos definido límite finito en un punto. Si ahora observamos la función $f(x) = 1/x^2$ (figura 1, izquierda), vemos que $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$ y $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Esto nos lleva a ampliar el concepto de límite, definiendo **límite infinito** y **límite en el infinito**.

- a) Límite infinito en un punto: si x está suficientemente cerca de a , $f(x)$ se hace tan grande como queramos.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \iff \forall A > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > A$$

- b) Límite finito en el infinito. Si x crece suficientemente, $f(x)$ llega a estar de φ tan cerca como queramos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \varphi \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 / x > B \implies |f(x) - \varphi| < \varepsilon$$

- c) Límite infinito en el infinito. Si x crece suficientemente, $f(x)$ se hace tan grande como queramos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 / x > B \implies f(x) > A$$

En la figura de la izquierda ($f(x) = 1/x^2$) se muestran ejemplos de los casos a) (donde $a = 0$) y b) (donde $\varphi = 0$). En la figura de la derecha ($f(x) = x^2$), se muestra un ejemplo del caso c).

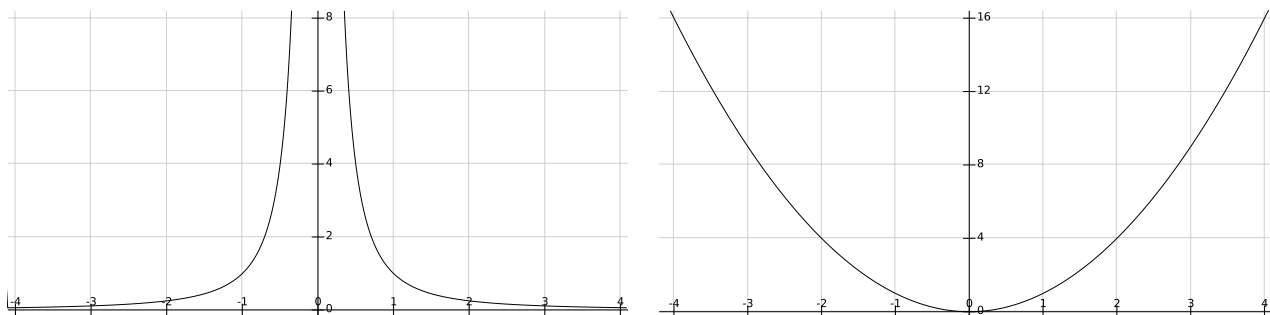


Figura 4.1: Casos a) $a = 0$; b) $\varphi = 0$; c) $a = \varphi = +\infty$.

Hemos definido los casos correspondientes a $+\infty$. Las definiciones para $-\infty$ son muy similares y se propone obtenerlas como ejercicio.

Ejercicio. Estudia los límites en $+\infty$ y en 0^+ de $f(x) = e^{1/x}$ y dibújala aproximadamente.

4.2.4. Límite por sucesiones. Relación con el límite funcional

Sea $f(x)$ definida en un entorno reducido U_a^* , $a \in \mathbb{R}$. Se cumple el siguiente teorema:

Es condición necesaria y suficiente para que la función f tenga límite φ en a que, para toda sucesión $\{x_n\}$ de límite a , su transformada $\{f(x_n)\}$ tenga límite φ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi \iff \forall \{x_n\} / \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \varphi$$

Es decir, si $f(x) \rightarrow \varphi$ (cuando $x \rightarrow a$), toda sucesión que tiende a a se transforma por f en otra que tiende a φ . Y, si existe alguna sucesión $\{x_n\}$ de límite a , cuya transformada no tenga límite φ , la función no tendrá límite φ en $x = a$.

Aplicación. Este teorema es de gran utilidad para justificar las operaciones con límites de funciones a partir de las correspondientes con límites de sucesiones (apdo. 4.2.6). También sirve para demostrar que una determinada función no tiene límite en un punto a . Para ello hemos de encontrar una sucesión de límite a , cuya sucesión transformada no tenga límite, como veremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Estudiamos si la función $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ tiene límite en el origen.

Cuando $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\pi}{x} \rightarrow +\infty$. Entonces, para variaciones muy pequeñas de x el ángulo toma todos los valores de los sucesivos intervalos $[2\pi(n-1), 2\pi n]$, $n \in \mathbb{N}$, con lo que los valores de la función recorren una y otra vez el intervalo $[-1, 1]$ y parece claro que no existe límite.

Podemos demostrarlo tomando la sucesión $x_n = 1/n$, de límite 0. Su transformada por f será:

$$\left\{ \cos \frac{\pi}{x_n} \right\} = \left\{ \cos \frac{\pi}{1/n} \right\} = \{\cos n\pi\}$$

que, cuando $n \in \mathbb{N}$, toma los valores $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$, luego no tiene límite. Por lo tanto, al existir una sucesión de límite 0 cuya transformada no tiene límite, hemos demostrado que $f(x)$ no tiene límite en $x = 0$.

En la siguiente figura se observa el comportamiento de la función $\cos \frac{\pi}{x}$ en las proximidades del origen.

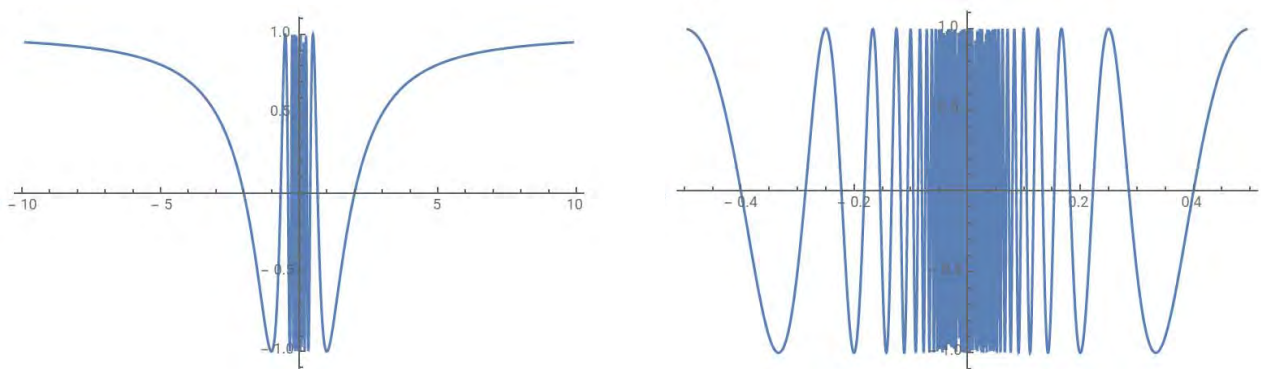


Figura 4.2: $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$. a) Entre $x = -10$ y $x = 10$; b) Entre $x = -0.5$ y $x = 0.5$.

Ejercicio. Estudia si la función $\sin \frac{\pi}{x}$ tiene límite en el origen.

4.2.5. Propiedades de los límites

1) *El límite, si existe, es único.*

D: Por reducción al absurdo. Supongamos que existan dos, φ_1 y φ_2 .

Tomamos $\varepsilon > 0$ / $2\varepsilon < |\varphi_1 - \varphi_2|$ (ε es menor que la semidistancia entre ambos). Al ser φ_1 y φ_2 límites,

$$\exists \delta_1 > 0 / 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - \varphi_1| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_2 > 0 / 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |f(x) - \varphi_2| < \varepsilon$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Entonces, si $0 < |x - a| < \delta$,

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = |\varphi_1 - f(x) + f(x) - \varphi_2| \leq |\varphi_1 - f(x)| + |f(x) - \varphi_2| < 2\varepsilon$$

Es decir, $2\varepsilon > |\varphi_1 - \varphi_2|$, contra la hipótesis.

2) *Si f tiene límite finito en a , la función está acotada en un entorno reducido de a , V_a^* .*

D: Por ser φ el límite,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \varphi| < \varepsilon$$

Entonces:

$$-\varepsilon < f(x) - \varphi < \varepsilon \implies \boxed{\varphi - \varepsilon < f(x) < \varphi + \varepsilon} \text{ para } x \in V_a^*$$

Nota. V_a^* está formado por los puntos que satisfacen la condición $0 < |x - a| < \delta$, es decir $V_a^* = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

3) *Si f tiene en a límite φ , finito y no nulo, existe un entorno reducido de a en el que f tiene el signo del límite.*

D: A partir de la propiedad 2:

- Si $\boxed{\varphi > 0}$ tomamos $\varepsilon < \varphi \implies 0 < \varphi - \varepsilon < f(x) \implies \boxed{f(x) > 0}$ para $x \in U_a^*$.

- Si $\boxed{\varphi < 0}$ tomamos $\varepsilon < -\varphi \implies f(x) < \varphi + \varepsilon < 0 \implies \boxed{f(x) < 0}$ para $x \in V_a^*$.

4) *Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en un entorno reducido de a y las funciones f y h tienen límite φ en a , entonces la función g tiene límite φ en a .*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ en } V_a^* \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \varphi \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \varphi$$

D: Por ser φ límite de f y h ,

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists \delta_1 > 0 / 0 < |x - a| < \delta_1 \implies \varphi - \varepsilon < f(x) < \varphi + \varepsilon \\ \exists \delta_2 > 0 / 0 < |x - a| < \delta_2 \implies \varphi - \varepsilon < h(x) < \varphi + \varepsilon \end{cases}$$

Además $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para $0 < |x - a| < \delta$. Entonces, si $\delta^* = \min(\delta, \delta_1, \delta_2)$, se cumple:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta^* > 0 / 0 < |x - a| < \delta^* \implies \boxed{\varphi - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \varphi + \varepsilon}$$

por lo que también g tiene límite φ en a .

4.2.6. Operaciones con límites

Las operaciones entre límites de funciones son análogas a las vistas para sucesiones. Se demuestran a partir de las operaciones correspondientes para sucesiones (3.2) y la relación entre el límite funcional y el límite por sucesiones (4.2.4). Al final del apartado se demuestra la primera de ellas.

Sean f y g dos funciones definidas al menos en un entorno reducido V_a^* de $a \in \mathbb{R}$, (a puede ser $\pm\infty$). En los 6 primeros apartados los límites son finitos. En el apartado 4.3 se estudian las operaciones con límites infinitos, que en ocasiones dan lugar a casos dudosos.

$$1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \gamma \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda\varphi + \mu\gamma, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \gamma \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \varphi\gamma}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi \neq 0 \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\varphi}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\varphi|}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi > 0, p > 0 (p \neq 1) \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \log_p(f(x)) = \log_p \varphi}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi > 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \gamma \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \varphi^\gamma}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \implies$$

$$a) \boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \pm\infty}$$

$$b) \boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty}$$

$$c) \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \pm\infty, \forall \alpha > 0}$$

$$d) \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0}$$

$$e) \boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = ?}$$

$$f) \boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = ?}$$

Tipos de indeterminación. El apartado 7 (casos d, e y f) y la operación f^g (en ciertos casos de límite nulo o infinito) dan lugar a los siguientes tipos de indeterminación:

$$\boxed{\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty; 0^0; \infty^0}$$

Demostración de 1: Puesto que ambas funciones tienen límite en $x = a$, toda sucesión $\{x_n\}$, de límite a , se transforma -por medio de f - en la sucesión $\{f(x_n)\}$, de límite φ ; y -por medio de g - en la sucesión $\{g(x_n)\}$, de límite γ .

Entonces, por medio de la función $\lambda f + \mu g$, toda sucesión $\{x_n\}$, de límite a , se transforma en la sucesión $\{\lambda f(x_n) + \mu g(x_n)\}$, que tiene como límite $\lambda\varphi + \mu\gamma$ (como vimos en las operaciones con límites de sucesiones).

4.3. Infinitos e infinitésimos

4.3.1. Definiciones

Sea $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$ ó $a = \pm\infty$. Decimos que:

a) f es un infinito en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

b) f es un infinitésimo en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Ejemplo. Si $x \rightarrow \infty$, x^3 es un infinito y $1/x^3$ un infinitésimo. Si $x \rightarrow 1$, $(x-1)^2$ es un infinitésimo y $1/(x-1)^2$ un infinito.

4.3.2. Comparación

Sean $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ infinitos (infinitésimos) en a , tales que no se anulan en un entorno reducido de a .

a) Si f/g es un infinito (infinitésimo) en a , f es de **mayor orden** que g en a .

Ejemplo: Si $x \rightarrow \infty$, x^3 es un infinito de mayor orden que x^2 , pues su cociente tiende a infinito; y $1/x^4$ es un infinitésimo de mayor orden que $1/x^2$, pues su cociente tiende a cero.

b) Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, f y g son del mismo orden en a . Entonces:

- Si f es un infinito (para $x \rightarrow \infty$) y $\frac{f(x)}{x^p} \rightarrow k \neq 0$, $f(x)$ es de **orden** p y kx^p es su **parte principal**.

- Si f es un infinitésimo (para $x \rightarrow \infty$) y $\frac{f(x)}{1/x^p} \rightarrow k \neq 0$, $f(x)$ es de **orden** p y $\frac{k}{x^p}$ es su **parte principal**.

- Si f es un infinitésimo (en $a \in \mathbb{R}$) y $\frac{f(x)}{(x-a)^p} \rightarrow k \neq 0$, $f(x)$ es de **orden** p y $k(x-a)^p$ es su **parte principal**.

Ejemplo. $2x + 3x^2$ es un infinitésimo de orden 1 en el origen (parte principal: $2x$). Es también un infinito de orden 2 para $x \rightarrow \infty$ (parte principal: $3x^2$).

c) Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, f es despreciable frente a g en a .

Ejemplo. Si $x \rightarrow \infty$, $\sqrt{x}$ es despreciable frente a x^2 y $\frac{1}{x^3}$ lo es frente a $\frac{1}{x}$.

Ejercicio. Calcula el orden y la p.p. de $\sqrt{9x^2 - 2x}$ y de $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2$ (para $x \rightarrow \infty$).

Nota. A partir de las equivalencias entre funciones (véase tabla al final del apdo. 4.4.2), podemos determinar el orden y la parte principal de infinitos e infinitésimos no polinómicos.

Ejemplo. Si $x \rightarrow a$, $f(x) = \sin^2(x-a) \sim (x-a)^2$, luego $f(x)$ es un infinitésimo de orden 2 y su parte principal es $(x-a)^2$.

4.3.3. Relación entre tipos de infinito

Se demuestra que todo infinito logarítmico es despreciable frente a cualquiera potencial; todo potencial frente a cualquiera exponencial; y todo exponencial frente a cualquiera potencial-exponencial. Lo representamos con el símbolo $\ll$:

$$\boxed{(\log_p x)^a \ll x^b \ll c^x \ll x^{dx}} \\ p>1, a>0 \quad b>0 \quad c>1 \quad d>0$$

4.4. Funciones equivalentes en un punto

4.4.1. Definición

Sean $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ de igual límite, finito o infinito, en a ($a \in \mathbb{R}$ ó $a = \pm\infty$). Decimos que f y g son equivalentes en a si verifican la siguiente condición:

$$\boxed{f \sim g \text{ en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

Utilizando los mismos razonamientos que hicimos para sucesiones, si $a \in \mathbb{R}$ o $a = \pm\infty$, se cumple:

- a) Si f es **equivalente** a g en a , ambas funciones tienen el **mismo límite** en a .
Si f y g tienen en a el mismo límite, finito y no nulo, son equivalentes en a .
- b) Si f y g son **infinitésimos** equivalentes en a , $f - g$ es un infinitésimo de **orden superior** a ambos en a .
Si son **infinitos** equivalentes en a , $f - g$ es **despreciable** frente a ambos en a .
- c) Si f es un infinito o un infinitésimo en a , es **equivalente a su parte principal** en a .

4.4.2. Sustitución por funciones equivalentes

Producto y cociente Se demuestra que *al sustituir en productos (cocientes) una función por otra equivalente, resulta una expresión equivalente a la primera*, siempre que exista el límite del producto (cociente) de las funciones equivalentes a las iniciales.

Es decir, si $f_1 \sim f_2$ y $g_1 \sim g_2$ en a , se cumple:

$$\boxed{f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2 \text{ en } a} \quad \left(\text{si } \exists \lim_{x \rightarrow a} f_2 \cdot g_2 \right)$$

$$\boxed{f_1/g_1 \sim f_2/g_2 \text{ en } a} \quad \left(\text{si } \exists \lim_{x \rightarrow a} f_2/g_2 \right)$$

Logaritmo Se demuestra que *al sustituir en un logaritmo su argumento por una función equivalente, resulta una expresión equivalente a la primera*, siempre que la función no tenga límite 1 en a .

Es decir, si la función f_1 toma sólo valores positivos en un entorno de a y su límite en a es $\varphi \geq 0$, $\varphi \neq 1$ (φ puede ser $+\infty$), se cumple:

$$\boxed{f_1 \sim f_2 \text{ en } a \implies \ln f_1 \sim \ln f_2 \text{ en } a}$$

Potencial-exponencial Dados $f_1 \sim f_2$ y $g_1 \sim g_2$ en a , en general **no** existe equivalencia entre $(f_1)^{g_1}$ y $(f_2)^{g_2}$:

$$(f_1)^{g_1} \not\sim (f_2)^{g_2}$$

Por ejemplo, si $x \rightarrow \infty$, entonces $x + 1 \sim x$. Sin embargo $e^{x+1} \not\sim e^x$, pues su cociente tiene límite $e \neq 1$.

Estas indeterminaciones se resuelven generalmente haciendo:

$$\boxed{f^g = e^{g \ln f}} \quad (\text{si } f > 0)$$

Suma o diferencia Como ocurría en Sucesiones (3.8.4), al calcular el límite de una suma (diferencia) de funciones no se debe, en general, sustituirlas por otras equivalentes, pues podemos obtener resultados erróneos. En estos casos aplicamos lo que sigue.

Regla práctica. “Sea un límite en que aparece un factor o divisor formado por sumas y/o diferencias de infinitésimos. Sea m el menor de sus órdenes. Si al sustituir los infinitésimos por sus partes principales resulta un infinitésimo de orden m , la sustitución es correcta y el límite no varía” (“Cálculo Infinitesimal”, F. Granero, p. 153).

Para infinitos se enuncia igual, cambiando *menor* de sus órdenes por *mayor* de sus órdenes.

Esto significa que, en el caso de sumas y diferencias de infinitésimos o infinitos, podemos usar equivalencias siempre que no desaparezcan las partes principales.

Ejemplo. En el siguiente límite se conserva el orden $m = 2$ en el numerador, tras sustituir por las partes principales, por lo que la sustitución es válida.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(1 + x^2) - 2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x^2}{x^2} = 1$$

TABLA DE EQUIVALENCIAS (FUNCIONES)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \theta(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1; \quad f_1(x) \sim f_2(x); \quad g_1(x) \sim g_2(x)$$

$$\text{Estas equivalencias se dan en } x_0 \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_0 = \pm\infty \end{cases} \quad ; \quad f_1(x) \sim f_2(x) \text{ en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$$

A. EQUIVALENCIAS GENERALES

$$\begin{array}{lll} 1. & f_1(x) \cdot g_1(x) & \sim f_2(x) \cdot g_2(x) \quad \left(\text{Si } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(x)g_2(x) \right) \\ 2. & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} & \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad \left(\text{Si } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \right) \\ 3. & \log_p(f_1(x)) & \sim \log_p(f_2(x)) \quad \left(\text{Si } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(x) \neq 1 \right) \end{array}$$

B. A PARTIR DEL NÚMERO e

$$\begin{array}{lll} 1. & \ln(1 + \theta(x)) & \sim \theta(x) \\ 2. & \ln u(x) & \sim u(x) - 1 \\ 3. & e^{\theta(x)} - 1 & \sim \theta(x) \end{array}$$

Nota: Para logaritmos en base p , se utiliza la relación: $\log_p x = \frac{\ln x}{\ln p}$

C. EXPRESIONES POLINÓMICAS

$$\begin{array}{lll} 1. & a_0 + a_1\alpha(x) + \dots + a_p\alpha^p(x) & \sim a_p\alpha^p(x) \\ 2. & \ln(a_0 + a_1\alpha(x) + \dots + a_p\alpha^p(x)) & \sim p \ln \alpha(x) \end{array}$$

D. RAÍCES

$$1. \quad \sqrt[p]{1 + \theta(x)} - 1 \sim \frac{\theta(x)}{p}$$

E. TRIGONOMÉTRICAS

$$\begin{array}{lll} 1. & \theta(x) & \sim \sin \theta(x) \quad \sim \tan \theta(x) \\ 2. & 1 - \cos \theta(x) & \sim \frac{1}{2}\theta(x)^2 \end{array}$$

F. CAMBIO DEL TIPO DE INDETERMINACIÓN

$$\begin{array}{lll} 1. & f(x)^{g(x)} & = e^{g(x) \ln f(x)} \quad [\text{para } 1^\infty, 0^0, \infty^0] \\ 2. & \alpha_p(x) - \alpha_q(x) & = \alpha_p(x) \left(1 - \frac{\alpha_q(x)}{\alpha_p(x)} \right) \quad \left[\infty - \infty \rightarrow \infty \left(1 - \frac{\infty}{\infty} \right) \right] \\ 3. & \alpha_p(x) - \alpha_q(x) & = \frac{\frac{1}{\alpha_p(x)} - \frac{1}{\alpha_q(x)}}{\frac{1}{\alpha_p(x)\alpha_q(x)}} \quad \left[\infty - \infty \rightarrow \frac{0}{0} \right] \end{array}$$

4.5. Continuidad de funciones

4.5.1. Función continua

Definición. Sea $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, definida en un entorno de a , U_a . Decimos que f es continua en a si se cumple:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon}$$

Al estar f definida en U_a , podemos tomar valores de x tan próximos a a como queramos y calcular el límite. Entonces, la definición anterior equivale a la siguiente:

$$\boxed{f \text{ es continua en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)}$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Definimos así la función pues la expresión fuera del origen no es válida en $x = 0$. Estudiando el límite cuando $x \rightarrow 0$, observamos que el primer factor tiende a 0 y el segundo está acotado, luego el límite es nulo y la función es continua en el origen.

Ejercicio. Estudia la continuidad en el origen de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

4.5.2. Continuidad lateral

Definición. Si f está definida al menos en un semientorno de a , es decir en $[a, a + \delta)$ o $(a - \delta, a]$, diremos que:

- f es continua en a^+ (a por la derecha) si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- f es continua en a^- (a por la izquierda) si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Si f está definida en un entorno de a , U_a , se cumple: f es continua en a si y sólo si lo es por la derecha y por la izquierda.

Continuidad en un intervalo. Decimos que f es continua en $I = (a, b)$, si lo es $\forall x \in I$.

Si el intervalo es cerrado, $I = [a, b]$, f es continua en I si lo es en (a, b) , en a^+ y en b^- .

Ejemplo. Estudiamos la continuidad en el origen de $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = e^0 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Como $f(0) = 1$, f es continua en 0^- y discontinua en 0^+ .

Ejercicios.

1. Estudia el valor de la función $f(x) = e^{1/x}$ cuando $x \rightarrow 0^-$. Dibújala aproximadamente.
2. Estudia la continuidad en el origen de $f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 0 \\ |1+x|, & x \geq 0 \end{cases}$

4.5.3. Discontinuidades

Si f no es continua en un punto a , decimos que existe una discontinuidad en ese punto. Distinguimos los siguientes tipos:

a. Discontinuidad evitable.

Se da cuando existe límite de f en a , pero no coincide con $f(a)$ (porque no existe $f(a)$ o porque ambos valores existen y son distintos).

$$\boxed{\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)}$$

Para evitar esta discontinuidad, podemos asignar a f en a el valor del límite.

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Ejemplo. Si $f(x) = \frac{1-x^2}{2+2x}$, no existe $f(-1)$. Calculamos el límite en ese punto:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)(1+x)}{2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)}{2} = 1$$

Dando a f en $x = -1$ el valor 1, la función es continua en ese punto.

b. Discontinuidad no evitable.

Se da cuando no existe límite finito en a . La llamamos:

1. De primera especie (o de salto finito): cuando existen límites laterales distintos. Por ejemplo, la función parte entera en los puntos de abscisa entera o la función signo en el origen.
2. De segunda especie: cuando alguno de los límites laterales no existe o es infinito. Por ejemplo, las funciones $f(x) = \sin 1/x$, $g(x) = 1/x^2$ en el origen.

Ejercicios. Estudia la continuidad de las funciones siguientes en los puntos que se indican, definiendo el valor $f(a)$ en el caso de que la discontinuidad sea evitable.

1. $f(x) = \frac{\sin(x+2)}{2x+4}$, $a = -2$.

2. $g(x) = \frac{E(x)}{x}$, $a = 2$, donde $E(x)$ es la función parte entera de x .

3. $h(x) = \frac{1}{x-1}$, $a = 1$.

4. $r(x) = e^{-1/x^2}$, $a = 0$.

4.5.4. Operaciones con funciones continuas

Sean $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continuas en I . A partir de las operaciones con límites, se demuestra la continuidad en I de:

1. $\lambda f + \mu g, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. $f \cdot g$
3. $1/g$, excepto en los puntos donde g se anula.

Como consecuencia de lo anterior, es continua la función polinómica $f(x) = P_k(x)$, así como el cociente $g(x) = \frac{P_k(x)}{Q_l(x)}$, salvo en los puntos en que se anula $Q_l(x)$.

4.5.5. Continuidad de las funciones elementales

A partir de la definición de las funciones elementales y de las operaciones con límites, se demuestra la continuidad en I de las siguientes funciones, en sus correspondientes intervalos:

1. $x^a, a \in \mathbb{R}$ en $(0, \infty)$ (para ciertos valores de a , el dominio puede ser mayor).
2. $b^x, b > 0$ en $\mathbb{R}$.
3. $\log_c x, c > 0, c \neq 1$ en $(0, \infty)$.
4. x^x en $(0, \infty)$.
5. $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ en $\mathbb{R}$.
6. $\sin x, \cos x$ en $\mathbb{R}$.
7. $\tan x$ en $\mathbb{R} \setminus \left\{ (2k-1) \frac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

4.5.6. Composición de funciones continuas

Sean las funciones f , continua en I y g , continua en J , tales que $f(I) \subset J$. En estas condiciones, se demuestra que “la función compuesta $g \circ f$ es continua en I ”.

Ejemplo. Sean $f(x) = \frac{1}{x}$, continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $g(x) = e^x$, continua en $\mathbb{R}$. Componiéndolas de las dos maneras posibles, obtenemos:

- La función $(g \circ f)(x) = e^y|_{y=\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- La función $(f \circ g)(x) = \frac{1}{y}|_{y=e^x} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Nota. Obsérvese que el dominio de la función compuesta $g \circ f$ es la parte del dominio de f que cumple que los valores $f(x)$ forman parte del dominio de g .

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$$

Aplicando la composición de funciones continuas a las funciones elementales vistas en el apartado anterior, podemos asegurar la continuidad, en los intervalos correspondientes, de funciones como $\ln x, \arctan \sqrt{x}, e^{\cosh x}$, etc.

Ejercicios.

1. Sean $f(x) = \sqrt{x}$, continua en $[0, \infty)$ y $g(x) = \sin x$, continua en $\mathbb{R}$. Halla las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$. Comprueba que:
 - La función $g \circ f$ es continua en $[0, \infty)$.
 - La función $f \circ g$ es continua en $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$.
2. Sean $f(x) = |x|$, continua en $\mathbb{R}$ y $g(x) = \ln x$, continua en $(0, \infty)$. Halla las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$. Comprueba que:
 - La función $g \circ f$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - La función $f \circ g$ es continua en $(0, \infty)$.

4.6. Teoremas de las funciones continuas

4.6.1. Teorema de Bolzano (o de los ceros)

Si una función continua en $[a, b]$ tiene distinto signo en los extremos del intervalo, se anula en algún punto intermedio.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua en $[a, b]$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Se cumple:

$$\boxed{\exists c \in (a, b) / f(c) = 0}$$

Demostración. Dividimos $[a, b]$ por la mitad. Si f es nula en el punto medio, ya está demostrado el teorema. De lo contrario, elegimos el semiintervalo $[a_1, b_1]$ en cuyos extremos f tiene distinto signo. Dividimos ahora $[a_1, b_1]$ por la mitad, eligiendo de nuevo el semiintervalo $[a_2, b_2]$ en cuyos extremos f tiene distinto signo.

Repetiendo la operación una y otra vez, obtenemos una sucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n]$, de longitud $(b-a)/2^n$ (apdo. 3.3.3). Cuando $n \rightarrow \infty$, esta sucesión define un punto c , en el que f ha de ser nula. En efecto, si f no es nula en c , al ser continua se cumplirá:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \neq 0$$

con lo que existirá un entorno de c en el que f toma el signo del límite (prop. 3 de los límites). Pero, por el modo como hemos hallado c , en todo entorno suyo existen puntos en que $f > 0$ y puntos en que $f < 0$. Luego, por reducción al absurdo, $f(c) = 0$.

4.6.2. Propiedad de Darboux (del valor intermedio)

Si una función continua en $[a, b]$ tiene distinto valor en los extremos del intervalo, toma todos los valores intermedios al menos una vez.

Supongamos $f(a) < f(b)$ (para $f(a) > f(b)$ se demuestra análogamente). Se cumple:

$$\boxed{\forall y / f(a) < y < f(b), \exists c \in (a, b) / f(c) = y}$$

Demostración. Definimos la función $g(x) = f(x) - y$. Se cumple:

$$g(a) = f(a) - y < 0; \quad g(b) = f(b) - y > 0$$

Al tener g distinto signo en a y en b , existe un punto intermedio en el que se anula. Entonces:

$$\exists c \in (a, b) / g(c) = f(c) - y = 0 \implies f(c) = y$$

luego en ese punto la función f toma el valor y .

4.6.3. Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza en él un máximo y un mínimo.

Demostración. La realizamos en dos partes:

- a) **La función está acotada en $[a, b]$** (por reducción al absurdo). Suponemos que no lo está y dividimos $[a, b]$ por la mitad, eligiendo el semiintervalo $[a_1, b_1]$ en que f no está acotada (al menos no estará acotada en uno de ellos). Dividimos $[a_1, b_1]$ por la mitad, eligiendo de nuevo el semiintervalo $[a_2, b_2]$ en que f no está acotada.

Repitiendo la operación una y otra vez, obtenemos una sucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n]$, de longitud $(b - a)/2^n$. Cuando $n \rightarrow \infty$, esta sucesión define un punto c , tal que f no está acotada en ningún entorno suyo.

Pero, al ser f continua, ha de tener límite en c , luego ha de estar acotada en un entorno de dicho punto (prop. 2 de los límites), con lo que hemos llegado a una contradicción.

- b) Al estar f acotada en $I = [a, b]$, el conjunto $f(I)$ tiene supremo M e ínfimo m (propiedad del supremo). Pero estos valores son alcanzados por f , por lo que **tiene máximo y mínimo** (lo vemos por reducción al absurdo para M):

Si f no alcanza el valor M , la diferencia $f(x) - M$ no se anula y la función

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

es continua en I , luego está acotada como acabamos de ver. Entonces $\exists k > 0$ tal que, $\forall x \in I$,

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq k \implies \frac{1}{k} \leq M - f(x) \implies f(x) \leq M - \frac{1}{k}$$

Por lo tanto $M - 1/k$ (valor menor que M) es cota superior de f , luego M no es el supremo, contra la hipótesis.

4.6.4. Imagen de un intervalo cerrado

Una función continua transforma un intervalo cerrado en un intervalo cerrado.

Demostración. Por el teorema de Weierstrass, toda f , continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, alcanza en él un máximo M y un mínimo m .

Además, por la propiedad de Darboux, f alcanzará todos los valores comprendidos entre m y M . De este modo, el intervalo $[a, b]$ se transforma, por medio de f , en el intervalo cerrado $[m, M]$.

Si, además, la función es monótona, $[a, b]$ se transformará en $[f(a), f(b)]$ (si f es creciente) o en $[f(b), f(a)]$ (si es decreciente).

4.6.5. Imagen de un intervalo

Una función continua transforma un intervalo en un intervalo (J. Burgos, p. 152).

Se demuestra que una función continua f transforma un intervalo I en otro $f(I)$. Éste tomará una las cuatro formas siguientes:

$$(\alpha, \beta), [\alpha, \beta], [\alpha, \beta), (\alpha, \beta]$$

donde α y β son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de la función f en I ; es decir el ínfimo y el supremo del conjunto $f(I)$:

$$\alpha = \inf f(I), \quad \beta = \sup f(I)$$

4.7. Continuidad uniforme

4.7.1. Definición

Vimos (apdo. 4.5.2) que f es continua en I si lo es en todos sus puntos (si I contiene a sus extremos, en ellos la continuidad es lateral). Para obtener la condición de continuidad en I , usamos la condición de continuidad en un punto a , escribiendo x en lugar de a . Y en lugar del punto x (“suficientemente próximo” al a) usamos un $x' \in I$. Así, la condición de continuidad en I será:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x' - x| < \delta \implies |f(x') - f(x)| < \varepsilon \quad (x' \in I)}$$

Este valor δ depende en general de ε y también del punto x del intervalo, es decir:

$$\delta = \delta(\varepsilon, x)$$

Cuando podemos expresar la condición de continuidad prescindiendo del punto x , de modo que el valor de δ depende sólo de ε decimos que la **continuidad** es **uniforme**. Entonces:

$$f \text{ uniformemente cont. en } I \iff \boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon}$$

Es decir, la continuidad es uniforme si la diferencia entre los valores de f en dos puntos puede hacerse tan pequeña como queramos, variando únicamente la distancia entre dichos puntos, independientemente de la posición de los mismos en el intervalo.

Ejemplo 1. Sea la función $y = ax + b$, $a > 0$. Calculamos la diferencia entre dos valores de la función y buscamos el valor de δ que asegure que esa diferencia sea menor que ε :

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |ax_1 + b - (ax_2 + b)| = a|x_1 - x_2| < \varepsilon \iff |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{a}$$

En este caso, si la distancia entre dos valores de la variable es menor que ε/a , la diferencia entre los correspondientes valores de f será menor que ε . Entonces, elegido un valor para ε , podremos calcular el δ necesario dividiendo ε entre a , con lo que nos hemos independizado de x y la continuidad será uniforme.

El ejemplo sugiere que si, a partir de $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, obtenemos una relación

$$|x_1 - x_2| < h(\varepsilon)$$

donde $h(\varepsilon)$ pueda hacerse independiente del punto x , podremos asegurar que la continuidad es uniforme tomando $\delta = h(\varepsilon)$. Esto es inmediato en el caso que acabamos de ver de una función cuya gráfica es una recta y la relación entre ε y δ es constante.

Ejemplo 2 . Estudiamos la función $y = 1/x$, continua (y no acotada) en $(0, \infty)$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1| |x_2|} < \varepsilon \iff |x_1 - x_2| < \varepsilon |x_1| |x_2|$$

El producto $\varepsilon |x_1| |x_2|$, puede hacerse tan próximo a 0 como queramos tomando x_1, x_2 más y más pequeños. Eso hace que no podamos encontrar un valor $\delta > 0$ que permita asegurar que

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

por lo que la función no es uniformemente continua en $(0, \infty)$.

Los dos teoremas que enunciamos a continuación permiten justificar, de modo sencillo, que determinadas funciones son uniformemente continuas.

4.7.2. Teorema de Heine

Toda función f , continua en un intervalo cerrado I , es uniformemente continua en I .

Ejemplo 1. Como vimos en el apartado anterior, la función $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua en $(0, \infty)$. Sin embargo, si consideramos un intervalo cerrado $[a, b]$, $a, b > 0$, resulta que existe un valor mínimo a de la variable x en el intervalo, de modo que la expresión $\varepsilon |x_1| |x_2|$ está acotada inferiormente:

$$\varepsilon |x_1| |x_2| \geq \varepsilon a a = \varepsilon a^2$$

Tomamos esta cota inferior para δ . Entonces, si $|x_1 - x_2| < \delta$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1| |x_2|} < \frac{\varepsilon a^2}{|x_1| |x_2|} = \varepsilon \frac{a}{|x_1|} \frac{a}{|x_2|} \leq \varepsilon$$

con lo que se cumple la condición de continuidad, con δ dependiendo sólo de ε , luego existe continuidad uniforme.

Ejemplo 2. Como consecuencia del teorema, la función $y = \sqrt{x}$, continua en $[0, \infty)$, es uniformemente continua en cualquier intervalo $[0, k]$ (a pesar de tener tangente vertical en el origen).

4.7.3. Composición de funciones uniformemente continuas

Sean las funciones f y g , tales que:

$$f : I \rightarrow J; \quad g : U \rightarrow V, \quad \text{siendo } f(I) \subset U$$

Si f y g son uniformemente continuas en su dominio, la función compuesta $g \circ f$ es uniformemente continua en I .

4.8. Derivabilidad y diferenciabilidad

Gracias al concepto de derivada de una función podemos obtener la ecuación de la tangente a una curva, calcular la velocidad de un móvil o hallar los extremos de una función. A partir de las derivadas sucesivas de una función obtendremos su desarrollo de Taylor, lo que nos permitirá aproximar el valor de la función en los alrededores de un punto.

Por su parte, la diferencial de una función se utilizará en este curso –entre otros ejemplos– en la obtención de primitivas y en las distintas aplicaciones de la integración definida: obtención de áreas planas y de revolución, volúmenes y longitudes de curvas.

4.8.1. Función derivable

a. Definición.

Sea $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Decimos que f es derivable en $a \in I$ si y sólo si existe y es finito el siguiente límite, que llamamos derivada de f en a :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)} \quad (4.1)$$

En caso contrario, decimos que f no es derivable en a .

Forma alternativa. Haciendo $x - a = h \implies x = a + h$, el límite de la condición de derivada toma la forma:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Ejemplo. La derivada de $f(x) = x^3$ en $a = 1$ es:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

Ejercicio. Obtén la derivada de $f(x) = x^3$, en $a = 1$, utilizando la forma alternativa.

b. Derivadas laterales.

Si en la condición de derivada (4.1) existe el límite lateral en a^+ o en a^- , se le llama derivada en a por la derecha o por la izquierda respectivamente, $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$.

Se cumple que f es derivable en a si y sólo si sus derivadas laterales existen y coinciden en a .

c. Límite infinito.

Si el límite (4.1) es $\pm\infty$ y la función es continua en a , decimos que f tiene **tangente vertical** en a . Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = +\infty$$

d. Punto anguloso.

Si existen $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$ y son distintos, se trata de un punto anguloso. Por ejemplo, $f(x) = |x|$ tiene uno en el origen. En efecto:

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1; \quad f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

e. Función derivada.

Si existe $f'(x) \forall x \in I$, decimos que f es derivable en el intervalo I . En este caso $f'(x)$ es la función derivada. Si se trata de un intervalo $I = [a, b]$, f es derivable en I si lo es en (a, b) , en a^+ y en b^- . Para obtener la derivada en un punto x genérico, utilizamos la segunda forma de obtención, usando x y $x+h$ en lugar de a y $a+h$. Por ejemplo, para derivar $f(x) = x^2$, hacemos lo siguiente:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

Ejercicio. Obtén por el mismo método la derivada de $f(x) = \sin x$.

4.8.2. Función diferenciable

Condición de diferenciabilidad Al estudiar una función en las proximidades de un punto a , analizamos el incremento de su valor entre los puntos a y $a + \Delta x$, cuando Δx es muy pequeño. En muchas funciones este incremento es “casi” proporcional a Δx , es decir:

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \approx c \Delta x$$

siendo $c \in \mathbb{R}$. En estos casos, la gráfica de f se aproxima bien por una recta en un entorno de a .

Expresando más formalmente lo anterior, decimos que $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ es **diferenciable en** $a \in I$ **si y sólo si**:

$$\Delta f = c \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \Delta x, \quad c \in \mathbb{R} \quad \left(\text{siendo } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0 \right) \quad (4.2)$$

En la condición anterior, $\varepsilon(\Delta x)$ representa una expresión que tiende a 0 cuando lo hace Δx , por lo que el segundo sumando de Δf tiende a 0 más rápidamente que el primero.

Entonces, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $\varepsilon(\Delta x)\Delta x$ es despreciable frente a $c \Delta x$, lo que hace que el incremento de la función venga expresado con mucha aproximación por el valor de $c \Delta x$. (La expresión $\varepsilon(\Delta x)$ puede ser, por ejemplo, $(\Delta x)^{1/2}$, $(\Delta x)^2$, etc.)

Escribiendo Δx como $x - a$ en (4.2), la condición de diferenciabilidad de f en a pasa a ser:

$$\boxed{f(x) - f(a) = c(x - a) + \varepsilon(x - a)(x - a)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x - a) = 0 \right) \quad (4.3)$$

Si f es diferenciable en a , llamamos **diferencial de f en a** al **producto** $c(x - a)$.

4.8.3. Relación entre ambos conceptos

Una función es diferenciable en un punto si y sólo si es derivable en dicho punto.

Demostración. La haremos sólo de izquierda a derecha. Veremos que, si f es diferenciable, es derivable y obtendremos el valor del coeficiente c . En efecto, si f es diferenciable,

$$f(x) - f(a) = [c + \varepsilon(x - a)](x - a) \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (c + \varepsilon(x - a)) = c$$

con lo que c es la derivada $f'(a)$ y la **diferencial de f en a** se convierte en:

$$\boxed{df(a) = f'(a)(x - a)}$$

La **condición de diferenciabilidad** (4.3) toma entonces la forma que usaremos habitualmente:

$$\boxed{f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \varepsilon(x - a)(x - a)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x - a) = 0 \right) \quad (4.4)$$

Observamos que el primer sumando de la derecha es la diferencial de f en a , proporcional a $(x - a)$, por lo que es un infinitésimo de $(x - a)$. El segundo es el producto de $(x - a)$ por otro factor que también tiende a 0 con $(x - a)$, por lo que es un infinitésimo de mayor orden que $(x - a)$. Esto último se denota:

$$\varepsilon(x - a)(x - a) = o(x - a)$$

Y la condición de diferenciabilidad se expresa como:

$$\boxed{\Delta f = df(a) + o(x - a)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(x - a)}{x - a} = 0 \right) \quad (4.5)$$

Diferencial de la variable. A partir de lo anterior, calculamos la diferencial de x , es decir la diferencial de la función $f(x) = x$.

$$dx = df|_{f(x)=x} \implies dx = x'(x - a) = x - a$$

que nos dice que **la diferencial de la variable es el incremento de la misma**.

Sustituyendo lo anterior en la expresión de la diferencial, queda:

$$\boxed{df(a) = f'(a) dx} \implies \boxed{f'(a) = \frac{df(a)}{dx}}$$

lo que nos permite expresar la derivada de f como cociente de diferenciales.

4.8.4. Interpretación gráfica

Como acabamos de ver, el incremento de la función entre a y x se descompone en dos sumandos, $\Delta f = df(a) + o(x-a)$, lo que interpretamos gráficamente en la siguiente figura.

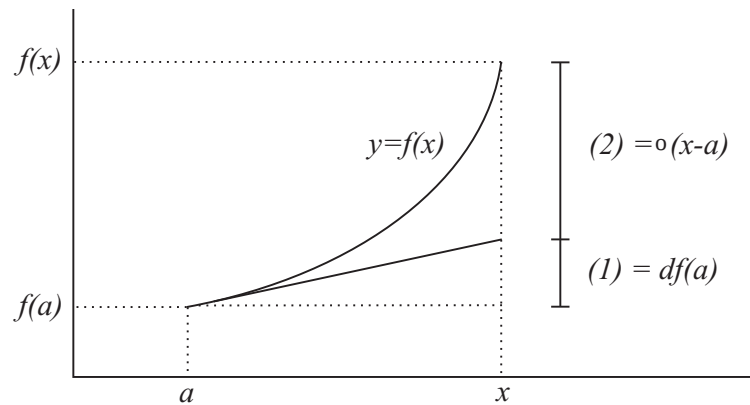


Figura 4.3: Interpretación gráfica de la diferencial.

Sabemos que $f'(a)$ es el valor de la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$. Dicha recta pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$, por lo que su ecuación es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Entonces, el producto de $f'(a)$ por $(x - a)$, es decir $df(a)$, es la longitud del segmento (1), por lo que la longitud de (2), de valor $\Delta f - df(a)$, representa el sumando $o(x-a)$. Como se aprecia en la figura, este término puede tener mucha más importancia que $df(a)$ cuando estamos a cierta distancia de a ; pero, al acercarnos al punto, se va haciendo despreciable respecto a $df(a)$.

Es decir, el Δf y la df tienden a confundirse cuando $x \rightarrow a$, mientras que su diferencia $o(x-a)$ es un infinitésimo de orden superior, despreciable frente a ambos.

Geométricamente, la diferencial de f es el incremento de la ordenada de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, cuando la variable se incrementa un valor $x - a$.

Lo anterior hace que el comportamiento de la curva en las proximidades del punto esté bien descrito por la recta tangente, como se afirmaba en el apdo. 4.8.2.

4.8.5. Relación entre continuidad y diferenciabilidad

“Toda función diferenciable en un punto es continua en dicho punto”. En efecto, si f es diferenciable en a , por la condición de diferenciabilidad (4.4) resulta:

$$f(x) = f(a) + [f'(a) + \varepsilon(x-a)](x-a) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

luego f es continua en a . La recíproca no es cierta. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es diferenciable en el origen.

4.8.6. Operaciones con funciones diferenciables

Las derivadas de suma, producto y cociente de funciones derivables se suponen conocidas. A partir de ellas, se comprueba que la diferenciación sigue las mismas reglas.

$$a) \quad d(f + g) = (f + g)' dx = (f' + g') dx = f' dx + g' dx = df + dg$$

$$b) \quad d(f \cdot g) = (f \cdot g)' dx = (f'g + fg') dx = f'g dx + fg' dx = g df + f dg$$

Ejercicio. Obtén la diferencial del cociente f/g .

4.9. Regla de la cadena. Aplicaciones

4.9.1. Derivada de la función compuesta

Sean $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, tales que $f(I) \subset J$. Se cumple que: Si f es derivable en $a \in I$ y g es derivable en $b = f(a) \in J$, entonces la función compuesta $\phi(x) = g(f(x))$ es derivable en a . Su derivada vale:

$$\boxed{\phi'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)} \quad \text{o también} \quad \boxed{\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{dg}{dy} \right|_{y=f(a)} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}}$$

Demostración. Partimos de las condiciones de diferenciabilidad de f y g en $x = a$ e $y = b$ respectivamente:

$$f(x) - f(a) = [f'(a) + \varepsilon_f(x-a)](x-a), \quad \text{siendo } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_f = 0 \quad (4.6)$$

$$g(y) - g(b) = [g'(b) + \varepsilon_g(y-b)](y-b), \quad \text{siendo } \lim_{y \rightarrow b} \varepsilon_g = 0 \quad (4.7)$$

En la condición (4.7) aparecen $g(y)$, $g(b)$ y el factor $(y-b)$. Hacemos $y = f(x)$ y $b = f(a)$, obteniendo:

$$g(f(x)) - g(f(a)) = [g'(f(a)) + \varepsilon_g(f(x) - f(a))](f(x) - f(a)) \quad (4.8)$$

Tomamos el valor de $f(x) - f(a)$ de la condición (4.6) y lo sustituimos en la (4.8), quedando un producto de corchetes, en los que omitimos las dependencias de ε_f y ε_g . Operando,

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) &= [g'(f(a)) + \varepsilon_g][f'(a) + \varepsilon_f](x-a) = \\ &= [g'(f(a)) \cdot f'(a) + g'(f(a)) \cdot \varepsilon_f + \varepsilon_g \cdot f'(a) + \varepsilon_g \cdot \varepsilon_f](x-a) \end{aligned}$$

Cuando $x \rightarrow a$, $f(x) \rightarrow f(a)$ por continuidad, por lo que, tanto ε_f como ε_g , tienden a 0. Entonces los sumandos 2º, 3º y 4º del corchete son expresiones del tipo $\varepsilon(x-a)$, que agrupamos. Resulta:

$$g(f(x)) - g(f(a)) = [g'(f(a)) \cdot f'(a) + \varepsilon(x-a)](x-a), \quad \text{siendo } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0$$

El primer sumando del corchete constituye la derivada de la función compuesta, formada por el producto de las derivadas de g con respecto a y , en $y = f(a)$, y de f con respecto a x en a . Así pues, hemos llegado a la condición de diferenciabilidad de la función compuesta en a . Escribiendo $g(f(x))$ como $\phi(x)$, llegamos a:

$$\phi(x) - \phi(a) = \left[\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=a} + \varepsilon(x-a) \right] (x-a),$$

siendo:

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{dg}{dy} \right|_{y=f(a)} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$$

Si lo anterior se cumple $\forall x \in I$, la función compuesta $\phi(x) = g(f(x))$ es diferenciable en x , $\forall x \in I$, siendo su función derivada:

$$\boxed{\frac{d\phi}{dx} = \left. \frac{dg}{dy} \right|_{y=f(x)} \frac{df}{dx}}$$

lo que se conoce como **regla de la cadena**.

4.9.2. Aplicaciones de la regla de la cadena

Las funciones elementales principales son derivables en su dominio. Suponemos conocidas las derivadas de las funciones logaritmo, potencia y exponencial de x , así como el seno, el coseno y la tangente, tanto trigonométricos como hiperbólicos. A partir de ellas vamos a obtener las derivadas de algunas funciones compuestas.

a) $\phi(x) = \ln u(x)$. Sabiendo que $(\ln x)' = 1/x$,

$$\phi' = \frac{1}{u} u' \implies \boxed{\left(\ln u(x)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

b) $\phi(x) = u^m(x)$. Sabiendo que $(x^m)' = m x^{m-1}$,

$$\phi' = m u^{m-1} u' \implies \boxed{\left(u^m(x)\right)' = m \left(u(x)\right)^{m-1} u'(x)}$$

c) $\phi(x) = a^{u(x)}$, $a > 0$. Sabiendo que $(a^x)' = a^x \ln a$,

$$\phi' = a^u \ln a u' \implies \boxed{\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \ln a u'(x)}$$

d) $\phi(x) = \left(u(x)\right)^{v(x)}$. Tomando logaritmos, $\ln \phi(x) = v(x) \ln u(x)$. Derivando,

$$\frac{\phi'}{\phi} = v' \ln u + v \frac{u'}{u} \implies \phi' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = u^v \ln u v' + v u^{v-1} u'$$

expresión que podemos interpretar como la suma de dos derivadas de u^v : en la primera se considera constante a u y en la segunda a v .

Ejemplos.

1. $(x^x)' = x x^{x-1} + x^x \ln x = x^x (1 + \ln x)$.

2. $(\sin \sqrt{\ln \cos x})' = \cos \sqrt{\ln \cos x} \frac{1}{2\sqrt{\ln \cos x}} \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = -\frac{1}{2} \frac{\cos \sqrt{\ln \cos x} \tan x}{\sqrt{\ln \cos x}}$.

Ejercicios. Obtén las derivadas de $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ y $g(x) = \arctan \left(\tan^3 \frac{1}{x} \right)$.

4.10. La función inversa

4.10.1. Existencia de la función inversa

Teorema. Si f es continua y biyectiva, entonces existe su función inversa f^{-1} y es también continua y biyectiva.

Ejemplo. La función $f(x) = x^2$, continua en $\mathbb{R}$, es biyectiva en $[0, k]$, $k \in \mathbb{R}$, luego tiene función inversa. Para obtenerla, despejamos x en función de y :

$$y = f(x) = x^2 \implies x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Luego la inversa de la función “cuadrado” es la función “raíz cuadrada”, que expresamos en la forma habitual, usando como variable la x :

$$f(x) = x^2 \implies f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Es decir, para calcular la función inversa de una dada $y = f(x)$, despejamos x en función de y y, a continuación, permutamos x e y en la fórmula obtenida.

4.10.2. Derivada de la función inversa

Sea f^{-1} la función inversa de f en un intervalo I . Veremos que, si f tiene en I derivada $f' \neq 0$, entonces f^{-1} tiene también derivada en I y se cumple que *la derivada de f^{-1} es el inverso de la derivada de f* .

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)|_{y=f^{-1}(x)}}$$

Demostración. Sea una función f , de inversa f^{-1} , cuya derivada queremos obtener. Para ello, 1) despejamos x en función de y ; 2) derivamos en ambos lados respecto a x , aplicando la regla de la cadena; 3) despejamos $y'(x)$, es decir $(f^{-1}(x))'$, escribiendo y en función de x en $f'(y)$:

$$y = f^{-1}(x) \implies x = f(y) \xRightarrow{'} 1 = f'(y) y'(x) \implies y'(x) = \frac{1}{f'(y)|_{y=f^{-1}(x)}}$$

Ejemplo. A partir de $f(x) = \sin x$, definimos su función inversa, despejamos x y derivamos:

$$y = f^{-1}(x) = \arcsin x \implies x = f(y) = \sin y \xRightarrow{'} 1 = \cos y y'$$

Despejamos ahora y' y escribimos el resultado en función de x :

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \implies (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ejercicio. Obtén la derivada de la función $\arctan x$.

4.11. Teoremas del valor medio

4.11.1. Teorema de Rolle

Sea $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Si $f(a) = f(b)$, se cumple:

$$\boxed{\exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = 0}$$

Demostración. Por el teorema de Weierstrass sabemos que, al ser f continua en $I = [a, b]$, alcanza en I un máximo y un mínimo, es decir:

$$\begin{aligned} \exists x_M \in [a, b] / M = f(x_M) &\geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \\ \exists x_m \in [a, b] / m = f(x_m) &\leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

Si el máximo y mínimo coinciden, al estar todos los valores de f comprendidos entre ambos, la función f es constante y su derivada nula con lo que se cumple el teorema. En general, M será mayor que m y distinguimos dos casos.

a) El máximo se alcanza en un punto interior de $[a, b]$.

Como f es derivable en (a, b) , calculamos la derivada en x_M^+ . Observamos que el numerador es menor o igual que 0 y el denominador es positivo, luego el cociente es menor o igual que 0, por lo que su límite también lo será:

$$f'(x_M^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \leq 0$$

Calculando la derivada en x_M^- , vemos que el numerador sigue siendo menor o igual que 0, pero ahora el denominador es negativo luego el cociente es mayor o igual que 0 y su límite también lo será:

$$f'(x_M^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \geq 0$$

Como f es derivable en x_M , ambas derivadas deben coincidir, luego:

$$f'(x_M^+) = f'(x_M^-) = 0$$

b) El máximo se alcanza en los extremos.

Como el máximo y el mínimo se alcanzan en distinto punto, el mínimo se alcanzará en el interior. Calculamos las derivadas laterales en x_m , observando que ahora los numeradores son mayores o iguales a 0. Obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(x_m^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_m + h) - f(x_m)}{h} \geq 0 \\ f'(x_m^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_m + h) - f(x_m)}{h} \leq 0 \end{aligned}$$

Ambas derivadas deben coincidir, luego:

$$f'(x_m^+) = f'(x_m^-) = 0$$

Concluimos que al menos un extremo se alcanza en un punto interior; y, en él, $f' = 0$.

Ejercicio. La función $f(x) = 1 - x^{2/3}$ se anula en $x = \pm 1$. Razona si es posible aplicarle el teorema en el intervalo $[-1, 1]$.

4.11.2. Teorema de Cauchy

Sean $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Se cumple:

$$\boxed{\exists \xi \in (a, b) / f'(\xi)[g(b) - g(a)] = g'(\xi)[f(b) - f(a)]}$$

Si además $g(b) \neq g(a)$ y g' y f' no se anulan a la vez, entonces:

$$\boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

Demostración. A partir de f y g definimos la función F , que será también continua y derivable:

$$F(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

Se cumple $F(a) = F(b)$ (compruébese), por lo que F cumple las condiciones del teorema de Rolle. Entonces:

$$\exists \xi \in (a, b) / F'(\xi) = 0 \implies f'(\xi)[g(b) - g(a)] = g'(\xi)[f(b) - f(a)]$$

lo que demuestra la primera expresión del teorema.

Si el factor $g(b) - g(a)$ no se anula, puede pasar al otro lado dividiendo, lo que nos permite asegurar que $g'(\xi) \neq 0$. En efecto, si $g'(\xi)$ fuera nula, $f'(\xi)$ también lo sería y f' y g' se estarían anulando a la vez, contra la hipótesis.

Entonces, pasando $g'(\xi)$ a la izquierda, obtenemos la expresión buscada:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

4.11.3. Teorema de Lagrange o de los incrementos finitos

Sea $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces:

$$\boxed{\exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Si $b - a = h$ entonces, $b = a + h$ y podemos escribir la expresión anterior como:

$$\boxed{f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1}$$

Demostración. Se trata de un caso particular del teorema anterior, haciendo $g(x) = x$.

Interpretación geométrica. El teorema afirma que, si f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , existe un punto c en (a, b) tal que la tangente en c es paralela a la secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

4.11.4. Funciones monótonas derivables

Sea $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, derivable en I . Se cumple:

1. $f'(x) \geq 0, \forall x \in I \iff f$ es monótona creciente en I .
2. $f'(x) \leq 0, \forall x \in I \iff f$ es monótona decreciente en I .
3. $f'(x) > 0, \forall x \in I \implies f$ es estrictamente creciente en I .
4. $f'(x) < 0, \forall x \in I \implies f$ es estrictamente decreciente en I .

Demostración del caso 1.

($\rightarrow$) Dados dos puntos cualesquiera x_1, x_2 de I , aplicamos el T. de Lagrange al intervalo $[x_1, x_2]$:

$$\forall x_1, x_2 \in I / x_1 < x_2 \implies \exists \xi \in (x_1, x_2) / f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, entonces $f'(\xi) \geq 0$ con lo que $f(x_2) \geq f(x_1)$, por lo que la función f es monótona creciente.

($\leftarrow$) Sean dos puntos del intervalo $x, x + h$, con $h > 0$. Al ser f creciente, se cumple:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0 \implies f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

En los casos 3 y 4 no se da la equivalencia ya que la implicación no tiene por qué cumplirse de derecha a izquierda. Aunque el cociente entre Δf y h sea estrictamente mayor o menor que 0, el límite puede ser igual a 0 y, con él, la derivada. Por ejemplo, las funciones $y = \pm x^3$ son estrictamente monótonas, pero su derivada en el origen es 0.

4.11.5. Funciones constantes

Sea $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, derivable en I . Se cumple:

$$\boxed{f'(x) = 0, \forall x \in I \iff f(x) = K, \forall x \in I}$$

Demostración.

($\rightarrow$) De nuevo aplicamos el teorema de Lagrange a dos puntos cualesquiera del intervalo:

$$\forall x_1, x_2 \in I \mid x_1 < x_2 \implies \exists \xi \in (x_1, x_2) \mid f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x) = 0 \forall x \in I$, se cumplirá $f'(\xi) = 0$ por lo que $f(x_2) = f(x_1)$. Luego f es constante.

($\leftarrow$) Si f es constante, su derivada es nula.

Corolario. Si $f' = g'$, entonces $f = g + K$. Es decir, si f y g son primitivas de la misma función, su diferencia es una constante.

Demostración. Sea $\phi = f - g$. Entonces, por la propiedad que acabamos de ver,

$$\phi' = f' - g' = 0 \implies \phi = K \implies f - g = K$$

4.12. La derivada como límite de derivadas

Sea una función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, de la que obtenemos su derivada f' en un punto genérico. Si f' existe $\forall x \in I$, decimos que f es derivable en I y f' es su función derivada.

A continuación veremos que **en el caso de que la función f' no exista en un punto $a \in I$ pero sí su límite cuando $x \rightarrow a$, la función es derivable también en a .**

Para demostrarlo comprobaremos que en a coinciden las derivadas laterales de f con los límites laterales de f' y deduciremos la existencia de la derivada de f en a , si existe límite de la función f' en a . Estudiamos el límite por la derecha (por la izquierda, la demostración es análoga).

Derivada por la derecha. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida en $I = [a, a + \delta)$. Si f es continua en I , derivable en $I \setminus \{a\}$ y tal que $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$, entonces f es derivable en a^+ y se cumple:

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

Demostración. Sea $[a, a + h]$, $0 < h < \delta$. Aplicando a f el teorema de los incrementos finitos,

$$\exists \xi \in (a, a + h) \mid \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(\xi)$$

Lo anterior se cumple $\forall h \mid 0 < h < \delta$. Si $h \rightarrow 0^+$, entonces $a + h \rightarrow a^+$ y el punto intermedio $\xi \rightarrow a^+$. Tomando límites,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{\xi \rightarrow a^+} f'(\xi)$$

Pero si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ existe y vale l , existirá $\lim_{\xi \rightarrow a^+} f'(\xi)$ y valdrá lo mismo, con lo que:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l \implies \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = l \implies f'(a^+) = l$$

Así pues, si existe el límite de f' en a^+ , coincide con la derivada de f en a^+ .

Por otra parte, estudiando el límite de f' en a^- , se comprueba también que -si existe- coincide con la derivada de f en a^- . Luego, si existen los límites laterales de f' , coinciden con las derivadas laterales de f y podemos concluir lo siguiente:

Derivada en a . Si f está definida en un entorno de a y existe el límite de f' en a , existen y coinciden los límites laterales de f' en a^+ y en a^- . Al ser cada uno de ellos igual a la correspondiente derivada lateral, existirán -y coincidirán- los valores $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$, por lo que la función será derivable en a . Es decir:

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = f'(a^-), \implies \boxed{f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)}$$

Este resultado es útil para calcular la derivada de f en un punto a , cuando f se define en a con una expresión distinta a la usada en el resto del intervalo (por ejemplo, porque dicha expresión no tiene sentido en a).

Ejemplo. Halla la derivada en el origen de $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

La derivada para $x \neq 0$ es $f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$, que no está definida en $x = 0$. Sin embargo, puesto que f' tiene límite en ese punto,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

Nota. La existencia de límite de f' es condición suficiente para la existencia de la derivada de f , pero no necesaria. Aunque $f'(x)$ no tenga límite en a , es posible que f sea derivable en a .

Ejercicio. Comprueba, obteniendo $f'(0)$ por la definición, que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

es derivable en el origen, pero su función derivada no tiene límite cuando $x \rightarrow 0$.

4.13. Reglas de L'Hôpital

Los siguientes teoremas permiten resolver algunos límites indeterminados en forma de cociente, del tipo $0/0$ e ∞/∞ . Se demuestran a partir de la fórmula del valor medio de Cauchy. Los enunciaremos para límites laterales en $a, b \in \mathbb{R}$, pero **son válidos también cuando $x \rightarrow \pm\infty$** .

Sean f y g derivables en (a, b) , siendo $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ o bien $\gamma = \pm\infty$.

a) Si f y g se anulan en a y son continuas en a^+ , es decir

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a) = 0,$$

se cumple:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \implies \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma}$$

b) Si f y g se anulan en b y son continuas en b^- , es decir

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = g(b) = 0,$$

se cumple:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \implies \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma}$$

c) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$, se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \implies \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$

d) Si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \pm\infty$, se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \implies \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$

Así pues, en los cuatro casos, si existe el límite del cociente de derivadas, existe el del cociente de funciones y toma el mismo valor.

Nota 1. El teorema se enuncia para límites laterales. En el caso (habitual) de que busquemos el límite en un punto c cualquiera de un intervalo, consideraremos un intervalo a la derecha y otro a la izquierda de c : $(c, c + \delta)$ y $(c - \delta, c)$. Si en c existe el límite del cociente de derivadas, existirán los límites laterales en c^+ y en c^- . Aplicando el teorema en ambos intervalos, resulta:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \implies \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \implies \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \\ \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \implies \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$

Nota 2. El hecho de que no exista el límite del cociente de derivadas no supone que no pueda existir el del cociente de funciones buscado. Asimismo, si el límite del cociente de derivadas sigue siendo indeterminado, puede volverse a aplicar L'Hôpital, si se siguen cumpliendo las condiciones del teorema para el cociente f'/g' (véanse ejemplos en el documento de apoyo 6.4).

Demostración del caso a) (Indeterminación tipo $0/0$, con límite en a^+).

Dado (a, b) , elegimos un $x \in (a, b)$ cualquiera. Se cumple:

1. $g' \neq 0$ en (a, x) pues se cumple en (a, b) por hipótesis.
2. $g(x) \neq g(a)$ pues, si fuera $g(x) = g(a)$, por el teorema de Rolle existiría un $\xi \in (a, x)$ tal que se anularía $g'(\xi)$, lo cual no puede ocurrir por hipótesis.

Entonces, por el teorema de Cauchy, existirá un $\xi \in (a, x)$ tal que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

por ser nulas f y g en a . Es decir, el cociente de funciones en el punto x vale lo mismo que el de derivadas en un punto $\xi \in (a, x)$.

Como la igualdad se verifica $\forall x \in (a, b)$, tomamos límites cuando $x \rightarrow a^+$. Al ser $\xi \in (a, x)$, si $x \rightarrow a^+$, también se cumplirá $\xi \rightarrow a^+$, por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Entonces, si existe límite del cociente de $f'(x)$ y $g'(x)$ ($x \rightarrow a^+$), existirá y valdrá lo mismo el del cociente de $f'(\xi)$ y $g'(\xi)$ ($\xi \rightarrow a^+$), de donde:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \implies \lim_{\xi \rightarrow a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \gamma \implies \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$

Ejemplo. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\operatorname{sen}(x-1)} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{[\operatorname{sen}(x-1)]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{\cos(x-1)} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$

4.14. Derivadas sucesivas

Si una función f es derivable en el intervalo I , podemos calcular la expresión f' de su derivada en un punto genérico. Entonces decimos que f' es la **función derivada primera de f en I** .

Si existe la derivada de la función f' en $a \in I$, se le llama derivada segunda de f en a , $f''(a)$.

Y si esto ocurre en x , $\forall x \in I$, $f''(x)$ será la **función derivada segunda de f en I** .

Generalizando lo anterior, obtenemos la **función derivada n -ésima de f** , que expresamos como $f^{(n)}$ o en la forma alternativa $\frac{d^n f}{dx^n}$.

$$\begin{aligned} f' &= \frac{df}{dx} \\ f'' &= \frac{d}{dx}(f') = \frac{d^2 f}{dx^2} \\ f''' &= \frac{d}{dx}(f'') = \frac{d^3 f}{dx^3} \\ &\vdots \\ f^{(n)} &= \frac{d}{dx}(f^{(n-1)}) = \frac{d^n f}{dx^n} \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Función exponencial $y = a^{px}$, $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' &= a^{px} p \ln a \\ y'' &= a^{px} p^2 (\ln a)^2 \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= a^{px} p^n (\ln a)^n \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Función $y = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \\ y'' &= \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} \left(x + 2 \frac{\pi}{2} \right) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \operatorname{sen} \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Potencia de un binomio $y = (ax + b)^m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Distinguimos tres casos: m mayor, menor o igual que 0.

a) $m > 0$, es decir potencia de exponente natural.

$$\begin{aligned} y' &= m(ax + b)^{m-1} a \\ y'' &= m(m-1)(ax + b)^{m-2} a^2 \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \begin{cases} m(m-1) \cdots (m-n+1)(ax + b)^{m-n} a^n & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases} \end{aligned}$$

Observamos que la derivada m -ésima es constante y las siguientes son nulas.

- b) $m < 0$. En este caso, el exponente $m - n$ no llega a anularse, por lo que la derivada no llega a ser constante, como en el caso anterior. Entonces:

$$y^{(n)} = m(m-1) \cdots (m-n+1)(ax+b)^{m-n} a^n, \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.9)$$

- c) $m = 0$. En este caso, la función es constante y sus derivadas nulas.

Caso particular. A partir de la potencia de un binomio con $m \in \mathbb{Z}^-$, obtenemos la derivada n -ésima de $y = 1/(x-c)$. Para ello, haciendo en la fórmula (4.9) $m = -1$, $a = 1$, $b = -c$, resulta:

$$\left(\frac{1}{x-c}\right)^{(n)} = (-1)(-2) \cdots (-1-n+1)(x-c)^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{(x-c)^{n+1}}$$

Ejercicio. Descompón f en fracciones simples y obtén su derivada n -ésima:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} \quad \left(\text{Sol. } f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\frac{5}{(x-2)^{n+1}} - \frac{2}{(x-1)^{n+1}} \right] \right)$$

4.15. Desarrollos limitados de Taylor y MacLaurin

Queremos aproximar una función f cerca de un punto a por medio de un polinomio, de modo que la aproximación sea mejor cuantos más términos tenga éste. Sabemos que la derivada de orden 0 (la función sin derivar) nos da el valor de f en a . La primera derivada, la pendiente de la recta tangente. La segunda derivada nos indica cómo varía dicha pendiente, etc. Cada derivada añade algo más de información sobre el comportamiento local de la función. Por ello obtendremos el polinomio cuyas sucesivas derivadas en a coinciden con las de f .

4.15.1. Desarrollo limitado de Taylor de orden n

Sea una función $f(x)$, $n-1$ veces derivable en un entorno U_a de a y n veces en a .

a. Polinomio de Taylor de grado n en a

Tomamos un polinomio de grado n y coeficientes indeterminados, en potencias de $(x-a)$:

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n$$

Para identificar los coeficientes, calcularemos sus derivadas sucesivas, igualándolas a las correspondientes derivadas de $f(x)$ en a . Es decir:

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad P''_n(a) = f''(a), \quad \dots \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \quad (4.10)$$

Así pues,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n && \implies P_n(a) = \alpha_0 = f(a) \\ P'_n(x) &= \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \dots + n\alpha_n(x-a)^{n-1} && \implies P'_n(a) = \alpha_1 = f'(a) \\ P''_n(x) &= 2\alpha_2 + \dots + n(n-1)\alpha_n(x-a)^{n-2} \implies P''_n(a) = 2\alpha_2 = f''(a) \implies \alpha_2 = 1/2 f''(a) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x) &= n(n-1) \cdots 1 \cdot \alpha_n = n! \alpha_n \implies P_n^{(n)}(a) = n! \alpha_n = f^{(n)}(a) \implies \boxed{\alpha_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)} \end{aligned}$$

con lo que obtenemos el polinomio de Taylor de grado n en a :

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}}$$

b. Término complementario y orden de aproximación

Es la diferencia entre $f(x)$ y $P_n(x)$. Será derivable tantas veces como lo sea f .

$$\boxed{T_n(x) = f(x) - P_n(x)} \quad (4.11)$$

El término complementario es el error cometido al tomar $P_n(x)$ como valor de $f(x)$ y es un **infinitésimo de mayor orden que** $(x - a)^n$ (el cociente de ambos tiende a 0, cuando $x \rightarrow a$).

Demostración. Teniendo en cuenta la igualdad (4.10) de las derivadas de f y $P_n(x)$ y la definición de $T_n(x)$ (4.11), resultan nulas sus n primeras derivadas en a :

$$\left. \begin{aligned} P_n(a) - f(a) &= P'_n(a) - f'(a) = \dots = P_n^{(n)}(a) - f^{(n)}(a) = 0 \\ T_n^{(k)}(a) &= f^{(k)}(a) - P_n^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_n(a) = T'_n(a) = \dots = T_n^{(n)}(a) = 0$$

Entonces calculamos el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n(x)}{(x - a)^n}$$

que es una indeterminación de tipo 0/0. Aplicando la regla de L'Hôpital, las derivadas de numerador y denominador tienen también límite nulo y obtenemos otra indeterminación del mismo tipo. Repitiendo el proceso $n - 1$ veces resulta:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n(x)}{(x - a)^n} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{T'_n(x)}{n(x - a)^{n-1}} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{T''_n(x)}{n(n-1)(x - a)^{n-2}} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \dots \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n^{n-1}(x)}{n!(x - a)} \quad (4.12)$$

Hemos supuesto que f es $n - 1$ veces derivable en U_a , luego no podemos derivar $T_n^{n-1}(x)$ fuera de a . Sin embargo, puesto que $T_n^{(n-1)}(a)$ es nulo, lo restamos en el numerador, obteniendo la derivada de $T_n^{n-1}(x)$ en a , que es también nula:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n^{n-1}(x)}{n!(x - a)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n^{n-1}(x) - T_n^{n-1}(a)}{(x - a)} = \frac{T^{(n)}(a)}{n!} = 0 \quad (4.13)$$

Entonces, teniendo en cuenta (4.12) y (4.13),

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n(x)}{(x - a)^n} = 0}$$

Este resultado se puede expresar como:

$$\boxed{T_n(x) = o(x - a)^n}$$

y podemos escribir $f(x)$ como suma del polinomio que la aproxima más el error cometido en la aproximación, lo que se conoce como **desarrollo limitado de Taylor de orden n en a** .

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + T_n(x) = \sum_{i=0}^n f^{(i)}(a) \frac{(x - a)^i}{i!} + T_n(x)} \quad \text{siendo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n(x)}{(x - a)^n} = 0$$

Se demuestra que, si f admite desarrollo limitado de orden n en a , éste es único.

c. Significado geométrico de los tres primeros sumandos del desarrollo

1. $y = f(a)$ es la ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto $P(a, f(a))$.
2. $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ es la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ por el punto P .
3. $y = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2$ es la ecuación de la parábola tangente a la curva $y = f(x)$ por el punto P .

Nota. Existen infinitas parábolas tangentes a $y = f(x)$ por un punto, pero la de Taylor es la de mejor aproximación de todas ellas. De hecho, si $y = f(x)$ corresponde a la ecuación de una parábola, la que se obtiene con la fórmula de Taylor es la misma.

Ejemplo. Si $y = x^2 + x + 1$, obteniendo $f(1)$, $f'(1)$ y $f''(1)$, la parábola de Taylor para $a = 1$ es $y = (x - 1)^2 + 3(x - 1) + 3$, que operando se convierte en $y = x^2 + x + 1$.

Ejercicio. Obtén la parábola de Taylor para $a = 1$ de $y = 2x^2 - 1$.

4.15.2. Desarrollo limitado de MacLaurin de orden n

Es el caso particular del desarrollo de Taylor para $a = 0$.

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + T_n(x)$$

En la figura 4.4 se observan la curva $y = e^x$ (izquierda) y la aproximación obtenida al aumentar el número de términos del desarrollo: en el centro se muestran la recta tangente y la parábola tangente; a la derecha se aprecia la casi total coincidencia de $f(x)$ con P_5 , en el intervalo $[-3, 3]$.

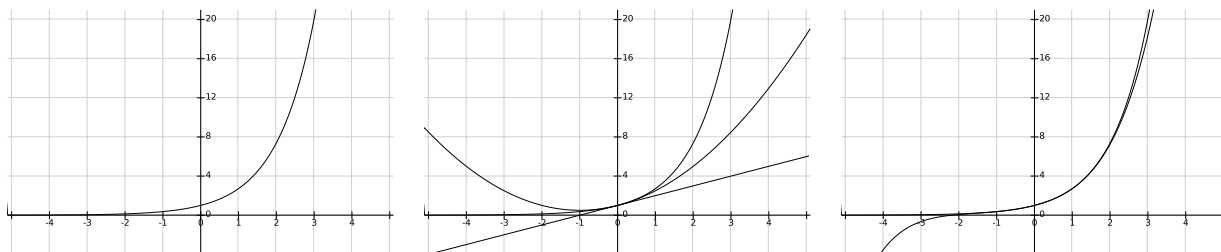


Figura 4.4: a) Función $f(x) = e^x$; b) Aproximación con P_1 , P_2 ; c) Aproximación con P_5 .

En el documento de apoyo 6.5 pueden verse ejemplos de los desarrollos más utilizados.

4.15.3. Término complementario de Lagrange

Existen distintas expresiones para el término complementario. Una de las más utilizadas es la debida a Lagrange, que se demuestra suponiendo f derivable $n + 1$ veces en un entorno de a y aplicando repetidamente el teorema de Rolle. La expresión de $T_n(x)$ es:

$$T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} \quad \xi \in (a, x)$$

De ξ sólo sabemos que es un valor intermedio entre a y x , si x está a la derecha de a , o entre x y a , en caso contrario. Por ello, no podemos conocer el valor exacto del error cometido, pero sí un valor aproximado o bien una cota del error.

Ejemplo. Sea $f(x) = e^x$. Escribiendo la fórmula del término complementario para f con $a = 0$ y teniendo en cuenta que $0 < \xi < x$ y que e^x es estrictamente creciente, resulta:

$$T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

con lo que hemos obtenido una cota del error. Si hacemos $n = 9$, lo que equivale a tomar los 10 primeros términos del desarrollo, podemos calcular una cota superior de $T_n(x)$ para distintos valores de x :

$$T_n(x) < \frac{e^x x^{10}}{10!} \implies \begin{cases} \text{si } x = 1, & T_n(x) < 8 \cdot 10^{-7} \\ \text{si } x = 2, & T_n(x) < 2 \cdot 10^{-3} \\ \text{si } x = 5, & T_n(x) < 400 \end{cases}$$

lo que nos indica que la aproximación es inexistente para $x = 5$, ya que el error cometido es superior al valor de la función ($e^5 \approx 148$). En este caso, para que el error cometido en la aproximación sea aceptable (p. ej., menor que 10^{-3}), tendremos que tomar más términos.

Escribiendo la condición para $x = 5$ y procediendo por tanteo, resulta:

$$\frac{e^5 5^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3} \implies n = 21$$

lo que exige utilizar 22 términos del desarrollo. En este caso, $T_n(x) < 3.15 \cdot 10^{-4}$.

Ejercicio. Repite el procedimiento con la función $y = \sin x$.

4.15.4. Teorema del extremo relativo

a. Definición de extremo relativo

Dada $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que tiene en $a \in I$ un máximo relativo (o local) si y sólo si existe un entorno de a en el que los valores de la función son menores o iguales que $f(a)$, es decir:

$$\exists U_a / \forall x \in U_a \cap I, \quad f(x) \leq f(a)$$

Para mínimo, la condición es la misma, usando el símbolo $\geq$. Para máximo y mínimo en sentido estricto se utilizan $<$ y $>$ respectivamente y usamos un entorno reducido U_a^* (no incluye a a).

(Las condiciones para que una función tenga extremos absolutos -o globales- son análogas, considerando todo el dominio en lugar del entorno de un punto).

Nota. Los extremos relativos no tienen por qué estar en puntos con derivada nula; de hecho, ni siquiera es necesario que f sea derivable en esos puntos. Por ejemplo, en el intervalo $I = [-1, 1]$, la función $y = x$ tiene extremos en $x = \pm 1$, pero su derivada vale 1 en todo I ; mientras que la función $y = |x|$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$, donde no es derivable.

La siguiente propiedad muestra la relación entre los extremos relativos de una función diferenciable y los puntos de derivada nula.

b. Teorema

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivable en a , punto interior de I . Si f tiene un extremo relativo en a , entonces $f'(a) = 0$.

Demostración para el caso de máximo relativo. La función f es derivable en a , interior, por lo que tiene derivadas laterales. Calculamos la derivada en a^+ :

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Como en a existe un máximo relativo, en un cierto entorno U_a de a , el numerador será menor o igual que 0, mientras que el denominador h es positivo. Luego el cociente será menor o igual que 0 y su límite cuando $h \rightarrow 0^+$ también. Por lo tanto:

$$f'(a^+) \leq 0$$

Por otra parte, la derivada en a^- es:

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En este caso, el numerador seguirá siendo menor o igual que 0 en el entorno U_a de a , mientras que el denominador h es negativo. Por tanto, el cociente será mayor o igual que 0 y su límite cuando $h \rightarrow 0^-$ también. Entonces:

$$f'(a^-) \geq 0$$

Como la función es derivable en a , las derivadas laterales coinciden, de donde:

$$f'(a^+) = f'(a^-) = 0 \implies f'(a) = 0$$

c. Localización de los extremos relativos.

Hemos visto que, si f tiene un extremo en un punto **interior** $x = a$, en el que es **derivable**, entonces $f'(a) = 0$. Pero habrá también que analizar los puntos que antes no hemos considerado. En conclusión, los posibles extremos relativos de f se encuentran en:

- Puntos interiores en los que $f' = 0$ (**puntos críticos**).
- Los extremos del intervalo.
- Puntos en que f no sea derivable.

4.15.5. Aplicaciones del desarrollo de Taylor

a. Estudio de una función en el entorno de un punto. Máximos y mínimos

- Si una función es suficientemente derivable, a partir del desarrollo de Taylor se puede estudiar su comportamiento en el entorno de un punto y, en particular, obtener sus extremos en puntos interiores del dominio. Sea el desarrollo de $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots$$

- Si $f'(a) = 0$ y x está suficientemente cerca de a , el comportamiento de $y = f(x)$ viene dado muy aproximadamente por el de $P_2(x) = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$ (los siguientes términos son infinitésimos de orden superior). Como $P_2(x)$ es una parábola con el vértice en $x = a$, si $f''(a) > 0$, tenemos un mínimo en $x = a$; y, si $f''(a) < 0$, un máximo.
- Si además $f''(a) = 0$, cerca de a la función se comporta como $P_3(x) = f(a) + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$, que corresponde a una cúbica con un punto de inflexión en $x = a$.

Igual que ocurre con el crecimiento o decrecimiento de f y el signo de f'' , si $f'''(a) > 0$, la derivada primera (nula en a) deja de decrecer y empieza a crecer. Si $f'''(a) < 0$, sucede lo contrario. Como consecuencia geométrica, en $x = a$ el centro de curvatura cambia de lado.

Ejemplo 1. $y = x^2 - x + 1$. Se cumple $f'(\frac{1}{2}) = 0$, $f''(\frac{1}{2}) = 2 \implies$ mínimo ($f(\frac{1}{2}) = 3/4$).

Ejemplo 2. $y = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$. Ahora $f'(\frac{1}{2}) = f''(\frac{1}{2}) = 0$, $f''' \neq 0 \implies$ p. de inflexión.

Nota. Que exista un punto de inflexión no significa necesariamente que la tangente a la curva sea horizontal. Por ejemplo, estudiamos la cúbica $y = f(x) = x^3 + kx$, que pasa por el origen. Como $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$, la curva tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Pero, al ser $f'(0) = k$, la pendiente de la tangente en el origen es $f'(0) = k$.

b. Equivalencias de infinitésimos

A partir de algunos desarrollos se deducen equivalencias ya conocidas, eliminando en los desarrollos infinitésimos de orden superior:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \implies e^x - 1 \sim x$
2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \implies \ln(1+x) \sim x$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \implies \sin x \sim x$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \implies 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

c. Suma de series

Dando valores a x , podemos obtener la suma de series numéricas. Por ejemplo, haciendo $x = 1$ en los desarrollos de e^x y $\arctan x$, obtenemos:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \xrightarrow{x=1} \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e - 1$
2. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \xrightarrow{x=1} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

d. Cálculo aproximado de integrales definidas

Obtenemos el valor aproximado de la integral siguiente, con error $\varepsilon < 10^{-4}$, tomando los 3 primeros términos del desarrollo del seno:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx \int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} \Big|_0^1 = 0.9461\dots$$

4.15.6. Desarrollos deducidos de otros

Sean $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, definidas en un entorno del origen, que admiten desarrollos limitados de Taylor de orden n en el origen. Sean p y q sus polinomios. Entonces (J. Burgos, p. 241):

- a) La función $\boxed{\alpha f + \beta g, \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$ admite desarrollo limitado de orden n en el origen, siendo su polinomio la combinación lineal de polinomios $\alpha p + \beta q$.
- b) La función $\boxed{f \cdot g}$ admite desarrollo limitado de orden n en el origen. Su polinomio se obtiene multiplicando $p \cdot q$ y eliminando los términos de grado superior a n .

- c) Si $g(0) \neq 0$, la función $\boxed{f/g}$ admite desarrollo limitado de orden n en el origen. Su polinomio se obtiene dividiendo p/q según potencias crecientes hasta el grado n inclusive.
- d) Si $f(0) = 0$, la función compuesta $\boxed{g \circ f}$ admite desarrollo limitado de orden n en el origen. Su polinomio se obtiene eliminando los términos de grado superior a n en $q \circ p$. El polinomio $q \circ p$ se calcula sustituyendo la variable de q por el polinomio p .
- e) Si F es primitiva de f , entonces $\boxed{F}$ admite desarrollo limitado de orden $n+1$ en el origen, siendo su polinomio P la primitiva de p . La constante de integración se determina haciendo que la función y el polinomio valgan igual en el origen, $P(0) = F(0)$.

Ejemplo. Sean las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$, cuyos polinomios son

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad q_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

1. Polinomio de Taylor de grado 5 de $h(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

$$2p(x) \cdot q(x) = 2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{1}{45}x^7 + \frac{1}{1440}x^9 \Rightarrow$$

$$\boxed{r_5(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5}$$

2. Polinomio de Taylor de grado 5 de $h(x) = \tan x = \sin x / \cos x$.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{19}{360}x^7 + \dots \Rightarrow \boxed{r_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5}$$

3. Polinomio de Taylor de grado 5 de $h(x) = \sin y|_{y=2x}$. Sustituyendo, en el polinomio del seno, la variable y por $2x$, obtenemos el mismo resultado del caso 1 (obviamente, el polinomio de la función $y = 2x$ es $2x$).

$$\boxed{r_5(x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5}$$

4. Polinomio de Taylor de grado 5 de $f(x) = \sin x$.

$$\sin x = \int \cos x \, dx \Rightarrow p(x) = \int \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) dx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + k$$

Como $p(0) = \sin(0) \Rightarrow k = 0$. Entonces $\boxed{p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}$.

4.16. Representación de curvas

Resulta de gran utilidad saber representar gráficamente funciones, particularmente las expresadas en coordenadas cartesianas explícitas, que encontramos con mayor frecuencia.

En el documento de apoyo [6.6](#) se dan unas nociones básicas para el estudio de este tipo de curvas, acompañadas de algunos ejercicios propuestos.

4.17. Ejercicios de autoevaluación

4.17.1. Tests verdadero/falso

Test 1 Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Sean f, g definidas en I . La relación $f \leq g \iff f(x) \leq g(x), \forall x \in I$ es de orden parcial.
2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si $m = \inf f(x)$ en A , entonces $\forall p > m, \exists a \in A / f(a) < p$.
3. La función $f(x) = e^x$ puede descomponerse en la suma de una función par y otra impar.
4. Si $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} / \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \varphi$, entonces la función f no tiene límite φ en $x = a$.
5. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi \in \mathbb{R}$, f está acotada en todo entorno V_a^* .
6. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \varphi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \gamma \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \varphi^\gamma$.
7. La función $f(x) = 1/x^3 + x^3$ es un infinito, tanto para $x \rightarrow 0$, como para $x \rightarrow \infty$.
8. Si $f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2$ en a , entonces $f_1^{g_1} \sim f_2^{g_2}$ en a .
9. La función parte decimal, $f(x) = x - E(x)$, tiene límites laterales distintos en el origen, por lo que presenta en este punto una discontinuidad evitable.
10. Sean las funciones potencia de exponente racional positivo ($x^{m/n}, m/n \in \mathbb{Q}^+$) y potencia de exponente irracional positivo ($x^a, a \notin \mathbb{Q}, a > 0$). Ambas son continuas en $\mathbb{R}$.
11. Toda función continua en un intervalo cerrado está acotada, por lo que tiene supremo e ínfimo. No siempre tiene máximo y mínimo.
12. Toda función continua en un intervalo acotado I es uniformemente continua en I (teorema de Heine).

Test 2 Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Sea $a \in I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Si la función f es continua en I , derivable en $I \setminus \{a\}$, y $\exists \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$, entonces f es derivable en a y se cumple que $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$.
2. La diferencial del producto de f y g es el producto de las diferenciales de las funciones.
3. $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$.
4. $f' > 0$ en I si y sólo si f es estrictamente creciente en I .
5. Si f y g son infinitos en a , entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
6. El término complementario $T_n(x) = f(x) - P_n(x)$ es un infinitésimo de orden n .
7. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Los extremos relativos de f en I se encuentran sólo en los puntos de derivada nula o los extremos del intervalo I .
8. Si f y g admiten desarrollo limitado de orden n en el origen, $f \cdot g$ admite desarrollo de orden n en el origen. Su polinomio se obtiene multiplicando los polinomios de f y g y eliminando los términos de grado superior a n .
9. La función $x^2 + \frac{1}{x^2}$ es un infinito (en el origen) y un infinitésimo (para $x \rightarrow \infty$).

4.17.2. Cuestión

Se pide obtener un valor aproximado para $\sqrt{627}$, utilizando para ello el concepto de diferencial y sabiendo que $25^2 = 625$.

4.17.3. Solución de los tests verdadero/falso

Test 1

1. **V.** La relación así definida cumple las propiedades Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva. Pero, dadas dos funciones cualesquiera, no tienen por qué ser los valores de una de ellas menores o iguales que los de la otra para todo punto del dominio, por lo que no tiene por qué existir una relación de orden entre ellas (4.1.2).
2. **V.** Lo demostramos por reducción al absurdo. Supongamos lo contrario, es decir que $\exists p > m / \forall a \in A, f(a) \geq p > m$. Entonces m no es el ínfimo (la mayor de las cotas inferiores) pues p es una cota inferior mayor que m .
3. **V.** Toda función definida en un dominio simétrico admite la descomposición $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, siendo el primer sumando una función par y el segundo una impar. Por ejemplo, si $f(x) = e^x$, resulta $e^x = \cosh x + \sinh x, \forall x \in \mathbb{R}$.
4. **V.** Es consecuencia de la relación que existe entre el límite funcional y el límite por sucesiones (4.2.4).
5. **F.** La propiedad 2 de los límites (4.2.5) establece que f está acotada en un cierto entorno reducido de a , lo cual no asegura que lo esté en cualquiera. Ej. $f(x) = 1/x$ tiene límite $1/2$ en $x = 2$ y está acotada en $U_2^* = (1, 2) \cup (2, 3)$ pero no lo está en $V_2^* = (0, 2) \cup (2, 4)$.
6. **F.** Para ser cierto, debe cumplirse $\varphi > 0$ (4.2.6).
7. **F.** f es un infinito para $x \rightarrow \infty$. En el origen no es un infinito pues no tiene signo constante al acercarse a 0. En efecto, si $x \rightarrow 0^+$, $f \rightarrow \infty$ y, si $x \rightarrow 0^-$, $f \rightarrow -\infty$. Sólo podemos afirmar que $|f| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$. En cambio $g(x) = 1/x^4 + x^4$ sí sería un infinito en el origen (y también para $x \rightarrow \infty$).
8. **F.** No podemos asegurarlo. Ej. $f_1 = f_2 = e$; $g_1 = x^2 + x$, $g_2 = x^2$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, el cociente entre $f_1^{g_1}$ y $f_2^{g_2}$ tiende a ∞ .
9. **F.** Si los límites laterales existen y no coinciden, como en este caso, decimos que la discontinuidad es no evitable, de primera especie o de salto finito (4.5.3).
10. **F.** La función $x^{m/n}$, $m/n \in \mathbb{Q}^+$ existe y es continua en $\mathbb{R}$, si n es impar y sólo en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, si n es par. La función x^a , $a \notin \mathbb{Q}$, $a > 0$ existe y es continua sólo en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (4.5.5). No tiene sentido un número negativo elevado a un exponente irracional.
11. **F.** Por el teorema de Weierstrass (4.6.3), toda función continua en un intervalo cerrado alcanza en él un máximo y un mínimo.
12. **F.** El teorema de Heine (4.7.2) sólo asegura la continuidad uniforme de una función continua en un intervalo cerrado. Ej. $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua en el intervalo acotado $(0, 1)$.

Test 2

1. **V.** Véase el apdo. [4.12](#) (La derivada como límite de derivadas).
2. **F.** $d(f \cdot g) = f dg + g df$.
3. **V.** $(x^x)' = x x^{x-1} + x^x \ln x = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$.
4. **F.** Véase el apdo. [4.11.4](#) (Funciones monótonas derivables). Contraejemplo: la función $y = x^5$ es estrictamente creciente pero tiene derivada nula en $x = 0$.
5. **F.** Por la regla de L'Hôpital, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$, entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$.
Pero puede no existir el primer límite y sí el segundo (véase el apdo. [4.13](#) del tema y el documento de apoyo [6.4](#)).
6. **F.** El término complementario $T_n(x)$ es un infinitésimo de orden superior a n . Véase el apdo. [4.15.1](#) (Desarrollo limitado de Taylor).
7. **F.** Puede haber extremos en puntos donde la función no es derivable. Ej: la función $y = |x|$ en $x = 0$.
8. **V.** Véase el apdo. [4.15.6](#) (Desarrollos deducidos de otros).
9. **F.** Es un infinito, tanto en el origen como para $x \rightarrow \infty$.

4.17.4. Solución de la cuestión

Partimos de que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^+$. Como vimos en el apdo. [4.8.3](#), la relación entre el incremento de una función y su diferencial viene dado por la expresión:

$$\Delta f = df(a) + o(x - a)$$

siendo la diferencial de f el producto de la derivada de f en a por la diferencial (o incremento) de la variable y $o(x - a)$ un infinitésimo de orden superior al de $(x - a)$.

$$df(a) = f'(a)(x - a); \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(x - a)}{x - a} = 0$$

Esto nos permite aproximar el incremento de f por la diferencial cuando $x - a$ es muy pequeño.

Entonces, haciendo $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x = 627$, $a = 625$, $x - a = 2$, resulta:

$$\sqrt{627} - \sqrt{625} \approx \frac{1}{2\sqrt{625}} 2 = 0.04 \implies \sqrt{627} \approx 25.04$$

Con esto hemos sustituido el valor exacto de la función f en el punto x por el de la ordenada en dicho punto de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Nota: El valor exacto de $\sqrt{627}$ es 25.039968... El error relativo cometido al aproximar el valor del incremento por el de la diferencial es:

$$E_r = \frac{0.04 - 0.039968}{0.04} 100 = 0.08 \%$$

Capítulo 5

Cálculo de primitivas

5.1. Introducción y conceptos básicos

Este tema está pensado como un apoyo a las clases prácticas de cálculo de primitivas, recordando algunos conceptos e introduciendo técnicas que permiten resolver integrales indefinidas.

En primer lugar se recuerdan muy brevemente algunas ideas básicas sobre funciones trigonométricas y logarítmicas. Luego se definen las funciones hiperbólicas y sus inversas, de mucha aplicación en el cálculo de primitivas.

A continuación se definen los conceptos de primitiva y de integral inmediata y se introducen los cambios de variable. Tras describir el método de integración por partes, se aplica éste a las fórmulas de reducción. Por último se exponen las técnicas habituales para resolver integrales racionales, trigonométricas e irracionales.

5.1.1. Funciones trigonométricas

a) Definiciones. A partir del seno y el coseno, se definen la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}; \quad \cotan x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}; \quad \sec x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}; \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

b) Seno, coseno y tangente del ángulo suma y del ángulo doble.

1. $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y + \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y \implies \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x.$
2. $\operatorname{cos}(x + y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \implies \operatorname{cos} 2x = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$
3. $\tan(x + y) = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\operatorname{cos}(x + y)} = \dots = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \implies \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$

c) Derivadas del seno, el coseno y la tangente.

$$(\operatorname{sen} x)' = \operatorname{cos} x; \quad (\operatorname{cos} x)' = -\operatorname{sen} x; \quad (\tan x)' = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

d) Algunas relaciones entre funciones trigonométricas.

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1; \quad 2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{cos} 2x; \quad 2 \operatorname{cos}^2 x = 1 + \operatorname{cos} 2x$$

5.1.2. Logaritmo neperiano

Son muy importantes las fórmulas de los logaritmos del producto, cociente y potencia:

$$\ln xy = \ln x + \ln y; \quad \ln(x/y) = \ln x - \ln y; \quad \ln x^y = y \ln x$$

5.2. Funciones hiperbólicas

5.2.1. Definición

Las funciones hiperbólicas se definen a partir de la función e^x :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

5.2.2. Función par e impar

Las siguientes propiedades, de fácil comprobación, muestran que el coseno es una función par, mientras que el seno y la tangente hiperbólicos son impares (igual que en funciones trigonométricas):

$$\sinh(-x) = -\sinh(x); \quad \cosh(-x) = \cosh(x); \quad \tanh(-x) = -\tanh(x)$$

5.2.3. Relación entre el seno y el coseno hiperbólicos

Es similar a la que existe entre el seno y coseno trigonométricos:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \dots = 1$$

5.2.4. Seno, coseno y tangente hiperbólicas de $x + y$

- a) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \implies \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x.$
- b) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \implies \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$
- c) $\tanh(x + y) = \frac{\sinh(x + y)}{\cosh(x + y)} = \dots = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \implies \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$

5.2.5. Derivadas de las funciones hiperbólicas

A partir de la definición de estas funciones, se obtienen sus derivadas (compruébese):

$$(\sinh x)' = \cosh x; \quad (\cosh x)' = \sinh x; \quad (\tanh x)' = \dots = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

5.2.6. Funciones inversas

Noción intuitiva. Toda función f asocia, a cada valor x de la variable independiente, un valor $y = f(x)$ de la variable dependiente. La función inversa de una dada recorre el camino contrario, asociando a cada y el correspondiente valor $x = f^{-1}(y)$. Por ejemplo, si f asocia a cada x el valor $y = 2x$, la función inversa f^{-1} asocia a cada y el correspondiente valor $x = y/2$.

Un modo práctico de obtener la función inversa de una dada consiste en despejar la variable x en función de y , para a continuación permutar entre sí los nombres de las variables x e y . Por ejemplo, si f asocia a cada x el valor $y = x^2$,

$$y = f(x) = x^2 \implies x = \sqrt{y} \implies y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

La inversa de la función “cuadrado” es la función “raíz cuadrada”.

Ejemplo. Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas. Las funciones inversas de las tres trigonométricas principales son, respectivamente, el arco seno, el arco coseno y el arco tangente, cuyas derivadas se muestran a continuación (véase 4.10.2):

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Relación entre las gráficas de una función y su inversa. Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante (razónese como ejercicio).

5.2.7. Funciones hiperbólicas inversas

a. Argumento seno hiperbólico.

Dada $y = \sinh x$, su función inversa es $y = \operatorname{argsh} x$ (argumento cuyo seno hiperbólico es x). Para trabajar mejor con ella, la expresamos en forma logarítmica. Para ello, partimos de la función $y = \operatorname{argsh} x$, despejamos la variable x y utilizamos la definición de la función seno hiperbólico:

$$y = \operatorname{argsh} x \implies x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \implies 2x = e^y - e^{-y}$$

Multiplicamos por e^y ambos miembros y resolvemos una ecuación de segundo grado en e^y :

$$2xe^y = (e^y)^2 - 1 \implies (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \implies e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Por fin obtenemos y como el logaritmo neperiano de lo anterior. Para el signo $+$ delante de la raíz, la expresión toma valor positivo $\forall x$. En cambio, para el signo $-$ su valor es negativo sea cual sea el valor de x , por lo que ningún valor de y es solución de la ecuación. Resulta:

$$y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

b. Argumento coseno hiperbólico.

Partimos ahora de la función argumento coseno y despejamos la x en función de e^y :

$$y = \operatorname{argch} x \implies x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \implies 2x = e^y + e^{-y}$$

Multiplicamos por e^y y resolvemos:

$$2xe^y = (e^y)^2 + 1 \implies (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \implies e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

La raíz existe sólo para $x^2 \geq 1$, es decir $x \geq 1$ o $x \leq -1$.

- Para $x \leq -1$, resulta $e^y < 0$, por lo que no hay solución.
- Para $x \geq 1$, e^y toma valor positivo para ambos signos de la raíz y de cada uno se obtiene un valor de y solución de la ecuación.

Tomamos sólo el signo positivo por tratarse de una función, pues cada x puede tener sólo una imagen. Resulta:

$$y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad x \in [1, \infty)$$

Ejercicio. Obtén la relación entre los valores de y correspondientes a los dos signos de la raíz. ¿Puedes relacionar el resultado con las propiedades de la gráfica de la función inversa?

c. Argumento tangente hiperbólica.

Partimos de la función argumento tangente, despejando x en función de e^y y multiplicando numerador y denominador por e^y :

$$y = \operatorname{argth} x \implies x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1 \implies e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

Despejamos y , tomando logaritmos:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Ejercicio. Razona los campos de existencia indicados en los apartados **b** y **c**.

5.2.8. Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

Para obtener las derivadas de estas funciones, las expresamos en forma logarítmica y derivamos por el método habitual.

$$\text{a) } (\operatorname{argsh} x)' = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\text{b) } (\operatorname{argch} x)' = [\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\text{c) } (\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]' = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' : \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

5.3. Función primitiva. Integrales inmediatas

Los conceptos de función integral e integral definida se estudiarán más adelante. Aquí introducimos el concepto de primitiva de una función, también llamada integral indefinida.

5.3.1. Primitiva de una función

Dada una función f , definida en un intervalo I , llamamos primitiva suya a toda función F , derivable en I , tal que su derivada coincide con f ($F' = f$). En ese caso escribimos:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Si C es una constante cualquiera, derivando resulta:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

luego $F(x) + C$ es también primitiva de f , por lo que $F(x) + C$, $\forall C \in \mathbb{R}$ es el conjunto de primitivas de $f(x)$. Esto se expresa como:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

5.3.2. Diferencial

El factor dx que aparece en la expresión anterior se llama diferencial de x . Como se ve en 4.8.3, la diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable, es decir:

$$dg(x) = g'(x) dx$$

Por ejemplo, la diferencial de la función seno es el coseno por la diferencial de x :

$$u = \operatorname{sen} x \implies du = \cos x dx$$

De aquí resulta:

$$F'(x) = f(x) \implies F(x) = \int f(x) dx = \int F'(x) dx = \int dF(x) \implies F(x) = \int dF(x)$$

Es decir, la integral de la diferencial de una función es la propia función. Como consecuencia, la primitiva que buscamos es aquella función cuya diferencial sea el integrando.

Nota. Lo anterior se utiliza en el cálculo de integrales definidas. Por ejemplo, para obtener el volumen de un cuerpo entre dos planos paralelos, correspondientes a dos valores de z , se calcula el valor de dV , expresado en función de z y se integra entre z_1 y z_2 .

5.3.3. Linealidad de la integral

La integral de una combinación lineal es la combinación lineal de las integrales:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

5.3.4. Integrales inmediatas

A partir de las fórmulas de derivación de las funciones más comunes, puede obtenerse un conjunto de integrales inmediatas que ayuda en el cálculo de primitivas. Al final del tema se adjunta una tabla con las integrales de uso más frecuente. Los últimos tres casos tienen dos soluciones diferentes. En los dos últimos, una de las soluciones tiene un mayor intervalo de existencia que la otra.

5.4. Integrales semiinmediatas y cambios de variable

Llamamos integrales semiinmediatas a aquellas que se convierten en inmediatas por medio de alguna operación sencilla en el integrando, como utilizar la regla de la cadena o hacer un cambio de variable. Por ejemplo, para integrar

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx$$

podemos llamar u al $\operatorname{sen} x$, con lo que $du = \cos x dx$. Teniendo en cuenta la primera de las integrales inmediatas de la tabla, resulta:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

En este caso, hemos utilizado un cambio de variable **implícito**.

A continuación se muestra uno **explícito** (no se resuelve completo), que permite eliminar la raíz, simplificando la integral.

Haciendo $x = \sin t$ y $dx = \cos t dt$, y teniendo en cuenta una de las relaciones vistas en el apartado 5.1.1, resulta:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt$$

Tras resolver las integrales, se deshace el cambio de variable, como en el caso anterior.

En el documento de apoyo 6.7 se describen con más detalle estos dos tipos de cambios y se muestran distintos ejemplos.

5.5. Integración por partes

Partimos de la diferencial del producto de dos funciones, $u(x)$ y $v(x)$ (véase 4.8.6):

$$d(uv) = (uv)' dx = (uv' + u'v) dx = uv' dx + vu' dx = u dv + v du$$

Despejamos $u dv$ y calculamos la integral de ambos miembros. Recordando que la integral de la diferencial de una función es la propia función, resulta:

$$u dv = d(uv) - v du \implies \int u dv = uv - \int v du$$

Para aplicar el método hemos de obtener los factores u y dv , calcular a partir de ellos du y v y sustituir. El método resultará útil si la integral de $v du$ es más sencilla de obtener que la inicial.

5.6. Fórmulas de reducción

a) Integral dependiente de un parámetro. Sea una integral, a la que llamaremos $I(n)$, cuyo integrando depende de un parámetro $n \in \mathbb{R}$. Supongamos que aplicando algún método (habitualmente el de integración por partes) podemos expresarla en función de la misma integral, con valores menores del parámetro, es decir $I(n) = f(I(n-1), I(n-2) \dots)$.

En este caso hemos hallado una **fórmula de reducción**, válida en principio $\forall n \in \mathbb{R}$. Lo más frecuente será que $I(n)$ resulte en función de $I(n-1)$ o $I(n-2)$ o ambas.

Ejemplo. Sea $I(n) = \int \ln^n x dx$. Si $n \neq 0$, aplicamos el método de partes. Resulta:

$$\left. \begin{array}{l} u = \ln^n x \Rightarrow du = n \ln^{n-1} x \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right\} \implies I(n) = \int \ln^n x dx = x \ln^n x - n I(n-1)$$

b) El parámetro es un número natural. En este caso, aplicando repetidamente la fórmula, obtendríamos $I(n-1)$ en función de $I(n-2)$, esta en función de $I(n-3)$, etc. Iríamos así reduciendo el grado, llegando a $I(0)$ o $I(1)$. Estas se integran directamente, pues suelen ser muy sencillas (a veces son casos particulares de la fórmula general).

c) Fórmula explícita. En ocasiones, reiterando el método, podemos llegar a una fórmula explícita que nos da el valor de $I(n)$, aunque suele ser complicado.

d) El parámetro es entero negativo. Supongamos que el parámetro n es entero negativo y aplicamos una y otra vez la fórmula de reducción. Tendríamos un proceso indefinido, en el que n tomaría valores negativos decrecientes. En estos casos interesa despejar al revés, $I(n-1)$ en función de $I(n)$ o, lo que es lo mismo, $I(n)$ en función de $I(n+1)$. Así, en cada paso aumentará el valor del parámetro hasta llegar a $I(-1)$, $I(0)$, que se pueden calcular directamente.

e) Cambio de signo del parámetro. Al ser la fórmula de reducción válida $\forall n \in \mathbb{R}$, a veces podemos obtener la fórmula de una integral a partir de otra, cambiando de signo el parámetro, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Sean $I(n) = \int x^n e^x dx$; $J(n) = \int \frac{e^x}{x^n} dx$.

Se cumple $J(n) = I(-n)$ por lo que, si conocemos la fórmula de reducción para $I(n)$, podemos obtener la de $J(n)$ sin necesidad de integrar. Basta cambiar de signo el parámetro en la fórmula de reducción de $I(n)$ y operar.

Es decir, como conocemos $I(n)$ en función de $I(n-1)$, entonces $J(n)$ (que es $I(-n)$) se puede escribir en función de $I(-n-1)$, es decir $J(n+1)$. Para terminar, hemos de despejar $J(n+1)$ en función de $J(n)$ y de ahí obtener la relación entre $J(n)$ y $J(n-1)$.

En el caso del ejemplo es fácil obtener $I(n) = x^n e^x - nI(n-1)$. A partir de esta expresión,

$$J(n) = I(-n) = x^{-n} e^x + nI(-n-1) = x^{-n} e^x + nJ(n+1) \implies J(n+1) = \frac{1}{n} J(n) - \frac{e^x}{nx^n}$$

de donde resulta la expresión siguiente, que también obtendríamos resolviendo directamente $J(n)$,

$$J(n) = \frac{1}{n-1} J(n-1) - \frac{1}{n-1} \frac{e^x}{x^{n-1}}$$

5.7. Integrales racionales

Son aquellas cuyo integrando está formado por un cociente de polinomios, es decir:

$$I = \int \frac{P_k(x)}{Q_l(x)} dx, \quad k < l$$

Para poder aplicar el método, numerador y denominador no deben tener factores comunes y el grado del numerador debe ser inferior al del denominador. Si $k \geq l$, se dividen los polinomios, obteniendo un cociente $C_{k-l}(x)$ y un resto $R(x)$, de grado menor que l . El problema se reduce a integrar el polinomio $C_{k-l}(x)$ más el cociente entre $R(x)$ y $Q_l(x)$.

Según el teorema fundamental del Álgebra, todo polinomio de coeficientes reales y grado l tiene l raíces, que serán simples o múltiples, reales o complejas, sabiendo que para cada raíz compleja es también raíz su conjugada. Al descomponer el polinomio en factores, las raíces reales dan lugar a factores del tipo $(x-a)$, mientras que cada par de raíces complejas conjugadas da lugar a un factor cuadrático sin raíces reales, como por ejemplo $x^2 - 2x + 2$, cuyas raíces serían $1 \pm i$. Sea un polinomio $Q_l(x)$ con una raíz real simple, una real múltiple (grado m), dos complejas conjugadas simples y otras dos conjugadas múltiples (grado n). Si el coeficiente del término de mayor grado es 1, la descomposición en factores resultante será:

$$Q_l(x) = (x-a)(x-b)^m (x^2 + cx + d)(x^2 + ex + f)^n$$

donde l es igual a la suma de los grados de los factores: $l = 1 + m + 2 + 2n = 2n + m + 3$.

Descomponemos el cociente en fracciones simples, obteniendo:

$$\frac{P_k(x)}{Q_l(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \cdots + \frac{B_m}{(x-b)^m} + \frac{Cx+D}{x^2+cx+d} + \frac{E_1x+F_1}{x^2+ex+f} + \cdots + \frac{E_nx+F_n}{(x^2+ex+f)^n}$$

(observamos que el número de coeficientes indeterminados es igual a l).

A continuación hacemos denominador común en el segundo miembro e igualamos los numeradores, obteniendo un sistema de l ecuaciones con l incógnitas que, una vez resuelto, nos da los coeficientes indeterminados.

Para terminar debemos integrar las distintas fracciones resultantes y nos encontramos los siguientes casos.

a) $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

b) $\int \frac{dx}{(x-b)^m} = \cdots = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{(x-b)^{m-1}} + C.$

c) Las fracciones de la forma $\frac{Cx+D}{x^2+cx+d}$ dan lugar a un logaritmo más un arco tangente, como en el ejemplo siguiente:

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} =$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

d) Las fracciones del tipo $\frac{E_nx+F_n}{(x^2+ex+f)^n}$ pueden integrarse por un proceso laborioso, del que resulta una expresión recurrente que permite reducir el grado del denominador. Por ello, cuando el denominador contiene factores de la forma $(x^2+ex+f)^n$, $n > 1$, es mucho más práctico el método de Hermite.

Método de Hermite. Se utiliza para cocientes de polinomios en que el denominador tiene factores cuadráticos sin raíces reales, elevados a un exponente mayor que 1.

Suponemos, como antes, que $Q_l(x)$ tiene una raíz real simple y otra múltiple, dos complejas conjugadas simples y otras dos múltiples, y que el coeficiente del término de mayor grado es l . Al factorizarlo resulta:

$$Q_l(x) = (x-a)(x-b)^m(x^2+cx+d)(x^2+ex+f)^n$$

El método consiste en descomponer el integrando de la siguiente forma:

$$\frac{P_k(x)}{Q_l(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{Cx+D}{x^2+cx+d} + \frac{Ex+F}{x^2+ex+f} + \frac{d}{dx} \left(\frac{R_s(x)}{(x-b)^{m-1}(x^2+ex+f)^{n-1}} \right)$$

Es decir, en los cuatro primeros sumandos del segundo miembro, aparecen los factores de $Q_l(x)$ con exponente igual a 1. En el denominador del cociente que se deriva, el exponente de los factores está reducido en 1, por lo que no aparecen los de exponente 1. Por último, el grado de $R_s(x)$ (cuyos coeficientes hay que determinar) es inferior al del denominador, por tanto de grado $2n+m-4$, como máximo.

Entonces se deriva el cociente, se reduce a común denominador y se igualan los numeradores, lo que produce un sistema de $2n+m+3$ ecuaciones, con otras tantas incógnitas. Tras identificar los coeficientes indeterminados, se integra:

- Las dos primeras fracciones dan lugar a logaritmos neperianos.
- Las dos siguientes, a logaritmo más arcotangente.
- En cuanto a la última, resulta la más sencilla de integrar:

$$\int \frac{d}{dx} \left(\frac{R_s(x)}{(x-b)^{m-1}(x^2+ex+f)^{n-1}} \right) dx = \frac{R_s(x)}{(x-b)^{m-1}(x^2+ex+f)^{n-1}}$$

Ejemplo. Calculamos $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$.

a) Descomponemos en fracciones, derivamos y hacemos denominador común:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{Cx+D}{x^2+1} \right) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1) - (Cx+D)2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + Cx^2 + C - 2Cx^2 - 2Dx}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3 + (B-C)x^2 + (A-2D)x + B+C}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

b) Planteamos el sistema, igualando los coeficientes de los términos del mismo grado. Resulta:
 $A = 0, \quad B - C = 1, \quad A - 2D = 0, \quad B + C = 0$

c) Resolvemos el sistema, obteniendo: $A = D = 0, \quad B = -C = 1/2$.

d) Integramos:

$$I = \int \frac{1/2}{1+x^2} dx + \int \frac{d}{dx} \left(\frac{-x/2}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \arctan x - \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

Nota. Con este ejemplo se pretende únicamente mostrar la aplicación del método en un caso sencillo. El ejercicio se resolvería más fácilmente por partes (haciendo $u = x$).

Ejercicio. Resuelve: $\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$. **Sol:** $\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{8} \ln((x^2+1)) + \frac{x-1}{4(x^2+1)} + C$

5.8. Integrales trigonométricas. Cambios de variable.

El integrando está formado por funciones trigonométricas. Los cambios de variable recomendados son los siguientes.

1) Integrando impar en seno. Si $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, hacemos $\boxed{\cos x = t}$

$$\boxed{\sin x = \sqrt{1-t^2}}; \quad -\sin x \, dx = dt \implies \boxed{dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}}$$

Ejemplo. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \underbrace{\sin^2 x}_{1-t^2} \cos^2 x \underbrace{\sin x \, dx}_{-dt} = - \int (1-t^2) t^2 \, dt$.

2) Integrando impar en coseno. Si $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, hacemos $\boxed{\sin x = t}$

$$\boxed{\cos x = \sqrt{1-t^2}}; \quad \cos x \, dx = dt \implies \boxed{dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}$$

Ejemplo. $\int (\cos^3 x + \cos x) \sin^2 x \, dx = \int \underbrace{(\cos^2 x + 1)}_{2-t^2} \sin^2 x \underbrace{\cos x \, dx}_{dt} = \int (2-t^2)t^2 \, dt.$

3) Integrando par en seno-coseno. Si $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, hacemos $\boxed{\tan x = t}$

$$\boxed{\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} ; \boxed{\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} ; (1 + \tan^2 x) \, dx = dt \implies \boxed{dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

Ejemplo. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \, dx = \int \frac{1}{1+t^2} \frac{(1+t^2)^2}{t^4} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^4}.$

4) Caso general. Si nada de lo anterior da resultado, haciendo $\boxed{\tan \frac{x}{2} = t}$ resulta:

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} ; \sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \implies \boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}} ; \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) d\left(\frac{x}{2}\right) = dt \implies \boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

Ejemplo. $\int \frac{2 + \sin x}{2 + \cos x} \, dx = \dots = 4 \int \frac{1+t+t^2}{(3+t^2)(1+t^2)} \, dt.$

5) Cambio de productos en sumas. Partimos del seno y el coseno de la suma y de la diferencia. Sumando o restando las expresiones, podemos despejar los productos buscados.

$$\begin{array}{ll} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y & \boxed{\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}} \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y & \implies \boxed{\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}} \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y & \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y & \boxed{\sin x \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}} \end{array}$$

5.9. Integrales irracionales. Cambios de variable.

El integrando contiene expresiones de exponente fraccionarios. Estudiamos tres casos.

1) Cociente de binomios con distintos exponentes. Es decir, integrando del tipo

$$R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}}, \dots \right]$$

Hacemos el cambio: $\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^m}$ siendo $m = \text{m.c.m.}(q, s, \dots).$

Ejemplo. $I = \int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \, dx.$ Cambio $\frac{x+1}{x+2} = t^2 \implies x = \frac{2t^2-1}{1-t^2}; \, dx = \frac{2t \, dt}{(1-t^2)^2}.$

Resulta $I = \int \frac{2t^2}{(1-t^2)^2} \, dt$, que se resuelve descomponiendo en fracciones simples.

2) El integrando contiene la raíz de una suma o diferencia de cuadrados. Según los signos de los cuadrados se realiza un cambio de variable que hace desaparecer la raíz, convirtiendo la integral en trigonométrica.

Para cada uno de las tres opciones, existe un caso particular que se resuelve como inmediata, sin necesidad de cambio de variable.

$$\text{a) } R[x, \sqrt{c^2 - a^2 x^2}] : \boxed{ax = c \operatorname{sen} t} \Rightarrow \sqrt{c^2 - a^2 x^2} = c \cos t; \quad dx = \frac{c}{a} \cos t \, dt.$$

$$\text{Ejemplo. } \int \sqrt{5 - x^2} \, dx : x = \sqrt{5} \operatorname{sen} t \Rightarrow \sqrt{5 - x^2} = \dots = \sqrt{5} \cos t; \quad dx = \sqrt{5} \cos t \, dt.$$

$$I = 5 \int \cos^2 t \, dt = \frac{5}{2} \int (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{5}{2} (t + \operatorname{sen} t \cos t) = \frac{5}{2} \arcsen \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x}{2} \sqrt{5 - x^2} + C.$$

$$\text{Caso particular. } \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{\sqrt{5}} + C \text{ (inmediata).}$$

$$\text{b) } R[x, \sqrt{c^2 + a^2 x^2}] : \boxed{ax = c \tan t} \Rightarrow \sqrt{a^2 x^2 + c^2} = \frac{c}{\cos t}; \quad dx = \frac{c}{a} \frac{1}{\cos^2 t} \, dt.$$

$$\text{Ejemplo. } \int \sqrt{x^2 + 5} \, dx : x = \sqrt{5} \tan t \Rightarrow \sqrt{x^2 + 5} = \dots = \frac{\sqrt{5}}{\cos t}; \quad dx = \frac{\sqrt{5}}{\cos^2 t} \, dt.$$

$$I = 5 \int \frac{dt}{\cos^3 t} = 5 \int \frac{\cos t \, dt}{\cos^4 t}. \text{ Haciendo el cambio } \operatorname{sen} t = u, \text{ resulta } 5 \int \frac{du}{(1 - u^2)^2}.$$

$$\text{Caso particular. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}} = \operatorname{argsh} \frac{x}{\sqrt{5}} + C = \ln |x + \sqrt{x^2 + 5}| + C \text{ (inmediata).}$$

$$\text{c) } R[x, \sqrt{a^2 x^2 - c^2}] : \boxed{ax = \frac{c}{\cos t}} \Rightarrow \sqrt{a^2 x^2 - c^2} = c \tan t; \quad dx = \frac{c}{a} \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} \, dt.$$

$$\text{Ejemplo. } \int \frac{dx}{(x^2 - 5)^{3/2}} : x = \frac{\sqrt{5}}{\cos t} \Rightarrow (x^2 - 5)^{3/2} = \dots = 5^{3/2} \tan^3 t; \quad dx = \sqrt{5} \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} \, dt.$$

$$I = \int \frac{\cos^3 t}{5^{3/2} \operatorname{sen}^3 t} \frac{\sqrt{5} \operatorname{sen} t}{\cos^2 t} \, dt = \frac{1}{5} \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t} \, dt = \frac{1}{5} \frac{-1}{\operatorname{sen} t} = -\frac{1}{5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} + C.$$

$$\text{Caso particular. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}} = \operatorname{argch} \frac{x}{\sqrt{5}} + C = \ln |x + \sqrt{x^2 - 5}| + C \text{ (inmediata).}$$

3) El integrando contiene la raíz de un trinomio. Puede convertirse el trinomio en una suma o diferencia de cuadrados, reduciéndose así al caso anterior.

$$\text{a) } a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right).$$

$$\text{Ejemplo. } 2x^2 + x + 1 = \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 + 1 - \frac{1}{(2\sqrt{2})^2} = \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{7}{8}.$$

$$\text{b) } a < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = -(-ax^2 - bx - c) = \dots$$

$$\text{Ejemplo. } -x^2 - x + 2 = -(x^2 + x - 2) = -\left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 - \frac{1}{4} \right] = \frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Tabla de integrales inmediatas

- | | |
|---|--|
| 1) $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$ | 2) $\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$ |
| 3) $\int \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \sqrt{u} + C$ | 4) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$ |
| 5) $\int \sin u du = -\cos u + C$ | 6) $\int \cos u du = \sin u + C$ |
| 7) $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \int (1 + \tan^2 u) du = \tan u + C$ | 8) $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = \int (1 + \cotan^2 u) du = -\cotan u + C$ |
| 9) $\int \cotan u du = \ln \sin u + C$ | 10) $\int \tan u du = -\ln \cos u + C$ |
| 11) $\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} du = \arcsen \frac{u}{\alpha} + C$ | 12) $\int \frac{1}{\alpha^2 + u^2} du = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{u}{\alpha} + C$ |
| 13) $\int \sinh u du = \cosh u + C$ | 14) $\int \cosh u du = \sinh u + C$ |
| 15) $\int \frac{1}{\cosh^2 u} du = \tanh u + C$ | 16) $\int \frac{1}{\sinh^2 u} du = -\coth u + C$ |
| 17) $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du = \operatorname{argsh} \frac{u}{\alpha} + C$ | 17') $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du = \ln \left(u + \sqrt{u^2 + \alpha^2} \right) + C$ |
| 18) $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - \alpha^2}} du = \operatorname{argch} \frac{u}{\alpha} + C$ | 18') $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - \alpha^2}} du = \ln \left u + \sqrt{u^2 - \alpha^2} \right + C$ |
| 19) $\int \frac{1}{\alpha^2 - u^2} du = \frac{1}{\alpha} \operatorname{argth} \frac{u}{\alpha} + C$ | 19') $\int \frac{1}{\alpha^2 - u^2} du = \frac{1}{2\alpha} \ln \left \frac{\alpha + u}{\alpha - u} \right + C$ |

NOTAS:

- 1: La primitiva de **17'** es la forma logarítmica de la primitiva de **17**. Ambas tienen el mismo campo de existencia $(-\infty, \infty)$.
- 2: La primitiva de **18** existe sólo para $u > \alpha$. La de **18'** existe $\forall u \neq \pm \alpha$.
- 3: La primitiva de **19** existe sólo para $-\alpha < u < \alpha$. La de **19'** existe $\forall u \neq \pm \alpha$.
- 4: En los casos **11**, **12**, **17-19'**, α significa la raíz cuadrada positiva de α^2 . Escribimos α^2 para indicar un número positivo.

Capítulo 6

Documentos de apoyo

Como se dice en la **Presentación** de estos apuntes, este tema final contiene diversos documentos que los complementan. Se incluyen en él algunos ejercicios con mayor dificultad que los ejemplos resueltos que acompañan a la teoría, así como demostraciones de cierto interés, que se ha visto preferible no incluir en el texto.

6.1. Término general de los enteros (apdo. 1.2.4)

Existen sucesiones cuyo término general tiene expresiones distintas para n par o impar, por ejemplo:

$$\frac{1}{1}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots$$

donde vemos que a_n vale n , para n par y $1/n$, para n impar.

En estos casos podemos obtener una expresión única para el término general. Para ello, a partir de las sucesivas potencias de -1 , definimos las sucesiones $\{i_n\}$ y $\{p_n\}$:

$$\{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\} = -1, 1, -1, 1, \dots \implies \begin{cases} \{i_n\} = \left\{ \frac{1 - (-1)^n}{2} \right\} = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \\ \{p_n\} = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} \right\} = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots \end{cases}$$

Entonces, dada la sucesión obtenida en el estudio de la numerabilidad de los enteros,

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

se pide:

- a) Obtener las expresiones del término general para n par e impar.
- b) Obtener una única expresión para el término general.

Solución.

a) Observando la sucesión, vemos que:

- Para n par $(2, 4, 6 \dots)$, los términos son $1, 2, 3 \dots$, luego $a_n = \frac{n}{2}$.
- Para n impar, los términos son $0, -1, -2, \dots$. Su valor se incrementa en -1 cuando n se incrementa en 2. Luego a_n será de la forma $k - n/2$. Como $a_1 = 0$,

$$k - \frac{1}{2} = 0 \implies k = \frac{1}{2} \implies a_n = \frac{1 - n}{2}$$

Esto puede plantearse de un modo más general: tanto para n par como impar, los incrementos del valor de a_n son constantes con cada incremento de n , por lo que a_n será de la forma $\alpha n + \beta$. Sustituyendo n por sus dos primeros valores, resultan dos ecuaciones con dos incógnitas, que nos dan los valores de α y β .

b) Queremos obtener una expresión de a_n que valga $\forall n$, para lo que usaremos las sucesiones $\{i_n\}$ y $\{p_n\}$ definidas al principio.

- Si multiplicamos por i_n la expresión de a_n para n impar, los términos de la sucesión resultante tomarán el valor correcto para n impar y valdrán 0 en caso contrario.

- Si multiplicamos por p_n la expresión de a_n para n par, los términos de la sucesión resultante tomarán el valor correcto para n par y valdrán 0 en caso contrario.

- Sumando ambas expresiones, el resultado nos dará el valor de $a_n \forall n$.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} \right) \frac{1 - n}{2} + \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right) \frac{n}{2} = \frac{1 - n - (-1)^n + (-1)^n n}{4} + \frac{n + (-1)^n n}{4} = \\ &= \frac{1 + (-1)^n(-1 + n + n)}{4} = \frac{2n - 1}{4}(-1)^n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

6.2. Principio de Inducción: ejemplo (apdo. 1.2.4)

Queremos demostrar la propiedad siguiente, que llamaremos $P(n)$: *La suma de los n primeros cubos de los naturales es igual al cuadrado de la suma de dichos n números*:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

Para demostrarla aplicamos el Principio de Inducción, es decir:

- a)** Comprobamos que $P(1)$ es cierta: efectivamente $1^3 = 1^2$, luego se cumple.
- b)** Suponemos cierta $P(k)$: $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + \dots + k)^2$.
- c)** Demostramos $P(k + 1)$: $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \dots + k + k + 1)^2$.

Para ello sumamos $(k + 1)^3$ a ambos miembros de la igualdad **b)** y operamos en el segundo miembro, teniendo en cuenta la expresión de la suma de k números naturales consecutivos:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 &\stackrel{P(k)}{=} (1 + 2 + \dots + k)^2 + (k + 1)^3 = \\ &= \left[\frac{(1 + k)}{2} k \right]^2 + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2 k^2}{4} + (k + 1)^3 = (k + 1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + k + 1 \right] = \\ &= (k + 1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right] = \left[\frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \right]^2 = (1 + 2 + \dots + k + k + 1)^2 \end{aligned}$$

Nota. Otro enfoque de la demostración (que en este caso supone realizar las mismas operaciones) consiste en escribir el primer miembro de la igualdad **c)** que queremos demostrar y aplicar $P(k)$, sustituyendo la suma de los k primeros cubos por el cuadrado de la suma de los k primeros naturales. Operando como antes, se obtiene la igualdad buscada.

Ejercicio. Se propone realizar la demostración de $P(k + 1)$ de derecha a izquierda, partiendo del segundo miembro de la igualdad que se pretende demostrar.

6.3. Racionales e irracionales densos en $\mathbb{R}$ (apdo. 1.7.2)

6.3.1. Entre dos reales existe un racional

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$.

Al ser $x < y \implies y - x > 0$. Tomamos $\frac{1}{y-x}$. Como el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado, podemos asegurar que:

$$\exists n \in \mathbb{N} / n > \frac{1}{y-x}; \text{ es decir, } \underbrace{y-x > \frac{1}{n}}_{(1)}.$$

Sea $p \in \mathbb{Z}$ la parte entera de nx . Entonces:

$$p \leq nx < p+1 \implies \underbrace{\frac{p}{n} \leq x}_{(2)} \text{ y } x < \underbrace{\frac{p+1}{n}}_{(3)}.$$

Aplicando las relaciones (1), (2) y (3) se cumple:

$$y = x + (y-x) \underbrace{> \frac{p}{n} + \frac{1}{n}}_{(1) \text{ y } (2)} = \frac{p+1}{n} \underbrace{> x}_{(3)}.$$

Es decir:

$$x < \frac{p+1}{n} < y, \text{ siendo } \frac{p+1}{n} \text{ un número racional.}$$

De aquí se deduce que entre cada uno de los dos reales x e y y el número racional (que es también real), existe un nuevo número racional. Reiterando el razonamiento, concluimos que **entre dos reales existen infinitos racionales**. Esta propiedad se expresa también diciendo que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ (J. Burgos, p. 58).

6.3.2. Entre dos reales existe un irracional

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$.

Por las propiedades de la relación de orden se cumplirá:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Por la demostración anterior,

$$\exists r \in \mathbb{Q} / \frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$$

de donde:

$$x < \sqrt{2} r < y, \text{ siendo } \sqrt{2} r \text{ un número irracional.}$$

De aquí se deduce que entre cada uno de los reales x e y y el irracional (que también es real), existe un nuevo número irracional. Reiterando el razonamiento, concluimos que **entre dos reales existen infinitos irracionales**. Esta propiedad se expresa también diciendo que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ (J. Burgos, p. 58).

Nota. Para que $\sqrt{2}r$ sea irracional, r ha de ser distinto de 0. Esto se puede asegurar, pues, en el caso de que el r obtenido inicialmente resultara nulo, podemos encontrar un r' entre $x/\sqrt{2}$ y r , que ya no sería nulo.

6.4. Regla de L'Hôpital. Ejemplos (apdo 4.13)

6.4.1. Aplicación reiterada de la regla de L'Hôpital

Si al aplicar la regla de L'Hôpital a un cociente, resulta otro límite indeterminado, puede reiterarse el método si se siguen cumpliendo las condiciones exigidas para ello.

Ejemplo. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x - \sin x}$.

- a) Es un límite del tipo 0/0, que cumple las condiciones para la aplicación de la regla de L'Hôpital, por lo que calculamos el límite del cociente de derivadas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2/(1+x^3)}{1 - \cos x} \stackrel{\text{si } \exists}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} \cdot 1$$

que sigue siendo indeterminado, del tipo 0/0.

- b) Como el numerador y el denominador siguen siendo funciones derivables y la derivada del denominador no se anula fuera del origen, derivamos de nuevo (con ello **no** estamos calculando las derivadas segundas de f y g , pues hemos simplificado el límite de f'/g'):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x^2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x}$$

- c) Para resolver este límite indeterminado derivamos por tercera vez:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\cos x} = 6$$

- d) Tenemos pues que, según la regla de L'Hôpital,

$$6 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- e) Lo anterior puede resumirse como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{si } \exists}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{\text{si } \exists}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} \stackrel{\text{si } \exists}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x} \stackrel{\text{si } \exists}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\cos x} = 6$$

6.4.2. No existencia del límite del cociente de derivadas

La regla de L'Hôpital dice que, en ciertas condiciones, si existe el límite del cociente de derivadas, existe el límite del cociente de funciones y vale lo mismo (condición suficiente). Pero puede no existir el límite del cociente de derivadas y sí el del cociente de funciones.

Ejemplo. Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \sin x$$

Calculando el límite de f'/g' en el origen,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\cos(1/x) \right)$$

vemos que no existe. Sin embargo, podemos obtener el límite de f/g directamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{x}{\sin x} \right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(x \sin(1/x) \right)}_{\rightarrow 0} = 0$$

6.5. Desarrollos de algunas funciones (apdo. 4.15.2)

Desarrollo	Campo de validez
1. $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	$-1 < x < 1$
2. $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$	$-1 < x < 1$
3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
4. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
5. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
6. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
7. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
8. $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$	$ x < 1$
9. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$ x < 1$
10. $\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
11. $\operatorname{cosh} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$

6.6. Nociones básicas de dibujo de curvas (apdo. 4.16)

Nos referimos aquí a curvas en coordenadas cartesianas explícitas. La ecuación de la curva es de la forma $y = f(x)$, donde f es una función. Para representar curvas de este tipo es útil estudiar los aspectos que se relacionan a continuación.

6.6.1. Dominio, ceros y simetrías

Dominio. El primer paso suele consistir en determinar el dominio o campo de existencia, identificando los puntos en que f no está definida. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$, la función no existe para valores de x que hacen negativo el radicando, es decir $x \in (-2, 1)$.

Ceros. Buscamos los valores de x que anulan la función. En ellos la curva corta al eje OX .

Simetrías. La curva puede ser simétrica respecto a OY o respecto al origen. No puede serlo respecto a OX por tratarse de una función.

- Si $f(-x) = f(x)$, $\forall x$, la curva es simétrica respecto al eje OY . Ejemplo: $y = \cos x$.
- Si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$, la curva es simétrica respecto al origen O . Ejemplo: $y = x^3$.

6.6.2. Asíntotas

Una asíntota es una recta a la que la curva se aproxima tanto como queramos, sin llegar a tocarla (tangente en el infinito). Existen tres tipos de asíntotas:

- a) **Vertical.** Se da si $f(x) \rightarrow \pm\infty$, cuando $x \rightarrow a$. Suele corresponder a valores de x que anulan el denominador de $f(x)$. Ejemplo: $y = (x^2 - 4)^{-1}$ tiene asíntotas en $x = \pm 2$.

Tienen también asíntotas verticales las curvas de ecuación $y = \ln x$, en $x = 0^+$, e $y = \tan x$, en $x = (2k - 1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

- b) **Horizontal.** Existe una asíntota horizontal si $f(x) \rightarrow b$, cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Ejemplo: en la curva $y = x(x^2 + 1)^{-1}$, la asíntota es el eje OX , pues $y \rightarrow 0^\pm$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

- c) **Inclinada.** Tenemos una asíntota inclinada de ecuación $y = mx + n$ si, cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow \pm\infty$ (o bien a $\mp\infty$) y se cumple además

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = m \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y - mx = n \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, la curva de ecuación $y = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$ tiene como asíntota a $y = 2x + 1$.

6.6.3. Máximos, mínimos y puntos de inflexión

Estudiamos los valores de las derivadas primera y segunda de f , resultando:

- a) **Máximo.** Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, la función tiene un máximo relativo en $x = x_0$.
- b) **Mínimo.** Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, la función tiene un mínimo relativo en $x = x_0$.
- c) **Punto de inflexión.** Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, existe un punto de inflexión en $x = x_0$.

6.6.4. Caso particular de funciones racionales

La función $f(x)$ viene dada por un cociente de polinomios $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

- a) **Ceros.** Los ceros de $f(x)$ son las raíces de $P(x)$.
- b) **Asíntotas.** La curva tendrá una asíntota vertical en los puntos correspondientes a las raíces de $Q(x)$. Si el orden de multiplicidad de la raíz es par, no habrá cambio de signo de $f(x)$ a los lados de la asíntota y sí lo habrá si el orden es impar.

Ejemplos: la curva $y = (x - 1)^{-2}$ posee en $x = 1$ una asíntota vertical sin cambio de signo, mientras que $y = (x - 2)^{-3}$ tiene una, en $x = 2$, con cambio de signo.

6.6.5. Ejercicios

Estudia las curvas siguientes, llegando a los resultados que se indican, y represéntalas aproximadamente.

- a) La curva de ecuación $y = x(x^2 - 1)^{-1}$ tiene simetría respecto al origen de coordenadas y posee dos asíntotas verticales y una horizontal.
- b) La curva dada por $y = (x^2 + x - 2)(x - 2)^{-1}$ tiene dos ceros, extremos en $x = 0$ y $x = 4$, una asíntota vertical y otra inclinada.
- c) La curva dada por $y = x + x^{-1}$ tiene extremos en $x = \pm 1$, una asíntota vertical y otra inclinada. Posee además simetría polar.
- d) La curva de ecuación $y = e^{1/x}$ tiene una asíntota horizontal y otra vertical.

6.7. Introducción a los cambios de variable (apdo. 5.4)

6.7.1. Cambio de variable explícito

Sea la función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $I = [a, b]$, cuya primitiva queremos obtener.

Sea $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada continua y estrictamente monótona en $J = [c, d]$.

Si la imagen por g del intervalo J está contenida en I , entonces podemos realizar el cambio de variable $x = g(t)$, resultando:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt = \int H(t) dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

Ejemplo. $\int \sqrt{1-x^2} dx$. Con $x = \sin t$, la integral se convierte en $\int \cos^2 t dt$.

Nota. Es suficiente que la condición de monotonía estricta, impuesta para poder calcular la función inversa, se cumpla a trozos; es decir, que el intervalo J se pueda descomponer en subintervalos, en cada uno de los cuales se cumple la condición.

Por ejemplo, la función $x = \sin t$ utilizada en el ejemplo no es estrictamente monótona en su dominio, pero sí en intervalos de longitud π como $[-\pi/2, \pi/2]$.

6.7.2. Cambio de variable implícito

A veces resulta útil hacer el cambio $h(x) = t$ (o, lo que es lo mismo, $x = h^{-1}(t)$), con lo que $h'(x) dx = dt$. Escribimos entonces la integral como:

$$\int f(x) dx = \int \frac{f(x)}{h'(x)} h'(x) dx, \quad h'(x) \neq 0$$

Si $\frac{f(x)}{h'(x)}$ puede ponerse como función de t , la integral se convierte en $\int G(t) dt$.

La función h debe ser, como antes, de derivada continua y estrictamente monótona.

Ejemplo. $\int x \cos x^2 dx$. Si $t = h(x) = x^2$, $h'(x) = 2x$ y la integral se convierte en:

$$\int \frac{x \cos x^2}{2x} 2x dx \stackrel{x^2=t}{=} \int \frac{\cos t}{2} dt$$

Nota. En la práctica no hay necesidad de dividir y multiplicar por $h'(x)$. La derivada de h se suele obtener multiplicando y dividiendo el integrando por el factor adecuado:

$$\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 2x dx \stackrel{x^2=t}{=} \frac{1}{2} \int \cos t dt$$

6.7.3. Combinación de ambos métodos

Es frecuente iniciar el cambio de variable como implícito, eligiendo $h(x)$, despejar x ($x = h^{-1}(t)$) y a partir de ahí obtener dx .

Ejemplo. $\int \frac{x dx}{2 - \sqrt[3]{x}}$. Hacemos $2 - \sqrt[3]{x} = t \implies x = (2-t)^3$, $dx = -3(2-t)^2 dt$.

La integral se convierte en: $\int \frac{-3(2-t)^5}{t} dt$.

Ejercicios. Resuelve los siguientes casos aplicando el cambio sugerido.

a) Cambio explícito.

1. $\int \sqrt{x^2 + \alpha^2} \, dx \quad (x = \alpha \sinh t). \quad \text{Sol.} \quad \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}| + C.$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} \, dx \quad (x = \alpha \cosh t). \quad \text{Sol.} \quad \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}| + C.$

3. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{\alpha^2 - x^2}} \, dx \quad (x = \alpha \sin t). \quad \text{Sol.} \quad -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{x} + C.$

b) Cambio implícito.

1. $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, dx \quad (1 + \sqrt{x} = t). \quad \text{Sol.} \quad 2(1 + \sqrt{x}) - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C.$

2. $\int \frac{e^x}{(e^x + 3) \sqrt{e^x - 1}} \, dx \quad (\sqrt{e^x - 1} = t). \quad \text{Sol.} \quad \arctg \frac{\sqrt{e^x - 1}}{2} + C.$

3. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} \, dx \quad (\sqrt{e^x + 1} = t). \quad \text{Sol.} \quad \frac{2}{3} \sqrt{(e^x + 1)^3} - 2\sqrt{e^x + 1} + C.$

Capítulo 7

Cuestiones y problemas de examen

7.1. Cuestiones de examen

Curso 10/11

1.− Justifica la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: “La suma de dos números irracionales iguales es irracional” (*enero 2011*).

2.− El conjunto A , no vacío, es biyectivo con un subconjunto suyo propio B . ¿Qué puede deducirse respecto al número de elementos de A ? (*julio 2011*).

Nota: B es subconjunto propio de A si $B \subset A$ y $B \neq A$.

Curso 11/12

3.− Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a > b > c > 0$. Demuestra que $|a - b| < |a - c|$ (*enero 2012*).

4.− Sea la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $I = [1, 2]$. Para cada uno de los siguientes teoremas, se pide: 1) enunciarlo ; 2) analizar si se cumplen en I (o algún subintervalo suyo) las condiciones para su aplicación; 3) en caso afirmativo, aplicar el teorema en I (*julio 2012*).

- a) El teorema de Bolzano (de los ceros).
 - b) La propiedad de Darboux (del valor intermedio).
 - c) El teorema de Weierstrass (de la existencia de extremos).
 - d) El teorema del valor medio de Rolle.
 - e) El teorema del valor medio de Cauchy.
 - f) El teorema de Lagrange (de los incrementos finitos).
-

Curso 12/13

5.— Sea K un cuerpo y 0 el elemento neutro de K con respecto a la suma. Se pide demostrar que se verifica: $x, y \in K, x \cdot y = 0 \implies x = 0 \text{ ó } y = 0$ (enero 2013).

Nota: Si se utiliza la propiedad $0 \cdot a = 0, \forall a \in K$, no es preciso demostrarla.

6.— Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$. Demuestra que, si $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado, contiene a su frontera (enero 2013).

7.— Sea la sucesión de números reales $\{a_n\}$, de límite α , tal que todos sus elementos son distintos entre sí y $\alpha \neq a_n \forall n \in \mathbb{N}$. Se considera el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$ y el conjunto A , formado por los elementos de la sucesión. Razona brevemente la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones (julio 2013):

- a) El valor α es un punto de acumulación de A .
 - b) El valor α es un punto frontera de A .
 - c) El interior del conjunto A es vacío.
-

Curso 13/14

8.— Define función monótona creciente y función monótona decreciente. Sea f una función monótona creciente en todo $\mathbb{R}$. Sea $g(x) = f(-x)$. Demuestra que g es monótona decreciente en todo $\mathbb{R}$ (enero 2014).

9.— Sea la función f , continua en $[a, b]$, tal que $f(a) = -1, f(b) = 2$. Razona si existe siempre $\alpha \in (a, b)$ tal que: **a)** $f(\alpha) = \sqrt{2}$; **b)** $f(\alpha) = 2$; **c)** $f(\alpha)$ es el máximo de f en $[a, b]$ (enero 2014).

10.— Sea la sucesión $\{a_n\}$ de límite $l \in \mathbb{R}$.

- a) Si $l = 0$, razona qué podemos afirmar del signo de sus términos.
 - b) Si $l > 0$ y $\{a_n\}$ creciente, razona si $\exists n / 0 < a_m \leq a_{m+1} \leq l, \forall m \geq n$ (julio 2014).
-

11.— Sea el intervalo $I \in \mathbb{R}$ de extremos $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Sea el conjunto A , formado por los irracionales contenidos en I . En el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$, se pide expresar, del modo más simplificado posible y razonando brevemente la respuesta, los conjuntos siguientes:

a) A . **b)** Adherencia de A . **c)** Derivado de A . **d)** Frontera de A (julio 2014).

Curso 14/15

12.— Sea $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$. Se pide justificar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) La raíz n -ésima de k tiene límite 1.
 - b) La raíz n -ésima de $k^{\ln n}$ tiene límite 1.
 - c) La raíz n -ésima de $(\ln n)^k$ tiene límite 1 (*enero 2015*).
-

13.— Sea una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivable en $I \setminus \{a\}$.

- a) ¿De qué maneras podemos demostrar su derivabilidad en a ?
 - b) Aplíquese lo anterior al caso $f(x) = x \sin |x|$ en el punto $a = 0$ (*enero 2015*).
-

14.— Razona la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: “Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua en I , posee un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo” (*julio 2015*).

15.— Sea un intervalo $A \subset \mathbb{R}$. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, derivable en A . Si f tiene un extremo relativo en $a \in \overset{\circ}{A}$, razona qué podemos afirmar de $f'(a)$, así como de la posición de los extremos relativos de una función cualquiera en un intervalo en el que está definida (*julio 2015*).

Curso 15/16

16.— Sea la función f , definida en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, en el que es continua. Se pide razonar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) La función f está acotada en I .
 - b) Si f es derivable en $a \in I$ y tiene un extremo en a , se cumple $f'(a) = 0$ (*enero 2016*).
-

17.— Obtén razonadamente el conjunto interior de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con la métrica usual (*julio 2016*).

Curso 16/17

18.— Sean a_n, b_n dos infinitésimos equivalentes de orden p . Se pide justificar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) $a_n + b_n$ es un infinitésimo de orden p .
 - b) $a_n - b_n$ es un infinitésimo de orden p .
 - c) $e^{a_n} - e^{b_n}$ es un infinitésimo de orden p (*enero 2017*).
-

19.— Obtén la derivada de la función inversa de $\tanh x$ (*enero 2017*).

20.— Sea el intervalo $I = [-1, 1]$. En cada uno de los 4 primeros apartados, halla una función que verifique en I las condiciones del teorema correspondiente, justificando que se cumplen dichas condiciones y obteniendo los puntos en los que lo hacen, o un ejemplo de ellos (las funciones deben ser distintas en cada apartado).

- a) Teorema de Bolzano (o de los ceros).
- b) Teorema de Weierstrass (existencia de extremos).
- c) Teorema del valor medio de Rolle.
- d) Teorema de Lagrange (o de los incrementos finitos).
- e) ¿Sabrías encontrar una función que verifique los cuatro apartados anteriores? (*julio 2017*).

Curso 17/18

21.— Obtén un infinitésimo equivalente a $\sqrt{x} - 1$ cuando $x \rightarrow 1$, en la forma general $k(x - 1)^p$ (*enero 2018*).

22.— Sea la sucesión de término general $a_n \in \mathbb{R}$. que puede converger o diverger. Se pide estudiar la relación entre su límite y el de la sucesión de término general $\sqrt[n]{a_n}$ (*enero 2018*).

23.— Justifica la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: “Sean dos sucesiones monótonas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Si $0 < a_n < b_n \forall n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ” (*julio 2018*).

24.— Justifica la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: “Si $x \in \mathbb{Q}$, $x + \pi$ es irracional, pero $x \cdot \pi$ puede no serlo” (*julio 2018*).

Curso 18/19

25.— Razona la verdad o falsedad de las afirmaciones: “En $\mathbb{R}$, un conjunto finito es acotado, un conjunto infinito puede ser numerable, un conjunto acotado es numerable” (*enero 2019*).

26.— Sea la función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuya gráfica es una curva simétrica respecto a OY . Se pide demostrar que la recta tangente a la curva en el origen es horizontal (*enero 2019*).

27.— Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$, siendo d_2 la distancia euclídea. Se pide:

- a) Expresión que define cualquier bola abierta centrada en el punto $P(1, 2)$.
- b) De las bolas anteriores, hallar la de radio mínimo.
- c) Sea el conjunto A formado por los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuya ordenada es mayor que su abscisa y ésta mayor que su ordenada cambiada de signo. Exprésalo de la forma más sencilla posible.
- d) Razona si el conjunto A es abierto y si es entorno de P (*julio 2019*).

Curso 19/20

28.— Sea $0 \leq a \leq b + c$. Demuestra que $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c}$ (enero 2020).

29.— Sean A, B, C conjuntos de un espacio métrico. La diferencia $A \setminus B$ entre los conjuntos A y B , $B \subset A$, es el conjunto de elementos de A que no pertenecen a B . Justifica la verdad o falsedad de $A \setminus B \subset C \implies A \subset C$ (enero 2020).

30.— Sean tres números naturales tales que su suma vale 20 y el producto de dos de ellos, 4. Demuestra que la suma de los cuadrados de los números es menor que 265 (julio 2020).

31.— En un espacio métrico (E, d) , se considera el conjunto $A \subset E$. Razona la verdad o falsedad de la relación: $A = \overset{\circ}{A} \iff \overset{\circ}{A} \cap Fr(A) = \emptyset$ (julio 2020).

Curso 20/21

32.— Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Razona si $\{a_n\}$ puede no ser convergente ni divergente ni acotada. En caso afirmativo, pon un ejemplo (enero 2021).

33.— A partir de las propiedades de un cuerpo ordenado, demuestra lo siguiente (enero 2021).

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{array} \right\} \implies ac < bd; \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} a < b < 0 \\ c < d < 0 \end{array} \right\} \implies ac > bd$$

34.— Demuestra que la raíz cuadrada positiva de un número real comprendido entre 0 y 1 es mayor que el número, mientras que la de un real mayor que 1 es menor que él (julio 2021).

35.— Sean las funciones f y g definidas de la siguiente manera

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = x + x + \cdots + x \text{ (} x \text{ veces)} \implies g(x) = x \cdot x = x^2$$

Derivando resulta que $f'(x) = 2x$, mientras que

$$g'(x) = (x + x + \cdots + x)' = (1 + 1 + \cdots + 1) = x$$

Explica a qué se debe la diferencia entre ambos resultados (julio 2021).

Curso 21/22

36.— Demuestra que, $\forall a, b > 0$, se cumple $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ (enero 2022).

37.— Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Obtén razonadamente los conjuntos adherente e interior de $\mathbb{Q}$ (enero 2022).

38.— Sean a y b números reales no nulos, tales que $a < b$. Estudia la relación que existe entre sus inversos $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$ (julio 2022).

Curso 22/23

39.— Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que, para todo natural q , existe un entero p tal que se cumple la relación siguiente (*enero 2023*).

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

40.— Sabiendo que los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ tienen estructura de cuerpo, razona si el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ posee dicha estructura (*julio 2023*).

41.— Razona si los siguientes métodos son válidos para calcular el límite que se indica y, en su caso, calcúlalo. **a)** Media aritmética. **b)** Stolz. **c)** L'Hôpital (*julio 2023*).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{n}$$

Curso 23/24

42.— Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Razona la verdad o falsedad de: $b - a < b$ (*enero 2024*).

43.— Se considera el conjunto siguiente.

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{(n+1)^2} < x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

- a) Interpreta geoméricamente el conjunto.
 - b) Razona si A es abierto y calcula su conjunto exterior.
 - c) Razona si es posible obtener la intersección de A con su frontera, sin necesidad de calcular ésta (*enero 2024*).
-

44.— Sea n un número primo mayor que 2. Razona si $n^2 + 1$ puede ser primo (*julio 2024*).

45.— Demuestra que $P(x) = 2x^3 - 6x + 3$ tiene tres raíces reales y obtén intervalos en los que podamos asegurar su existencia (*julio 2024*).

Curso 24/25

46.— Sea el intervalo $[a, b] = [-1, 1]$. Se pide:

- a) Enunciar los teoremas de 1) Bolzano; 2) Weierstrass; 3) Rolle; 4) Lagrange.
 - b) Encontrar una función f que cumpla en $[a, b]$ las condiciones exigidas para los teoremas 1) y 2) (la misma para ambos), mostrando que se obtienen los resultados anunciados.
 - c) Ídem para los teoremas 3) y 4) (*enero 2025*).
-

47.— Define brevemente sucesión convergente, divergente y acotada. Razona la verdad o falsedad de la frase: “Si $\{a_n\}$ no está acotada, no converge, sino que diverge” (*julio 2025*).

7.2. Soluciones a las cuestiones

1.- La afirmación es verdadera. Se justifica por reducción al absurdo:

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y supongamos que $x + x \in \mathbb{Q}$. Entonces:

$$x + x = 2x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \implies x = \frac{m}{2n} \in \mathbb{Q}$$

contra la hipótesis. Concluimos que la suma de dos irracionales iguales es irracional.

2.- Puede deducirse que A posee infinitos elementos, como se justifica a continuación:

El número de elementos de A sólo puede ser finito o infinito. Supongamos que es finito y su número de elementos es $n \in \mathbb{N}$.

Si $B \subset A$, todo elemento de B está en A, por lo que el número de elementos de B será $m \leq n$. Como $B \neq A$ (A posee algún elemento que no es de B), entonces $m < n$ y no se puede establecer una biyección entre ambos conjuntos, lo que contradice el enunciado. Concluimos que el número de elementos de A es infinito.

3.- Lo demostraremos de dos maneras: directamente y por reducción al absurdo.

a) $a > b \implies a - b > 0 \implies a - b = |a - b|.$

$$a > c \implies a - c > 0 \implies a - c = |a - c|.$$

$$\text{Entonces: } b > c \implies -b < -c \implies a - b < a - c \implies |a - b| < |a - c|.$$

b) $a > b \implies a - b > 0 \implies a - b = |a - b|.$

$$a > c \implies a - c > 0 \implies a - c = |a - c|.$$

Supongamos $|a - b| \geq |a - c|$. Entonces:

$$a - b \geq a - c \implies -b \geq -c \implies b \leq c$$

lo que contradice el enunciado. Concluimos que $|a - b| < |a - c|$.

4.-

a) **Teorema de Bolzano:** “Si una función continua toma distinto signo en los extremos de un intervalo cerrado, existe un punto intermedio en el que la función se anula”.

En este caso, f es continua en un intervalo cerrado pero su valor es la raíz cuadrada positiva de x , por lo que no toma valor negativo en ningún punto y el teorema no se puede aplicar.

b) **Propiedad de Darboux:** “Si una función continua toma distinto valor en los extremos de un intervalo cerrado, toma todos los valores intermedios al menos una vez”.

La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[1, 2]$, por lo que alcanza todos los valores entre 1 y $\sqrt{2}$:

$$\forall y / 1 < y < \sqrt{2}, \exists \xi \in (1, 2) / \sqrt{\xi} = y \implies \xi = y^2$$

c) **Teorema de Weierstrass:** “Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza en él un máximo y un mínimo”.

Al ser f continua en $I = [1, 2]$ alcanza extremos en I . Como es creciente, alcanzará el mínimo en $x = 1$, ($f(1) = 1$), y el máximo en $x = 2$, ($f(2) = \sqrt{2}$).

- d) **Teorema de Rolle:** “Si una función, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , toma el mismo valor en los extremos del intervalo, existe un punto intermedio en que su derivada se anula”.

La función es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$ pero, al ser estrictamente creciente, no existen dos puntos en los que tome igual valor, por lo que no se puede aplicar el teorema.

- e) **Teorema de Cauchy.** “Sean dos funciones f y g , continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Entonces $\exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) [g(b) - g(a)] = g'(\xi) [f(b) - f(a)]$ ”.

En el intervalo $[1, 2]$, la función $f(x) = \sqrt{x}$ cumple las condiciones del teorema pero, sin definir una segunda función, no puede asegurarse nada.

- f) **Teorema de Lagrange.** “Sea f , continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces $\exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ”.

La función es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$, por lo que el teorema puede aplicarse:

$$\exists \xi \in (1, 2) / f'(\xi) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1 \implies f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \sqrt{2} - 1 \implies \xi = \dots = \frac{1}{12 - 8\sqrt{2}}$$

5.— Sea $x \cdot y = 0$ y queremos demostrar que alguno de los factores es nulo. Si $x = 0$, ya está demostrado. Si $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1} \in K / x^{-1} \cdot x = 1$. Multiplicando ambos miembros por x^{-1} y sabiendo que $0 \cdot y = y \cdot 0 = 0, \forall y \in K$, resulta:

$$x \cdot y = 0 \implies x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 \implies 1 \cdot y = 0 \implies y = 0$$

luego uno de los dos es nulo. También puede razonarse por reducción al absurdo, suponiendo que ninguno es nulo, por ejemplo x . Llegamos a la contradicción de que y es nulo. Si suponemos $y \neq 0$, resulta análogamente $x = 0$. Luego alguno de los dos debe ser nulo.

6.— Por la definición de conjunto cerrado, $A = \overline{A}$. Por las propiedades de la frontera $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A} \subset \overline{A}$ (o bien $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} \subset \overline{A}$). Entonces $Fr(A) \subset \overline{A} = A \implies Fr(A) \subset A$.

7.—

- a) **Verdadera.** Un punto de acumulación de A es el que tiene puntos de A distintos de él, tan cerca como se quiera. Al ser α el límite, tiene elementos de $\{a_n\}$ tan cerca como se quiera. Como los elementos son distintos de α , éste cumple la condición de punto de acumulación.
- b) **Verdadera.** Un punto frontera de A es el que tiene puntos de A y de su complementario tan cerca como se quiera. Al ser α el límite, cumple la primera condición. Por otro lado, al ser los puntos de $\{a_n\}$ distintos entre sí y distintos de α , son aislados y entre dos cualesquiera habrá infinitos puntos de $\mathbb{R} \setminus A$. Como los puntos de la sucesión llegan a estar tan cerca de α como queramos, lo mismo ocurrirá con esos puntos intermedios. Entonces α tiene también puntos de $\mathbb{R} \setminus A$ tan cerca como queramos y se cumple la condición de punto frontera.
- c) **Verdadera.** Un punto es interior de A si existe una bola abierta centrada en él contenida en A . Al ser aislados los puntos a_n , existe una bola centrada en cada uno de ellos que no contiene ningún otro punto de A , luego a_n tiene puntos de $\mathbb{R} \setminus A$ tan cerca como queramos. Entonces no puede existir una bola centrada en a_n y contenida en A , pues, por pequeño que sea su radio, contendrá puntos de $\mathbb{R} \setminus A$. Luego no existen puntos interiores de A .
-

8.–

a) La función f es monótona creciente $\iff \forall x_1 < x_2, f(x_1) \leq f(x_2)$

b) La función f es monótona decreciente $\iff \forall x_1 < x_2, f(x_1) \geq f(x_2)$

c) Demostración. $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_2 < -x_1$.

Entonces, al ser f monótona creciente, $\forall x_1 < x_2, f(-x_2) \leq f(-x_1) \Rightarrow g(x_2) \leq g(x_1) \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$. Luego g es monótona decreciente.

9.–

a) **Verdadero.** Por la propiedad de Darboux (del valor intermedio), una función continua alcanza cualquier valor intermedio entre dos dados. Como $f(a) = -1$, $f(b) = 2$ y se cumple $-1 < \sqrt{2} < 2$, entonces $\exists \alpha / f(\alpha) = \sqrt{2}$.

b) **Falso.** La propiedad anterior no asegura que f alcance el valor 2 en el interior del intervalo, pues no es intermedio entre -1 y 2 .

Contraejemplo: si consideramos la función $y = x$ en el intervalo $[a, b] = [-1, 2]$, no alcanza el valor 2 en el interior del intervalo, sino sólo en su extremo b .

c) **Falso.** El teorema de Weierstrass asegura que f , continua en $[a, b]$, alcanza en él un máximo y un mínimo. Pero no asegura que estos valores se alcancen en el interior del intervalo.

Contraejemplo: si consideramos la función $y = x$ en $[a, b] = [-1, 2]$, no alcanza el máximo en el interior del intervalo, sino en su extremo b .

10.–

a) No se puede afirmar nada. Sus términos pueden ser positivos, por ejemplo $a_n = \frac{1}{n}$; negativos, por ejemplo $a_n = -\frac{1}{n}$; o sin signo definido, por ejemplo $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

b) La expresión es cierta y se justifica en tres pasos:

1. Si $l > 0$, a partir de un cierto índice los términos son también mayores que 0 (propiedad 2 de los límites). Luego $\exists n / 0 < a_m, \forall m \geq n$.
2. Por ser $\{a_n\}$ creciente, $a_m \leq a_{m+1}, \forall m$.
3. Por ser $\{a_n\}$ creciente, $a_{m+1} \leq l, \forall m$. De lo contrario (reducción al absurdo) existiría un $m / a_{m+1} > l$. Como la sucesión es creciente, los siguientes términos cumplirán

$$l < a_{m+1} \leq a_{m+2} \leq a_{m+3} \dots \implies 0 < a_{m+1} - l \leq a_{m+2} - l \leq a_{m+3} - l \dots$$

luego la distancia de los términos de $\{a_n\}$ a l no tiende a 0 y l no puede ser el límite.

11.–

a) El conjunto puede expresarse como: $A = \{x \in I / x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$; o bien $A = I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

b) Sabemos que, en $(\mathbb{R}, ||)$, una bola abierta $B(x, r)$ es el intervalo $(x - r, x + r)$. Y que entre dos números reales cualesquiera hay infinitos irracionales. Veamos que $\bar{A} = [a, b]$:

- 1) Sea un real cualquiera $x \in (a, b)$. Tomamos una bola de radio r , la mitad de la distancia entre x y b . Si $0 < r' < r$, los puntos x y $x + r'$ –contenidos en la bola– son reales, luego en ella hay infinitos irracionales de A , por lo que todo real x de (a, b) es de adherencia de A .
- 2) Los extremos a y b de I , pertenezcan al intervalo o no, tendrán elementos de éste –rationales e irracionales– tan cerca como queramos, luego pertenecen a $\overline{A}$.
- 3) Ningún real $x < a$ pertenece a $\overline{A}$, pues podemos encontrar una bola centrada en él, de radio menor que $(a - x)/2$, que no contendrá puntos de I . En efecto, todo elemento y de la bola cumplirá: $y < x + (a - x)/2 = (x + a)/2 < a \implies y \notin I$ (análogamente con $x > b$).
- c) Ningún punto de A es aislado, pues todo irracional tiene otros tan cerca como queramos. Entonces $Aisl(A) = \emptyset$ y $A' = \overline{A} \setminus Aisl(A) = \overline{A} = [a, b]$.
- d) Ningún punto de A es interior, pues todo irracional tiene racionales tan cerca como queramos, luego no existe ninguna bola que sólo contenga irracionales. Entonces $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ y $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} = [a, b]$.

12.–

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} k^{1/n} = k^0 = 1$, pues $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. La afirmación es verdadera.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k^{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} k^{\frac{\ln n}{n}} = k^0 = 1$, pues $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$, ya que el neperiano de n es despreciable frente a n (infinito logarítmico despreciable frente al potencial). La afirmación es verdadera.
- c) $\sqrt[n]{(\ln n)^k} = (\ln n)^{k/n} = e^{(\ln(\ln n)^{k/n})} = e^{\frac{k}{n} \ln(\ln n)}$. El exponente $\frac{k \ln(\ln n)}{n}$ tiende a 0, ya que el neperiano de $\ln n$ es despreciable frente a $\ln n$, luego es despreciable frente a n . Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(\ln n)^k} = e^0$ y la afirmación es verdadera.

13.–

- a) De dos maneras: 1) Por la definición; y 2) por “la derivada como límite de derivadas” (si f es continua).
 - b) 1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin |h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin |h| = 0 = f'(0)$.
 2. La función f es continua en $a = 0$, pues las funciones seno y valor absoluto son continuas en $\mathbb{R}$ y la composición y el producto de funciones continuas es continua.
 - Si $x > 0$, $f(x) = x \sin x \implies f'(x) = \sin x + x \cos x \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 + 0 \cdot 1 = 0 = f'(0^+)$.
 - Si $x < 0$, $f(x) = -x \sin x \implies f'(x) = -\sin x - x \cos x \implies \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 - 0 \cdot 1 = 0 = f'(0^-)$.
- Como $f'(0^+) = f'(0^-)$, f es derivable en $a = 0$ y se cumple $f'(0) = 0$.

14.– El teorema de Weierstrass afirma que “toda función continua en un intervalo cerrado alcanza en él un máximo y un mínimo”. Como el enunciado no asegura que I sea cerrado, no podemos asegurar nada a partir del teorema. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ en el intervalo $(0, 1)$ es continua, pero no tiene máximo ni mínimo. Luego la afirmación es falsa.

15.— El teorema del extremo relativo dice que “si f es derivable en I y posee un extremo relativo en un punto $a \in \overset{\circ}{I}$, entonces $f'(a) = 0$ ”. En nuestro caso podemos asegurar que $f'(a) = 0$.

Posición de los extremos: En las condiciones del teorema no se considera la frontera del dominio, ni los puntos en que f no sea derivable. Luego los posibles extremos de una función f se encuentran en: a) puntos interiores del dominio en los que $f' = 0$; b) la frontera del dominio; c) puntos en que f no sea derivable.

16.—

- a) El teorema de Weierstrass afirma que “toda función continua en un intervalo cerrado, alcanza en él en máximo y un mínimo”, luego dicha función tendrá supremo e ínfimo, por lo que estará acotada. Como el enunciado no dice que I sea cerrado, no podemos asegurar la acotación de f a partir del teorema. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ en $(0, 1)$ es continua, pero tiende a ∞ cuando $x \rightarrow 0$. Luego la afirmación es falsa.
- b) El teorema del extremo relativo dice que “si f es derivable en I y posee un extremo relativo en un punto $a \in \overset{\circ}{I}$, entonces $f'(a) = 0$ ”. El enunciado no asegura que a sea interior de I , luego no podemos asegurar que $f'(a) = 0$ a partir del teorema. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ en $[0, 1]$ tiene un mínimo en $x = 0$ y un máximo en $x = 1$, pero en ambos puntos $f'(x) = 1 \neq 0$, luego la afirmación es falsa.

17.— Dado un espacio métrico (E, d) y un conjunto $A \subset E$, un punto $x \in E$ es interior de A si y sólo si existe una bola abierta centrada en x y contenida en A , es decir si

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ / B(x, r) \subset A$$

En (E, d) , el conjunto interior de A ($\overset{\circ}{A}$) está formado por los puntos interiores de A .

El conjunto $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ está formado por los irracionales de la recta real. Dicho conjunto no tiene puntos interiores, pues no existe ninguna bola centrada en un irracional y contenida en A , es decir, formada sólo por irracionales. Esto se debe a que, entre dos irracionales (por tanto, reales), siempre existe algún racional (es una de las propiedades de los números reales).

Como consecuencia, el interior del conjunto de los irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es vacío.

18.—

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} + 1 = 2$, pues $a_n \sim b_n$.

“Si el cociente de dos infinitésimos tiene límite finito y no nulo, ambos tienen el mismo orden”, luego la afirmación es verdadera.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} - 1 = 0$, pues $a_n \sim b_n$.

“Si el cociente de dos infinitésimos es un infinitésimo, el numerador es de mayor orden”, luego la afirmación es falsa.

c) $e^{a_n} - e^{b_n} = \underbrace{e^{b_n}}_{\rightarrow 1} (e^{a_n - b_n} - 1) \sim e^{a_n - b_n} - 1 \sim a_n - b_n$.

“La diferencia de dos infinitésimos equivalentes de orden p es de orden superior a p ”, luego la afirmación es falsa.

19.— Un modo de resolver el problema es obtener la derivada de la función $y = \operatorname{argth} x$, expresada en forma logarítmica:

$$y' = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' : \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

La derivada puede también obtenerse a partir de la definición de función inversa:

$$y = \operatorname{argth} x \implies x = \tanh y \implies 1 = (1 - \tanh^2 y) y' \implies y' = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

20.—

a) Teorema de Bolzano: f continua en $[a, b]$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) / f(\xi) = 0$.

Ejemplo: $f(x) = x$, continua (función identidad).

Comprobación: $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$; $\exists \xi = 0 / f(\xi) = 0$.

b) Teorema de Weirstrass: f , continua en $[a, b]$, alcanza en él un máximo y un mínimo.

Ejemplo: $f(x) = x^2$, continua (potencia natural de x).

Comprobación: $x_m = 0 \Rightarrow f(x_m) = 0$ (mínimo); $x_M = \pm 1 \Rightarrow f(x_M) = 1$ (máximo).

c) Teorema de Rolle: f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , tal que $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = 0$.

Ejemplo: $f(x) = x^4$, continua y derivable en $\mathbb{R}$ (potencia natural de x).

Comprobación: $f(-1) = f(1) = 1$; $\exists \xi = 0 / f'(\xi) = 0$

d) Teorema de Lagrange: f continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ejemplo: $f(x) = x^3$, continua y derivable en $\mathbb{R}$ (potencia natural de x).

Comprobación: $f'(x) = 3x^2$; $3\xi^2 = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 1 \Rightarrow \xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

e) El teorema de Bolzano (apdo. **a**)) exige que la función tome valores de distinto signo en los extremos del intervalo, mientras que el de Rolle (apdo. **c**)) exige que ambos valores sean iguales. Luego no existe ninguna función válida para los cuatro casos en el mismo intervalo.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ verifica las condiciones de los apartados **b**), **c**) y **d**) y toma valores de distinto signo en el intervalo, aunque no en los extremos. Para que se verifique también la condición de **a**), usamos para ese caso el subintervalo $[0, 1] \subset [-1, 1]$. Entonces:

a. $f(0) \cdot f(1) < 0$; $\xi^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}$, pues la solución $-\frac{1}{2}$ no pertenece a $[0, 1]$.

b. Los extremos se dan en $x_m = 0 \Rightarrow f(x_m) = -\frac{1}{4}$ y en $x_M = \pm 1 \Rightarrow f(x_M) = \frac{3}{4}$.

c. $f(-1) = f(1) = \frac{3}{4}$; $\exists \xi = 0 / f'(\xi) = 0$.

d. $f'(x) = 2x$; $2\xi = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 0 \Rightarrow \xi = 0$.

21.— Lo hacemos de tres maneras, dos por equivalencias y utilizando conjugados.

a) A partir de la tabla de equivalencias,

$$1. \sqrt[p]{1+\theta(x)} - 1 \sim \frac{\theta(x)}{p} \implies \sqrt{x} - 1 = \sqrt{1+x-1} - 1 \sim \frac{x-1}{2}$$

$$2. \theta(x) \sim \ln(1+\theta(x)) \implies \sqrt{x} - 1 \sim \ln(1+\sqrt{x}-1) = \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x \sim \frac{1}{2}(x-1)$$

b) Utilizando conjugados. Escribimos $\sqrt{x} - 1$, en función de $x - 1$:

$$\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1) \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \implies \sqrt{x} - 1 \sim \frac{1}{2}(x - 1)$$

22.— Tenemos dos opciones: $\{a_n\}$ converge a $l \in \mathbb{R}$ o bien $\{a_n\}$ diverge, es decir $|a_n| \rightarrow \infty$.

a) Si $a_n \rightarrow l$, puede ser $l \geq 0$. Entonces:

1. Si $l > 0$, los términos serán positivos a partir de uno dado, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{a_n} = \sqrt[4]{l}$.
2. Si $l = 0$, o $a_n \rightarrow 0^+$ o $a_n \not\rightarrow 0^+$. Si $a_n \rightarrow 0^+$, todos sus términos son no negativos, por lo que $\sqrt[4]{a_n} \rightarrow 0$; si $a_n \not\rightarrow 0^+$, tendrá ∞ términos negativos, por lo que $\not\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{a_n}$.
3. Si $l < 0$, los términos serán negativos a partir de uno dado, por lo que $\not\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{a_n}$.

b) Si $|a_n| \rightarrow \infty$, o bien $a_n \rightarrow \pm\infty$ o bien a_n no tiene signo constante. Entonces:

1. Si $a_n \rightarrow +\infty$, los términos serán positivos a partir de uno dado y $\sqrt[4]{a_n} \rightarrow +\infty$
2. Si $a_n \rightarrow -\infty$, los términos serán negativos a partir de uno dado, por lo que $\not\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{a_n}$.
3. Si a_n no tiene signo constante, $\not\sqrt[4]{a_n}$ para ∞ valores de n , por lo que $\not\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{a_n}$.

En definitiva, si a_n tiende a $l > 0$ o bien a $l = 0$ por la derecha, entonces $\sqrt[4]{a_n}$ tiende a $\sqrt[4]{l}$. Si $a_n \rightarrow +\infty$, entonces $\sqrt[4]{a_n} \rightarrow +\infty$. En los demás casos no existe límite, finito ni infinito.

23.— La afirmación es falsa pues, al ser nulo el límite de ambas sucesiones, el límite del cociente es indeterminado en general. Como $0 < a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$, podemos dividir y resulta:

$$\frac{a_n}{b_n} < 1 \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq 1$$

Es decir, sólo podemos asegurar que el límite del cociente será menor o igual que 1.

Como contraejemplos busquemos sucesiones monótonas de límite 0, que cumplan $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$.

1. $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{2}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$.
2. $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

24.— La afirmación es verdadera. Demostramos la primera parte por reducción al absurdo y la segunda con un ejemplo.

a) Si $x \in \mathbb{Q}$, $x + \pi$ es irracional. De lo contrario, sería racional y tendríamos:

$$x + \pi = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \implies \pi = \frac{m}{n} - x \in \mathbb{Q}$$

con lo que concluiríamos que π es racional, lo cual es falso.

b) Si $x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot \pi$ puede ser racional, por ejemplo si $x = 0$. En efecto, $0 \cdot \pi = 0 \in \mathbb{Q}$ (de hecho, este es el único caso en que el producto de un racional por un irracional es racional).

25.— Las dos primeras afirmaciones son verdaderas, la tercera es falsa:

a) Si el conjunto es finito (es decir, tiene un número finito de elementos), podemos comparar cada uno con todos los demás y obtener el máximo M y el mínimo m . Entonces M es una cota superior del conjunto y m una cota inferior, por lo que el conjunto está acotado.

b) Un conjunto infinito (es decir, con infinitos elementos) puede ser numerable (es decir, biyectivo con $\mathbb{N}$). El ejemplo más sencillo es el propio $\mathbb{N}$. También son numerables el conjunto de los pares, el de los impares, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \dots$

c) Un ejemplo de conjunto acotado no numerable es el intervalo $(0, 1)$. Como se demuestra por reducción al absurdo (demostración debida a Cantor), no podemos establecer una biyección entre sus infinitos elementos y los números naturales, luego dicho conjunto no es numerable, ni lo es, por tanto, todo $\mathbb{R}$. Tampoco lo es cualquier intervalo no vacío en $\mathbb{R}$.

26.— Que la tangente a la curva en el origen sea horizontal equivale a que su pendiente sea nula. Dicha pendiente viene dada por el valor de la derivada de f en $x = 0$. Veamos que $f'(0) = 0$:

1. Si la gráfica es simétrica, $f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$, luego f es una función par.

2. Si f es par, entonces: $f'(-x) = \frac{df(-x)}{d(-x)} = \frac{df(x)}{-dx} = -\frac{df(x)}{dx} = -f'(x)$, luego f' es impar.

3. Si f' es impar, como $0 = -0$, $f'(0) = f'(-0) = -f'(0) \implies 2f'(0) = 0 \implies f'(0) = 0$.

27.—

a) $B(P, r) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < r \right\}$.

b) Como la distancia entre P y (x, y) (que es ≥ 0) es menor que r , éste valor ha de ser positivo. El ínfimo de los números reales positivos es el 0, que no pertenece a $\mathbb{R}^+$. Entonces $\mathbb{R}^+$ no tiene mínimo y no existe la bola abierta de radio mínimo.

Nota: Si se tratara de una bola cerrada la condición sería $0 \leq d(P, (x, y)) \leq r$, por lo que r podría valer 0. La bola cerrada de centro P y radio mínimo (nulo) es el punto P .

c) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} / -y < x < y \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} / y > |x| \right\}$

- d) La frontera de A es el conjunto de puntos (x, y) tales que $y = |x|$. Como este conjunto tiene intersección vacía con A, resulta que A es abierto, luego todos sus puntos son interiores. Entonces para cada punto existe una bola abierta centrada en él y contenida en A, por lo que se cumple la condición de entorno, luego A es entorno de todos sus puntos.

El punto $P(1, 2)$ cumple $y > |x|$, luego $P \in A$, luego A es entorno de P.

Nota. Este resultado es una propiedad general: *Un abierto es entorno de todos sus puntos.*

28.— Lo demostramos por reducción al absurdo. Para demostrar que

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c}$$

suponemos lo contrario, es decir:

$$\frac{a}{1+a} > \frac{b+c}{1+b+c}$$

de donde resulta:

$$a(1+b+c) > (1+a)(b+c) \implies a + a(b+c) > b+c + a(b+c) \implies a > b+c$$

que contradice la hipótesis, con lo que queda demostrada la desigualdad.

29.— Sabemos que B está contenido en A, pero no se dice nada de la relación entre B y C. Entonces, si $B \not\subset C$, los elementos de A que pertenecen a B tampoco formarán parte de C, por lo que A no estará contenido en C. Luego la afirmación es falsa.

Ejemplos: 1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1\}$. 2) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}$, $C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 3) $A = B \neq \phi$, $C = \phi$.

30.— Sean a, b, c los tres números. Al ser naturales, las dos únicas opciones para que el producto valga 4 son que ambos valgan 2 o que uno de ellos valga 1 y el otro 4. Analizamos ambas:

$$1. \ a = b = 2 \implies c = 20 - 2 - 2 = 16. \text{ Entonces } a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 2^2 + 16^2 = 264 < 265.$$

$$2. \ a = 1, b = 4 \implies c = 20 - 1 - 4 = 15. \text{ Entonces } a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 4^2 + 15^2 = 242 < 265.$$

con lo que queda demostrado que la suma de los cuadrados es menor que 265.

31.— La relación contiene dos igualdades. Analizamos cada una.

1. $A = \overset{\circ}{A}$ es la condición de conjunto abierto (“aquel que coincide con su interior”).

2. $\overset{\circ}{A} \cap Fr(A) = \phi$ es una propiedad general de los conjuntos en un espacio métrico (“el interior y la frontera no tienen puntos en común”, pues “un punto frontera no es ni interior ni exterior”).

Entonces las dos igualdades no pueden ser equivalentes, por lo que la relación es falsa.

Ejemplo (sirve cualquier conjunto no abierto). Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ y $A = [1, 2]$. Entonces $\overset{\circ}{A} = (1, 2) \implies A \neq \overset{\circ}{A}$ y no se cumple la primera igualdad. Sin embargo, $Fr(A) = \{1, 2\} \implies \overset{\circ}{A} \cap Fr(A) = \phi$, luego se cumple la segunda, por lo que las dos igualdades no son equivalentes.

32.— Para que la sucesión no sea convergente ni divergente, ha de ser oscilante. Para que no sea acotada ha de tener al menos una subsucesión de términos no acotados. Entonces cumplirá las tres condiciones, por ejemplo, una sucesión oscilante, tal que la subsucesión de los pares sea divergente y la de los impares converja, como la siguiente:

$$\{a_n\} = 1, 2, 1, 4, 1, 6, \dots, 1, n, \dots, \text{ es decir } a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ impar} \\ n, & n \text{ par} \end{cases}$$

33.— Usaremos en el apdo. **a)** la compatibilidad del orden con el producto, en **b)** la propiedad d) de un cuerpo ordenado y en ambos la propiedad transitiva de la relación de orden.

a) A partir del enunciado: $\left\{ \begin{array}{l} a < b, \ c > 0 \implies ac < bc \\ c < d, \ b > 0 \implies bc < bd \end{array} \right\} \implies ac < bd$

b) A partir del enunciado: $\left\{ \begin{array}{l} a < b, \ c < 0 \implies ac > bc \\ c < d, \ b < 0 \implies bc > bd \end{array} \right\} \implies ac > bd$

34.— Para demostrar lo que se pide utilizaremos dos propiedades de las desigualdades en $\mathbb{R}$:

1. Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por un número positivo, ésta se mantiene (orden compatible con el producto).
2. Si aplicamos una función estrictamente creciente a los dos miembros de una desigualdad, ésta se mantiene (razonado en clase).

Entonces, teniendo en cuenta que $x > 0$ y que la función raíz cuadrada es estrictamente creciente:

a) $0 < x < 1 \xrightarrow{\cdot x} x^2 < x \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} |x| < \sqrt{x} \xrightarrow{x > 0} x < \sqrt{x}.$

b) $x > 1 \xrightarrow{\cdot x} x^2 > x \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} |x| > \sqrt{x} \xrightarrow{x > 0} x > \sqrt{x}.$

35.— Del enunciado se deduce que f es una función derivable, mientras que g está definida sólo para valores naturales de x , por lo que no es una función continua, luego no es derivable. Entonces no tiene sentido aplicar a g la regla habitual de derivación.

36.— Lo demostramos de dos maneras:

1. A través de equivalencias, tomando neperianos en ambos lados:

$$a^{\ln b} = b^{\ln a} \iff \ln(a^{\ln b}) = \ln(b^{\ln a}) \iff \ln b \ln a = \ln a \ln b,$$

lo cual es cierto, pues el producto de números reales es conmutativo.

2. Directamente:

$$a^{\ln b} = (e^{\ln a})^{\ln b} = e^{\ln a \ln b} = e^{\ln b \ln a} = (e^{\ln b})^{\ln a} = b^{\ln a}$$

37.— Nota previa: en $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, una bola abierta $B(x, r)$ es el intervalo $(x - r, x + r)$. Entonces:

a) Adherencia de $\mathbb{Q}$. Veamos que todo número real es de adherencia de $\mathbb{Q}$.

Un punto $x \in \mathbb{R}$ es de adherencia de $\mathbb{Q} \iff \forall r > 0, B(x, r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ (en toda bola centrada en x existen números racionales).

Sea un número real x . Tomamos un elemento cualquiera de la bola, p. ej. $x + r/2$. Sabemos que entre x y $x + r/2$ (ambos reales) existen infinitos racionales, luego x es de adherencia de $\mathbb{Q}$. Es decir, todo real es de adherencia de $\mathbb{Q}$, luego $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

b) Interior de $\mathbb{Q}$. Veamos que ningún real es interior de $\mathbb{Q}$.

Un punto $x \in \mathbb{R}$ es interior de $\mathbb{Q} \iff \exists r > 0, B(x, r) \subset \mathbb{Q}$ (en alguna bola centrada en x sólo existen racionales, luego no hay ningún irracional).

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $B(x, r)$ una bola con centro en x . Tomamos un elemento cualquiera de la bola, p. ej. $x + r/2$. Sabemos que entre x y $x + r/2$ hay infinitos irracionales, luego $B(x, r)$ no está contenida en $\mathbb{Q}$. Entonces ningún real puede ser interior de $\mathbb{Q}$, por lo que $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

38.— Usaremos dos propiedades de un cuerpo ordenado:

1. Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por $k > 0$, la desigualdad se mantiene. Si $k < 0$, la desigualdad cambia de sentido.
2. El inverso de un número positivo es positivo y el de un número negativo es negativo (se demuestra por reducción al absurdo).

Estudiamos tres opciones: a) ambos positivos, b) ambos negativos, c) de distinto signo.

$$\text{a)} \quad 0 < a < b \xrightarrow{\frac{1}{a} > 0} a \cdot \frac{1}{a} < b \cdot \frac{1}{a} \implies 1 < \frac{b}{a} \xrightarrow{\frac{1}{b} > 0} \frac{1}{b} < \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b} \implies \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$\text{b)} \quad a < b < 0 \xrightarrow{\frac{1}{a} < 0} a \cdot \frac{1}{a} > b \cdot \frac{1}{a} \implies 1 > \frac{b}{a} \xrightarrow{\frac{1}{b} < 0} \frac{1}{b} < \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b} \implies \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$\text{c)} \quad a < 0 < b \implies \frac{1}{a} < 0, \frac{1}{b} > 0 \implies \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$$

Es decir, si a y b tienen igual signo, $a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Si tienen distinto signo, $a < b \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

39.— Al ser $q \in \mathbb{N}$, multiplicando los tres miembros de la desigualdad por q , obtenemos una desigualdad equivalente:

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q} \xleftrightarrow{\cdot q} p \leq xq < p+1$$

que se cumple $\forall xq \in \mathbb{R}$, tomando como p la parte entera de xq .

Es decir: dado $x \in \mathbb{R}$, para todo $q \in \mathbb{N}$ existe $p = E(xq)$, tal que se cumple la desigualdad.

40.— Las condiciones que debe cumplir un conjunto para ser cuerpo son: 1) existencia de dos operaciones cerradas $(+ \text{ y } \cdot)$; 2) respecto a $+$, cumplir las propiedades asociativa, conmutativa, existencia de neutro y de opuesto; 3) respecto a $\cdot$, cumplir las propiedades asociativa, existencia de unidad y de inverso; 4) cumplir las propiedad distributiva de $\cdot$ respecto a $+$.

El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de los irracionales posee la propiedad asociativa tanto respecto a $+$ como a $\cdot$, así como la conmutativa respecto a $+$, pues sus elementos son números reales. También existen y son irracionales el opuesto y el inverso de cualquier irracional.

Sin embargo, no se cumplen varias condiciones, por lo que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no tiene estructura de cuerpo:

1. Los irracionales son reales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, luego el elemento nulo de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ha de ser el mismo que el de $\mathbb{R}$, es decir el 0. Como $0 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, este conjunto no tiene elemento nulo, luego no es cuerpo. El mismo razonamiento es válido para el elemento unidad, 1.
 2. La suma de irracionales puede no serlo. Ejemplo: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, que suman $0 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 3. El producto de irracionales puede no serlo. Ejemplo: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, cuyo producto es $2 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
-

41.—

- a) El cociente representa la media aritmética de los n primeros términos de la sucesión $\{1/n\}$, por lo que el método de la media aritmética es válido para calcular el límite.
Si $\{a_n\}$ tiene límite a , la media aritmética de sus términos tiene el mismo límite. Como $\{1/n\} \rightarrow 0$, el límite propuesto vale 0.
- b) El denominador n es el término general de una sucesión de términos positivos, estrictamente creciente y divergente, luego cumple las condiciones para aplicar el criterio de Stolz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \stackrel{\text{Si } \exists}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \dots + \frac{1}{n} - \left(1 + \dots + \frac{1}{n-1}\right)}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1} = 0$$

luego el límite es igual a 0.

- c) La regla de L'Hôpital sirve para calcular límites indeterminados del cociente de funciones, de la forma $0/0$ e ∞/∞ . En este caso, se trata de un límite del cociente de sucesiones, por lo que no es válido. Además, no conocemos en principio el valor del numerador. Aunque el denominador tiende a ∞ , no se trata de un cociente de la forma ∞/∞ .
-

42.— La relación es falsa. Un modo de probarlo es utilizando equivalencias, es decir:

$$b - a < b \iff b < b + a \iff 0 < a$$

La inecuación se cumple **si y sólo si** $a > 0$. Si $a \leq 0$ no se cumplirá, luego la relación es falsa. Puede probarse también utilizando implicaciones:

$$b - a < b \implies b < b + a \implies 0 < a$$

lo que nos dice que $a > 0$ es condición necesaria. Si $a \leq 0$, la inecuación no se cumple.

O basta usar un contraejemplo. El más sencillo es dar a a el valor nulo, con lo que quedaría $b < b$, que es falso.

43.—

- a) Interpretación geométrica. La curva $x^2 + y^2 = 1/n^2$ es la circunferencia de radio $1/n$, mientras que $x^2 + y^2 = 1/(n+1)^2$ es la de radio $1/(n+1)$. Entonces el conjunto A está formado por coronas circulares, de radios interior y exterior $1/(n+1)$ y $1/n$, respectivamente, sin incluir las circunferencias que las delimitan.

- b) ¿Es A abierto? Puesto que las circunferencias que delimitan las coronas no pertenecen al conjunto, todo punto $x \in A$ puede ser el centro de una bola contenida en A (basta que el radio sea menor que la distancia de x a la circunferencia más próxima), con lo que cumple la condición de punto interior. Así pues, $\forall x \in A$, tenemos:

$$x \in A \implies x \in \overset{\circ}{A} \implies A \subset \overset{\circ}{A} \implies A = \overset{\circ}{A} \implies A \text{ es abierto}$$

Cálculo de $Ext(A)$. Obtenemos primero la adherencia. Para ello añadimos a A las circunferencias, así como el $(0, 0)$, que tiene puntos de A tan próximos como se quiera. Resulta:

$$\overline{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{(n+1)^2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0, 0)\}$$

Este conjunto incluye las circunferencias (de radio tan pequeño como se quiera), las coronas entre ellas y el origen (circunferencia de $r = 0$). Es decir, resulta el círculo de radio unidad:

$$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Calculamos ahora el conjunto exterior como complementario de la adherencia, obteniendo:

$$Ext(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1\}$$

- c) Intersección de A con su frontera: Al ser A abierto, tiene intersección vacía con su frontera (La frontera está formada por las circunferencias de radio $1/n$: $x^2 + y^2 = 1/n^2$).

44.— Si n es un número primo mayor que 2, debe ser impar. De lo contrario, no sería primo, pues contendría al factor 2. Pero si n es impar, n^2 también lo es. En efecto:

$$n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \implies n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$$

suma de un número par más 1, es decir impar. Entonces $n^2 + 1$ es par, por lo que no es primo.

45.— Consideramos el polinomio $P(x) = 2x^3 - 6x + 3$. Derivamos y factorizamos:

$$P'(x) = 6x^2 - 6x = 6(x^2 - 1) = 6(x + 1)(x - 1)$$

luego P' tiene 2 raíces reales ($x = \pm 1$). A partir del teorema de Rolle, se razona que P tendrá a lo sumo 3. También podríamos utilizar para ello el teorema fundamental del Álgebra.

Buscamos ahora intervalos en cuyos extremos $P(x)$ tenga distinto signo. Resulta:

$$P(-2) = -1; \quad P(-1) = 7; \quad P(0) = 3; \quad P(1) = -1; \quad P(2) = 7;$$

luego hay cambio de signo entre $x = -2$ y $x = -1$; $x = 0$ y $x = 1$; $x = 1$ y $x = 2$.

Al ser $P(x)$ una función continua, por el T. de Bolzano, podemos asegurar que se anula en los intervalos $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$. Con lo que queda probado que $P(x)$ tiene tres raíces reales.

46.—

- a) 1. Teorema de Bolzano. “Si una función continua en $[a, b]$ toma distinto signo en los extremos del intervalo, entonces se anula en algún punto intermedio”: $\exists c \in (a, b) / f(c) = 0$.
2. Teorema de Weierstrass. “Toda función continua en un intervalo cerrado, alcanza en él un máximo y un mínimo”.
3. Teorema de Rolle. “Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Si $f(a) = f(b)$, existe algún punto intermedio en el que su derivada se anula: $\exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = 0$ ”.
4. Teorema de Lagrange. “Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Existe algún punto intermedio en el que la pendiente de la recta tangente es igual a la de la secante”:

$$\exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

b) La función $f(x) = x$ cumple las condiciones de 1) y 2):

1. $f(-1) = -1$; $f(1) = 1$, luego $\exists c \in (-1, 1) / f(c) = 0$. El punto c es el origen.
2. f es continua en $[-1, 1]$, luego alcanza un máximo y un mínimo. El máximo es $f(1) = 1$ y el mínimo es $f(-1) = -1$.

c) La función $f(x) = x^2$ cumple las condiciones de 3) y 4):

3. f es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$. Cumple $f(-1) = f(1) = 1$. Entonces $\exists \xi \in (-1, 1) / f'(\xi) = 0$. El punto ξ es el origen.
4. f es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$. Entonces:

$$\exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{2} = 0. \quad \text{El punto } \xi \text{ es el origen}$$

47.—

- a) Convergente: es la que tiene límite finito.
- b) Divergente: es aquella cuyo término general tiende a infinito en valor absoluto.
- c) Acotada: es aquella cuyos términos en valor absoluto no superan un cierto valor $k \geq 0$. Es decir, $\exists k \geq 0 / |a_n| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$.
- d) La primera parte de la frase es verdadera, pues toda sucesión convergente está acotada (prop. 8 de los límites); entonces, si no está acotada, no converge.

La segunda parte de la frase es falsa. Que $\{a_n\}$ no esté acotada, significa que no existe una cota $k / |a_n| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$. Pero eso no significa que $|a_n| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por ejemplo, pueden no estar acotados los impares y sí los pares, como en:

$$\{a_n\} = \{1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, \dots\} = \begin{cases} 1, & n \text{ impar} \\ n, & n \text{ par} \end{cases}$$

Esta sucesión no está acotada, luego no converge, pero tampoco diverge, luego es oscilante.

7.3. Problemas de examen

Curso 10/11. Examen de enero

1.- Sea el conjunto $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / n - 1 < x < n, 1 < y < x\}$. Se considera el conjunto A , formado por la unión de todos los posibles conjuntos A_n , $n \in \mathbb{N}$. Se pide: obtener el conjunto $Fr(A)$ y la expresión más simplificada posible del conjunto $\overline{A}$.

2.- Sean $a_n = n^\alpha$, $b_n = \frac{1}{\ln n^\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Estudia la convergencia de la sucesión $\{a_n^{b_n}\}$.

3.- Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^{1/x}}$, se pide:

- a) Razonar si es posible aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $[1, 2]$.
- b) Razonar si es posible aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$.
- c) Si f es discontinua en algún punto, analícese el tipo de discontinuidad.
- d) Calcular los extremos de f .

4.- Integra $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{(1 + x^2)^3}}$.

Curso 10/11. Examen de julio

5.- Obtén el siguiente límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 2^n)^{1/3n}$.

6.- Se consideran todos los posibles rectángulos de perímetro dado P . Llamaremos k a la relación entre la base y la altura de cada uno de ellos ($h = kb$). Se pide expresar el área del rectángulo en función de k y obtener por derivación el valor de k que produce un área máxima, demostrando que se trata de un máximo y calculando dicha área.

7.- Calcula $\int \frac{\ln x^6}{\sqrt{x^2(1 + (\ln x)^2)}} dx$.

Curso 11/12. Examen de enero

8.- Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} + \sqrt[n]{d}}{4} \right)^n$; $a, b, c, d > 0$.

9.- Sea A el conjunto de ceros de la función $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Determina los siguientes conjuntos, justificando las respuestas: A , $\overline{A}$, A' , $\overset{\circ}{A}$, $Fr(A)$.

10.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a^2 - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcula $a \in \mathbb{R}$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Estudia la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

c) Se define ahora:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^3 + x + 1, & x > 0, \end{cases}$$

Obtén el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = 0$.

11.- Obtén los 5 primeros términos no nulos del desarrollo de Mac Laurin de $f(x) = \arctg x^3$. Si al aplicar la expresión obtenida resulta un error mayor que el deseado, ¿qué podemos hacer para conseguir una aproximación más precisa?

12.- Integra $I = \int \frac{e^{2+\cos x} \sen x}{1 + e^{2\cos x}} dx$.

Curso 11/12. Examen de julio

13.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 + \sen x, & x \geq 0 \\ \frac{2x}{2-x}, & x < 0 \end{cases}$

a) Calcula $f'(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Si existe algún punto en donde la función no sea derivable, explica el motivo y calcula las derivadas laterales de f en él.

c) Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, sea cual sea el valor de b (se recomienda utilizar el método de reducción al absurdo).

14.- Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/n)}{\ln n^2 + \ln(n+1)^2}$.

15.- Integra $I = \int \frac{dx}{4e^x + e^{-x}}$.

Curso 12/13. Examen de enero

16.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} (ax^2 + 2b)^{1/x^2}, & x \neq 0 \\ e^2, & x = 0 \end{cases}$

a) Indica para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}^+$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Obtén el valor de la derivada de f para $x \neq 0$.

c) Obtén una aproximación polinómica de orden 4 de $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1-x^2}$ en un entorno de $x = 0$.

17.- Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $1 < a \leq b$.

18.- Integra $I = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - 1} dx$.

19.- Integra $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$.

Curso 12/13. Examen de julio

20.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} a - 1 + \operatorname{sen}(x), & x \geq 0 \\ \frac{ax}{2-x}, & x < 0, \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Se pide obtener el valor de la derivada de $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

21.- Calcula una aproximación polinómica de cuarto orden en un entorno del punto $x = 0$, para la función $g(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

22.- Obtén $\int \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

Curso 13/14. Examen de enero

23.- Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x \left| 1 + \frac{1}{x} \right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de $f(x)$ y dibuja su gráfica en el intervalo $[-4, 4]$.

b) Razona si f satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo $[-1, 0]$ y, en su caso, determina todos los posibles valores medios dados por el teorema.

c) Razona si f satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-3/2, -1/2]$ y, en su caso, determina todos los valores de x para los que se cumple el teorema.

24.- Calcula el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, de la sucesión de término general:

$$a_n = \frac{1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n}{\ln(n^3 + 2n)}$$

25.- Sean el conjunto $H_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / n < x < n + 1; n < y < n + 1\}$ y el conjunto $Z_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y = -n\}$. Sea H el conjunto formado por la unión de todos los posibles H_n y Z el conjunto formado por la unión de todos los posibles Z_n , es decir:

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n, \quad Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$$

Definimos el conjunto $A = H \cup Z$. Se pide:

- a) Dibujar de forma esquemática el conjunto $Fr(A)$.
- b) Obtener el conjunto $\bar{A}$ y $Aisl(A)$ en su expresión más simplificada.
- c) Razonar si A es un conjunto cerrado.
- d) Razonar si A es un conjunto abierto.
- e) Razonar si A es un conjunto compacto.

26.- Integra $I = \int \frac{x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

27.- Integra $I = \int \frac{\sen x \cos x}{\sen^2 x - \cos x - 1} dx$

Curso 13/14. Examen de julio

28.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1 - \sen x^2}{\tg^3 x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

- a) Halla el valor de a para que $f(x)$ es continua en el punto $x = 0$.
 - b) Encuentra una sucesión $\{a_n\}$ cuyo límite sea a . Razona si esa sucesión es única.
-

29.- Calcula el límite L , cuando $n \rightarrow \infty$, de la sucesión de término general a_n , discutiendo el resultado para todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

$$a_n = \frac{(e^x)^n x + e}{(e^x)^n + 1}$$

Determina el conjunto A de valores de x para los que $L < 0$, así como su adherencia $\bar{A}$.

30.— Sea el conjunto B constituido por los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que h existe y pertenece a $\mathbb{R}$, siendo h el valor definido por la expresión:

$$h = \sqrt{(x-y)(x+y)} + \frac{\arcsen(x/2)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$$

Se pide:

- a) Obtener la expresión analítica que define el conjunto B.
- b) Dibujar de forma esquemática los conjuntos B y $Fr(B)$.

31.— Determina, mediante derivaciones sucesivas, el polinomio de Taylor de tercer grado en el punto $a = 0$ correspondiente a la función $f(x) = \sen 3x$. Halla el error que se comete al calcular el valor de $f(x)$ en $x = \pi/3$ mediante el polinomio obtenido.

32.— Calcula $I = \int \frac{\sen 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$.

33.— Obtén la fórmula de reducción de $I(n) = \int \operatorname{tg}^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Curso 14/15. Examen de enero

34.— Sea la función $f(x) = \sen x e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$. Se pide:

- a) Estudiar su continuidad.
- b) Determinar el conjunto A de puntos en que la gráfica de la función corta el eje x .
- c) Determinar el conjunto B de puntos en que la gráfica de $f(x)$ tiene tangente horizontal.
- d) Dado el conjunto $H = A \cup B$, razonar si es compacto en el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$.
- e) Representar de forma esquemática la gráfica de la función $f(x)$.

35.— Dados $a, b \in \mathbb{N}$, calcula el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, de la sucesión de término general:

$$a_n = \frac{\ln n}{n \ln \left(n^2 + 2n + \sqrt{3} \right) \ln \left(\frac{n+a}{n+b} \right)}$$

Llamando L al límite anterior, se define el conjunto J formado por los pares $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $L \in \mathbb{R}$. En el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$ se pide:

- a) Determinar el conjunto J y representarlo esquemáticamente.
- b) Determinar el conjunto $\bar{J}$.
- c) Determinar el conjunto J' .
- d) Determinar el conjunto $Fr(J)$.

36.— Descompón el número 6 en dos sumandos positivos tales que la suma de sus logaritmos en base 6 sea máxima.

37.— Integra $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

38.— Integra $I = \int \cos \sqrt{x} dx$.

Curso 14/15. Examen de julio

39.— Sea la función $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x^2}}$. Se pide:

- a) Estudiar su continuidad, especificando el tipo de discontinuidad, en su caso.
- b) Estudiar los máximos, mínimos y asíntotas de la función y dibujar su gráfica.

40.— Sea la sucesión de término general $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (5i - 1)$ y sean a_1, a_2, a_3 sus tres primeros términos. Se define el conjunto $W = \{x \in \mathbb{R} / x \in (a_2, a_1] \cup \{a_3\}\}$. Se pide:

- a) Dibujar de forma esquemática el conjunto W .
- b) Obtener la expresión más simplificada posible de los conjuntos $\overline{W}$, $Aisl(W)$ y $Fr(W)$.
- c) Razonar si W es un conjunto cerrado, abierto o compacto.
- d) Calcular el límite de a_n cuando $n \rightarrow \infty$.

41.— Integra $I = \int e^{\sqrt{x}} dx$.

42.— Integra $I = \int \cos x \sen x \sqrt{\cos^2 x - \sen^2 x} dx$.

Curso 15/16. Examen de enero

43.— Sean las funciones $h(x) = \sen x^2$, $g(x) = \ln x^2$, $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$. Se pide:

- a) Estudiar el dominio de $f(x)$.
- b) Estudiar la continuidad de $f(x)$. Si existen discontinuidades, determinar su tipo.
- c) Calcular: $\frac{h''(x)}{g'(x)} - x^3 h(x) g''(x)$.
- d) Obtener una aproximación polinómica de tercer orden a $g(x)$ en el entorno de $a = 1$.

44.— Sean las sucesiones de término general a_n, b_n y c_n :

$$a_n = 2^n \sen \left(\frac{3}{2^{n+1}} \right); \quad b_n = \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 4n} \right)^{\frac{n^2-1}{n}}; \quad c_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$$

- a) Calcula los límites: $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$; $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$; $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.
- b) En el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$, se consideran los conjuntos $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $B = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $C = \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $D = A \cup B \cup C$. Se pide:
 - b.1) Obtener los conjuntos D' y $Fr(D)$.

b.2) Analizar si $\overline{D} \subset Fr(D)$ y si $Fr(D) \subset \overline{D}$.

b.3) Determinar de forma justificada si D es abierto y si es no cerrado.

b.4) Determinar si el conjunto D es compacto.

45.- Integra $I = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} dx$.

46.- Obtén la fórmula de reducción para $I(n) = \int x^n \operatorname{sen} x dx$.

Curso 15/16. Examen de julio

47.- Sean las funciones $f(x) = 3 - x^2$; $g(x) = \frac{6}{\sqrt{2}} \cos x$. Llamamos P a un punto del primer cuadrante perteneciente a la gráfica de $f(x)$; M al punto de corte con el eje x de la recta paralela al eje y que pasa por P ; N al punto de corte con el eje y de la recta paralela al eje x que pasa por P ; y O al origen de coordenadas.

a) Determina las coordenadas de P tales que el rectángulo $OPMN$ sea de área máxima.

b) Sea H el punto intersección de la gráfica de $f(x)$ con el eje x para $x < 0$. Sean x_H y x_P las abscisa de H y P respectivamente. Definido el intervalo $[x_H, x_P]$, estudia si se satisfacen las condiciones del teorema de Lagrange para $f(x)$. En caso afirmativo, determina los valores de x para los que se cumple el mismo.

c) Determina el polinomio de Taylor de segundo grado de $g(x)$ en el punto $a = \frac{\pi}{4} \cdot x_P$. Considerando la función $f(x)$ como otra aproximación polinómica de $g(x)$ en $x = a$, determina cual de las dos aproxima con más precisión el valor de $g(x)$ en el origen.

48.- Calcula los límite de las sucesiones cuyos términos generales son:

a) $a_n = \frac{n^2 - 3n^7 + e}{5 + n^3 + 5n + 8n^2 + 3n^3 + \pi n^6}$; b) $b_n = \frac{n^2 - 3n^7 + e}{5 + n^3 + 5n + 8n^2 + 3n^3 + \pi n^7}$

c) $c_n = \frac{n^8 - 3n^7 + e}{5 + n^9 + 5n + 8n^2 + 3n^3 + \pi n^7}$; d) $d_n = \frac{\sqrt[8]{5n^8 - 3n^7 + e}}{\sqrt[9]{8n^9 + 5n + 8n^2 + 3n^3 + \pi n^7}}$

e) $e_n = \frac{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}\dots}}}{\sqrt{8\sqrt{8\sqrt{8}\dots}}}$; f) $f_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)$

49.- Integra $I = \int \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{1 - (\cos x + \operatorname{sen} x)^2} dx$.

Curso 16/17. Examen de enero

50.— Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \cosh x - 1, & x \in [-1, 0] \\ \operatorname{tg} x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right] \\ 2x - \left(\frac{\pi - 2}{2}\right), & x \in \left(\frac{\pi}{4}, 2\right] \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
- b) Razona si f satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo $[1/2, 2]$.
- c) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo $[-1, 2]$.
- d) En el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$, se define el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [-1, 2]; y = f(x)\}$. Razona si A es abierto, cerrado o compacto.

51.— Calcula el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, de las sucesiones de término general:

$$a_n = \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2n} \right)^{2n-1}; \quad b_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{e n^2}$$

52.— La empresa Conservas Caminos S.A. desea diseñar una lata con forma de prisma recto de base cuadrada y una capacidad de 640 cm^3 . Para la tapa de la lata se emplea un aluminio fino, para facilitar la apertura, con un precio de 2 euros por cm^2 ; para la base y las superficies laterales se emplea un aluminio más grueso con un precio de 8 euros por cm^2 . Diseña la lata para que su coste sea mínimo.

53.— Integra $I = \int 2\sqrt{2x - x^2} \, dx$.

Curso 16/17. Examen de julio

54.— Dado el espacio métrico $\mathbb{R}^2$ dotado de la métrica euclídea, se define el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \ln x\}$. Dibuja de forma esquemática el conjunto A , calcula su adherencia y determina si se trata de un conjunto cerrado.

55.— Calcula el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, de la sucesión de término general $a_n = \frac{\ln [(n+1)!]^e}{\ln [(n-1)!]^\pi}$

56.— Descompón el número 44 en suma de dos números H y J , tales que P tome el valor mínimo, siendo $P = 5H^2 + 6J^2$.

57.— Determina razonadamente el número de raíces de la ecuación $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{3}{4}x$, si existen.

58.— Integra $I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x} \sqrt{1 + \sqrt{\cos x}}} \, dx$.

Curso 17/18. Examen de enero

59.— Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \in (-\infty, 1) \\ 3x - (x-1)^{3/2}, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
 - b) Razona si f satisface las condiciones del teorema de los incrementos finitos en el intervalo $[-1, 1]$ y en su caso determinar todos los posibles valores medios dados por el teorema.
 - c) Calcula, si existen, los extremos de $f(x)$.
 - d) Dibuja aproximadamente la gráfica de la función en el intervalo $[-6, 6]$.
-

60.— Calcula el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, de la sucesión cuyo término general se define a continuación, razonando si es una sucesión de Cauchy:

$$a_n = \frac{\sum_{i=1}^n (i^2 + 2)}{5n^2 + \pi n + e}$$

61.— Sea el conjunto $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-n)^2 + (y-n)^2 < 1\}$, siendo n un número natural. Se considera el conjunto A formado por la unión de todos los posibles A_n , $n \in \mathbb{N}$. Se pide:

- a) Dibujar de forma esquemática el conjunto $Fr(A)$ y sólo él.
 - b) Obtener el conjunto $\bar{A}$ en su expresión más simplificada.
 - c) Razonar si A es un conjunto cerrado.
 - d) Razonar si A es un conjunto compacto.
 - e) Razonar si A es un conjunto abierto.
-

62.— Calcula $I = \int (\operatorname{tg}^{p-1} x + \operatorname{tg}^{p+1} x) dx$, $p \in \mathbb{R}$

63.— Resuelve $I = \int \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x\sqrt{x}} dx$

Curso 17/18. Examen de julio

64.— Sea el espacio métrico $\mathbb{R}^2$ dotado de la métrica euclídea. Si $E(x)$ representa la parte entera de x , se define el conjunto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / E(x) < y < x\}$$

Dibuja dicho conjunto, calcula su frontera y determina si es abierto.

65.- Calcula el límite, cuando $x \rightarrow 0$, de la función:

$$f(x) = \frac{x - e^x \operatorname{sen} x}{1 - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}$$

Razona si la función es continua en $x = 0$, indicando en su caso el tipo de discontinuidad.

66.- Calcula el valor de A que hace máximo el cociente $\frac{A}{B}$, siendo $B = \left(A + \frac{5}{2}\right)^2 + 4$.

67.- Comprueba si la función $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x - 7}$ cumple las condiciones del teorema de Lagrange (o de los incrementos finitos) en el intervalo $[0, 6]$. En su caso, determina los valores de x para los que se cumple el teorema.

68.- Calcula una aproximación polinómica de tercer orden en un entorno del punto $y = 1$ para la función $z(y) = \ln y^4$.

69.- Integra $I = \int x^5 e^{x^3} dx$.

70.- Resuelve $I = \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.

Curso 18/19. Examen de enero

71.- Calcula el polinomio de MacLaurin de grado 8 de la función $f(x) = \cos 2x^2$.

72.- Calcula los límites de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, siendo:

$$a_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n; \quad b_n = \left(1 \cdot \tan \frac{1}{n^2 + \sqrt{1}} + 2 \cdot \tan \frac{1}{n^2 + \sqrt{2}} + \cdots + n \cdot \tan \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}\right)$$

73.- Sea la curva $y = \frac{1}{1 + x^2}$. Se considera un rectángulo tal que su base está sobre OX y todo él está contenido entre la curva y dicho eje. Hacemos girar el rectángulo alrededor de OX . Se pide obtener las dimensiones del rectángulo que genera un cilindro de superficie lateral máxima, justificando que se trata de un máximo.

74.- Integra $I = \int (x^2 + 1) e^{2x} dx$.

75.- Obtén la primitiva $I = \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x} dx$.

Curso 18/19. Examen de julio

76.- Calcula el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$, siendo a y b reales positivos.

77.- Calcula el polinomio de McLaurin de grado 3 de la función $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$

78.- Se desea construir un recipiente de volumen dado, $V = 45\pi$, formado por un cilindro de radio r y altura h , rematado por una semiesfera de radio r . Halla sus dimensiones de modo que la superficie total sea mínima, calculándola y justificando que se trata de un mínimo.

79.- Calcula la primitiva $I = \int x \sin^2 x \, dx$

80.- Integra $I = \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \, dx$

Curso 19/20. Examen de enero

81.- Si $\theta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\cos \theta_n)}{(1 + \theta_n)^{\theta_n} - 1}$.

82.- Una escalera de 5 m de longitud está en reposo apoyada contra un muro, de modo que el extremo superior A se encuentra a 4 m de altura. En un instante dado, el extremo B, apoyado en el suelo, comienza a resbalar a una velocidad constante $v_x = 30$ cm/s. Se pide:

- a) Velocidad v_y a la que desciende el extremo A, en el momento en que su altura es de 3 m.
 - b) Distancia recorrida por el extremo A en el instante en que ambos deslizan con igual rapidez.
- _____

83.- Se considera un río, representado por la curva $y = x^2 + 1$. Se desea llevar una conducción de agua desde el río hasta un punto situado en el eje de abscisas a 5 km de distancia del origen. Si el coste del canal es proporcional a su longitud, calcula la longitud del canal de coste mínimo, justificando que se trata de un mínimo.

84.- Sea la integral:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} \, dx$$

Se pide:

- a) Resolverla como trigonométrica impar en seno.
 - b) Plantearla como trigonométrica par en seno-coseno, llegando hasta la racional.
 - c) Resolverla como semiinmediata.
- _____

Curso 19/20. Examen de julio

85.— Resuelve el siguiente límite:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{2n-1}}$$

86.— Sea la curva $y = e^{-x}$. Se consideran los posibles rectángulos situados en el primer cuadrante, con un vértice en el origen y el opuesto en la curva. Se pide calcular lo siguiente, razonando los resultados:

- a) Las dimensiones de los rectángulos de área máxima y de área mínima.
 - b) Las dimensiones de los rectángulos de perímetro máximo y de perímetro mínimo.
-

87.— Integra $\int x^7 \cos x^4 dx$.

88.— Integra $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cotg \sqrt{x}}$.

Curso 20/21. Examen de enero

89.— Calcula L utilizando equivalencias:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - a^{\ln \frac{n}{n+1}} \right), \quad a > 0$$

90.— Sea la ecuación: $x^5 - 80x + C = 0$, $C \in \mathbb{R}$. Se pide:

- a) Demostrar que no existe más de una raíz real en el intervalo $I = [-2, 2]$.
 - b) Buscar un valor de C no nulo para el que haya una raíz y obtenerla.
-

91.— Sea un rectángulo de base b y altura h . Sobre el lado superior se adosa un triángulo equilátero de modo que la base del triángulo coincide exactamente con el lado del rectángulo. Si se dispone de 1 m de alambre para el perímetro del pentágono descrito, halla los valores de b y h que producen un área máxima, justificando que se trata de un máximo.

92.— Resuelve la integral de reducción $I(n) = \int x^{2n} e^x dx$

93.— Integra $\int \frac{\cotan x}{\sec x} dx$.

Curso 20/21. Examen de julio

94.- En $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, se define el siguiente conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 2, x \neq 1\} \cup \{3\} \cup \{x \in \mathbb{Q} / 4 < x < 5\}$$

Se pide obtener: **a)** $\overline{A}$; **b)** $\overset{\circ}{A}$; **c)** $\overset{\circ}{\overline{A}}$; **d)** A' ; **e)** $Fr(A)$; **f)** $Ext(A)$.

95.- Calcula $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^3 + n^2}} \right)^n$

96.- Una pieza cilíndrica de metal sufre un alargamiento, manteniendo el volumen constante de $100\pi \text{ cm}^3$, de manera que la longitud varía a razón de 1 cm/s. Calcula con qué velocidad disminuye el radio cuando la longitud de la pieza es de 100 cm.

97.- Demuestra que, para todo $x \geq 1$, se verifica: $\arctg \sqrt{x^2 - 1} + \arcsen \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

98.- Calcula la primitiva $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$

99.- Integra $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

Curso 21/22. Examen de enero

100.- Calcula $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k + \frac{1}{kn} \right)^{kn}$, $k > 0$.

101.- Un avión se desplaza en vuelo horizontal a una altura $h = 8 \text{ km}$ (suponemos la Tierra plana). La ruta de vuelo pasa por la vertical de un punto P del suelo. La distancia l entre el avión y el punto P disminuye a razón de 4 km/min en el instante en que esta distancia es de 10 km. Calcula la velocidad del avión en km/h en ese instante.

102.- Integra $I = \int (\cos x + \sec x)^2 dx$.

103.- Integra $\int \frac{dx}{x^3 + x^7}$

Curso 21/22. Examen de julio

104.– Calcula $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^k + 1} - \sqrt{n^k} \right)$, $k \in \mathbb{R}$.

105.– Sea el conjunto:

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{x \in \mathbb{Q} / 1 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 3\}$$

Se pide obtener los conjuntos Adherencia, Derivado, Conjunto de puntos aislados, Interior, Frontera y Exterior de A; así como razonar si A es abierto o cerrado.

106.– Sea un bosque rectangular de vértices ABCD, siendo A el vértice superior izquierdo y los otros situados en sentido horario. Las longitudes de los lados son $\overline{AB} = 10$ km; $\overline{BC} = 5$ km. El bosque está bordeado inferiormente por una carretera (lado DC).

Un excursionista quiere llegar de A a C en el tiempo más breve posible. Su camino se compone de dos tramos rectos: el primero, por dentro del bosque, desde A hasta un punto P de la carretera situado a x km del vértice D. El segundo, a lo largo de la carretera, desde P hasta el vértice C. La velocidad del excursionista es de 1 km/h por el bosque y de 5 km/h por la carretera.

Calcula el valor de tiempo mínimo necesario, justificando que se trata de un mínimo.

Nota. Hay que estudiar también los extremos del intervalo de variación de la variable.

107.– Obtén la fórmula de reducción de $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$

Curso 22/23. Examen de enero

108.– Se define la función f como:

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2}$$

Se pide redefinirla –si es posible– de modo que sea continua en todo $\mathbb{R}$.

109.– Calcula, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(n + \alpha)}{\ln n} \right)^{n \ln n}$

110.– Los centros de dos círculos tangentes exteriores están separados una distancia d . ¿Qué valores deben tener sus radios para que la suma de las áreas sea máxima?

111.– Integra $I = \int \frac{dx}{(1 + x^2) \arctan \frac{1}{x}}$

112.– Integra $\int \frac{\cos x}{e^x} dx$

Curso 22/23. Examen de julio

113.– Sea el conjunto $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 < \frac{1}{z^2}, z > 1 \right\}$. Se pide:

- a) Dibujar de forma esquemática el conjunto $Fr(A)$.
- b) Obtener la frontera, el interior y la adherencia de A .
- c) Obtener el conjunto de puntos aislados y de acumulación de A .
- d) Obtener de nuevo la frontera si se define el conjunto A para $z > 0$ en vez de $z > 1$.

114.– Obtén el polinomio de Taylor de orden 6 de la función $f(x) = \sinh x \cosh x$ en el punto $a = 0$, sin necesidad de derivar las funciones $\sinh x$ y $\cosh x$.

115.– Un vertido accidental de combustible en el mar tiene forma circular. Se considera que el espesor de la mancha es constante y de valor $1/50$ m. Si el combustible continúa siendo vertido a una razón de $2 \text{ m}^3/\text{s}$, se pide:

- a) ¿A qué razón crece el radio r de la mancha en el instante en que $r = 50$ m?
- b) Plantea el problema si el espesor es cualquier función derivable del radio, $h = f(r)$.
- c) Resuelve el apartado a) si el espesor depende del radio según la relación $h = 1/r$, $r > 0$.

116.– Integra $I = \int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{3/2}}$

117.– Integra $\int \frac{\tan x}{\cos^4 x} dx$

Curso 23/24. Examen de enero

118.– Calcula el siguiente límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 \sin(\theta) + 2^2 \sin(\theta/2) + \dots + n^2 \sin(\theta/n)}{n^2}$

119.– Obtén los tres primeros términos no nulos del desarrollo de McLaurin de la función:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

120.– Obtén los puntos de la parábola $y = 4 - x^2$ cuya distancias al punto $(0, 3)$ sean máxima y mínima en términos absolutos, dentro del intervalo $[-2, 2]$.

121.– Resuelve $I = \int \frac{x}{(1+x^4)(\arctan x^2)^2} dx$.

122.– Integra $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Curso 23/24. Examen de julio

123.– Se consideran las sucesiones cuyos términos generales son:

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{(1+1)(2+1)\dots(n+1)}}{\sqrt[n]{n!}}; \quad b_n = \frac{n+1}{n^2+n+5}; \quad c_n = \frac{1}{1+\ln n}$$

Se pide calcular: **a)** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$; **b)** $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{c_n}$

124.– En $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se define la función $f(x) = \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

a) Estudia su continuidad en $\mathcal{D}$.

b) ¿Es posible redefinir f para que sea continua en $\mathbb{R}$?

125.– De los rectángulos de perímetro dado P , se pide obtener:

a) El de diagonal de longitud mínima.

b) El de área de valor mínimo.

126.– Sea la integral $I = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^4 x} dx$. Se pide:

a) Resolverla por el método “integrando impar en seno”.

b) Escribir el integrando en función de $\operatorname{tg} x$ y resolver la integral utilizando el cambio $\operatorname{tg} x = t$.

c) Comprobar que ambas expresiones de la primitiva se diferencian en una constante.

Curso 24/25. Examen de enero

127.– Sea el conjunto $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \dots$. Se pide:

a) Expresarlo en forma de unión infinita.

b) Expresarlo como diferencia de conjuntos, de la forma más breve posible.

c) Obtener los conjuntos: $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $Fr(A)$, $Ext(A)$.

d) Razonar si A es abierto, cerrado o compacto.

128.– Calcula el siguiente límite, según los valores de $p \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

129.— Queremos construir –en chapa metálica– un depósito de agua con forma de cilindro circular recto, abierto por la parte superior. Necesitamos que contenga 100π m³ de líquido.

La chapa necesaria se obtiene gratuitamente y, para el corte y soldadura de la misma, nos dan un precio fijo, por lo que el principal coste variable de construcción se debe al pintado del depósito. Este supone 16 euros por m² para la base y 20 euros por m² para la pared lateral.

Se desea averiguar las dimensiones del depósito (radio r y altura h) que supongan un menor coste de pintado. Consideramos nulo el espesor de la chapa. Se pide:

- Obtener la función coste, en función del radio r de la base.
- Calcular razonadamente los valores r y h que hacen mínimo el coste, obteniendo este valor.

130.— Resuelve $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}} dx.$ _____

131.— Integra $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx.$ _____

Curso 24/25. Examen de julio

132.— Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el conjunto A_n y, a partir de ellos, el conjunto A :

$$A_n = \left\{ \frac{m}{2^n} / m = 1, 2, 3, \dots, 2^n \right\}, \quad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Se pide:

- Escribe y representa los conjuntos A_1, A_2 y A_3 . ¿Qué relación existe entre ellos?
- Obtén razonadamente la adherencia de A .
- Obtén razonadamente el interior de A .
- Obtén los conjuntos $A_{\text{isl}}(A)$, A' , $Fr(A)$, $Ext(A)$.
- Justifica si A es abierto y/o cerrado.

133.— Obtén la relación entre los reales a, b y c para que sea continua en su dominio la función:

$$f(x) = \frac{e^{a\sqrt{x}} - e^{b\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad (x > 0); \quad f(0) = c$$

134.— Se consideran todas las posibles elipses, tales que la suma de sus semiejes a y b vale 2 metros. Llamamos k a la relación entre ambos ($a = kb$). Se pide:

- Obtener la expresión del área de la elipse en función exclusivamente de k .
- Calcular por derivación el valor de k para el que el área de la elipse es máxima, demostrando que se trata de un máximo y calculando dicha área.
- Razonar si el resultado obtenido era esperable.

135.— Resuelve $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx.$ _____

136.— Integra $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} dx.$ _____

7.4. Soluciones a los problemas

- 1.- $Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1, y = 1\} \cup \{(x, y) / x \geq 1, y = x\} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) / x = n, 1 \leq y \leq x\}$.
 $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq y \leq x\}$.
- 2.- Se trata de una sucesión constante de términos $e^{\frac{\alpha}{\beta}}$, por lo que su límite es $L = e^{\frac{\alpha}{\beta}}$.
- 3.- a) Se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Bolzano.
b) No se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Rolle.
c) Existe una discontinuidad no evitable de segunda especie en $x = 0$.
d) La función posee un mínimo relativo en $x = 1$. No existen extremos absolutos, aunque f alcanza valores, positivos y negativos, tan grandes como queramos en valor absoluto.
- 4.- $I = 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} + C$.
- 5.- $L = \sqrt[3]{2}$.
- 6.- $A = \frac{P^2}{4} \frac{k}{(1+k)^2}$; $k_{max} = 1$ (cuadrado); $A_{max} = \frac{P^2}{16}$.
- 7.- $I = 6\sqrt{1 + \ln^2 x} + C$.
- 8.- $L = \sqrt[4]{abcd}$.
- 9.- $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \pm \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{N} \right\}$; $\overline{A} = A \cup \{0\}$; $A' = \{0\}$; $\mathring{A} = \emptyset$; $Fr(A) = A \cup \{0\}$.
- 10.- a) $a = \pm 1$; b) f no es derivable en $x = 0$ para ningún valor de a ; c) $f'(0) = 1$.
- 11.- a) $P(x) = x^3 - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{5} - \frac{x^{21}}{7} + \frac{x^{27}}{9} - \dots$ b) Tomar un número mayor de términos.
- 12.- $I = -e^2 \arctan e^{\cos x} + C$.
- 13.- a) $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ \frac{4}{(2-x)^2}, & x < 0 \end{cases}$
b) f no es derivable en $x = 0$, pues no es continua. $f'(0^+) = 1$. No existe derivada en $x = 0^-$, pues $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \infty$.
- 14.- $L = -\frac{1}{4}$.
- 15.- $I_1 = \frac{1}{2} \arctan 2e^x + C$. $I_2 = -\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2} e^{-x} \right) + C$.
- 16.- a) La función es continua en $x \neq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. En $x = 0$, es continua sólo si $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$.
b) $f'(x) = \left(\frac{2a}{x(ax^2 + 2b)} - \frac{2}{x^3} \ln(ax^2 + 2b) \right) (ax^2 + 2b)^{\frac{1}{x}}$. c) $P_4(x) = 1 + \frac{x^4}{2}$.
- 17.- $L = b$.

18.- $I = -\operatorname{tg} x + C.$

19.- $I = \frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3} - 2\sqrt{1-x} + C.$ Resolviendo por partes, $I = -\frac{4}{3}\sqrt{(1-x)^3} - 2x\sqrt{1-x} + C.$

20.- En $x = 0$, f no es derivable. Para $x \neq 0$, $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ \frac{2a}{(2-x)^2}, & x < 0 \end{cases}$

21.- $P_4(x) = 3 - 3x + 9x^2 - 15x^3 + 33x^4.$ Puede obtenerse descomponiendo g en suma o producto de fracciones, o bien operando el denominador y dividiendo.

22.- $I = x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \ln |1-x^2| + C.$

23.- a) Simplificando su expresión, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty, -1] \\ -x-1, & x \in (-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$

f es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto el origen, donde tiene una discontinuidad de salto.

b) La función no satisface las condiciones del teorema, pues no es continua en $x = 0$.

c) La función no satisface las condiciones del teorema, pues no es derivable en $x = -1$.

24.- $L = 1/3.$

25.- b) $\overline{A} = \overline{H} \cup \overline{Z}$, siendo $\overline{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / n \leq x \leq n+1; n \leq y \leq n+1\}$ y

$$\overline{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y = -n\}. \quad \text{Aisl}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y = -n\}.$$

c) $A \neq \overline{A}$, luego no es cerrado.

d) $A \neq \overset{\circ}{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / n < x < n+1; n < y < n+1\}$, luego no es abierto.

e) A no es cerrado, luego no es compacto (teorema de Heine-Borel). Tampoco es acotado, pero no es preciso demostrarlo, pues basta con no ser cerrado para no ser compacto.

26.- $I = x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C.$

27.- $I = \ln |\cos x + 1| + C.$

28.- a) La función es continua si y sólo si $a = 0$.

b) Hay infinitas sucesiones de límite 0, por ejemplo $\{0\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$, $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} \dots$

29.- Cuando $n \rightarrow \infty$, la expresión $(e^x)^n$ será constante, tenderá a ∞ o a 0, según e^x sea igual, mayor o menor que 1, es decir, según x sea igual, mayor o menor que 0. Entonces:

- $x = 0 \implies e^x = 1 \implies L = e/2.$

- $x > 0 \implies e^x > 1 \implies L = x.$

- $x < 0 \implies e^x < 1 \implies L = e$.

Como el límite L es siempre positivo, A será vacío y $\bar{A} = \phi$.

30.- Para que h sea real debe cumplirse a) que el radicando sea ≥ 0 , b) que el argumento del arco seno esté comprendido entre $+1$ y -1 y c) que el argumento del logaritmo sea positivo y distinto de 1. Entonces $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \geq |y|, |x| \leq 2, x^2 + y^2 > 1, x^2 + y^2 \neq 2\}$.

31.- $P_3(x) = 3x - \frac{9}{2}x^3$. El error cometido es $P_3\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6\pi - \pi^3}{6}$.

32.- $I = -2\sqrt{1 + \cos^2 x} + C$.

33.- $I(n) = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - I(n-2), \forall n \neq 1. I(1) = -\ln |\cos x|. I(0) = x$.

34.- a) f es continua en $[0, \infty)$; **b)** $A = \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

c) $B = \left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$.

d) $H = A \cup B$. H no está acotado pues k puede ser tan grande como queramos. Por lo tanto H no es compacto, según el teorema de Heine-Borel.

35.- a) $J = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 / a \neq b\}$; **b)** $\bar{J} = J$; **c)** $J' = \phi$; **d)** $Fr(J) = \bar{J}$.

36.- La suma es máxima descomponiendo el número 6 en dos partes iguales.

37.- La solución tiene distintas expresiones: $I_1 = \arcsen(2x - 1) + C$; $I_2 = 2 \arcsen \sqrt{x} + C$; $I_3 = -2 \arcsen \sqrt{1-x} + C$.

38.- $I = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$.

39.- a) La función es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en los puntos $x = \pm 1$. En $x = +1$ presenta una discontinuidad no evitable de segunda especie. En $x = -1$ hay discontinuidad evitable, que se evita asignando a f el valor $\sqrt{e}$.

b) No hay máximos ni mínimos (la función es creciente en todo su dominio). Existe una asíntota vertical en $x = 1$ y una horizontal $y = 1$.

40.- a) $W = \{3\} \cup \left(\frac{13}{4}, 4\right]$.

b) $\bar{W} = \{3\} \cup \left[\frac{13}{4}, 4\right]$; $Aisl(W) = \{3\}$; $Fr(W) = \{3\} \cup \left\{\frac{13}{4}\right\} \cup \{4\}$.

c) W no es cerrado pues no coincide con su adherencia; no es abierto pues no coincide con su interior; no es compacto pues no es cerrado, aunque sí acotado.

d) $L = \frac{5}{2}$.

41.- $I = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$.

42.- $I = -\frac{1}{6} \sqrt{(\cos^2 x - \sin^2 x)^3} + C$.

43.- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

b) Existe una discontinuidad evitable en $x = 0$, que puede evitarse definiendo $f(0) = 0$. En $x = \pm 1$ existen discontinuidades no evitables de segunda especie (de salto infinito).

- c) La expresión pedida es: $x \cos x^2 + 2x^3 \sin x^2 - 2x \sin x^2$.
- d) $P_3(x) = 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3$.
- 44.- a) $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = e^{-4}$, $\gamma = \frac{4}{e}$.
- b.1) $D' = \{\alpha, \beta, \gamma\}$; $Fr(D) = D \cup D'$.
- b.2) $\overset{\circ}{D} = \phi \implies Fr(D) = \overline{D} \setminus \overset{\circ}{D} = \overline{D} \implies Fr(D) \subset \overline{D}$ y $\overline{D} \subset Fr(D)$.
- b.3) $D \neq \overset{\circ}{D} \implies D$ no es abierto; $\overline{D} = D \cup D' \neq D \implies D$ no es cerrado.
- b.4) D no es cerrado, aunque sí acotado, luego no es compacto.
- 45.- $I = \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2} + C$.
- 46.- $I(n) = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)I(n-2)$. $I(0) = -\cos x$, $I(1) = \sin x - x \cos x$.
 $I(0)$ e $I(1)$ son casos particulares de la fórmula general.
- 47.- a) $P(1, 2)$.
- b) $x_H = -\sqrt{3}$, $x_P = 1$. f cumple las condiciones del teorema, siendo $\xi = \frac{-1}{1+\sqrt{3}}$.
- c) $P_2(x) = 3 - 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$.
- 48.- a) $L = -\infty$; b) $L = -\frac{3}{\pi}$; c) $L = 0$; d) $L = \frac{\sqrt[8]{5}}{\sqrt[9]{8}}$; e) $L = \frac{5}{8}$; f) $L = \frac{1}{2}$.
- 49.- $I = x - \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + C$, o bien $I = x + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec} 2x + \cotg 2x| + C$.
- 50.- a) f es continua en $[-1, 2]$. Es derivable en $[-1, 0)$ y $(0, 2]$. En $x = 0$ tiene derivadas laterales distintas.
- b) Las satisface por ser continua en $\left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset [-1, 2]$ y derivable en $\left(\frac{1}{2}, 2\right) \subset (0, 2]$.
- d) $\overset{\circ}{A} = \phi \neq A$, luego no es abierto. $\overline{A} = A$, luego es cerrado. A puede encerrarse en una bola de radio finito, luego es acotado. Al ser cerrado y acotado, es compacto.
- 51.- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-10}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2e}$.
- 52.- Dimensiones de coste mínimo: lado de la base $b = 8\sqrt[3]{2}$ cm, altura $h = \frac{10}{\sqrt[3]{4}}$ cm.
- 53.- $I = \arcsen(x-1) + (x-1)\sqrt{2x-x^2} + C$.
- 54.- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\ln x < y < \ln x\}$; $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\ln x \leq y \leq \ln x\}$; $A \neq \overline{A}$, por lo que A no es cerrado.
- 55.- $L = \frac{e}{\pi}$.
- 56.- Los dos números son 20 y 24.

- 57.- Existen tres raíces: $x_0 = 0$, $x_1 > \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x_2 < -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- 58.- $I = -4\sqrt{1 + \sqrt{\cos x}} + C$.
- 59.- a) La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.
- b) A partir del apartado anterior, f es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$, por lo que cumple las condiciones del teorema. El único valor medio que existe es $\xi = 0$.
- c) La función tiene un mínimo en $x = 1/2$ y un máximo en $x = 5$.
- 60.- Aplicando el criterio de Stolz, obtenemos que $a_n \rightarrow +\infty$. En $\mathbb{R}$ toda sucesión es de Cauchy si y sólo si es convergente, luego $\{a_n\}$ no es de Cauchy.
- 61.- b) $\bar{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - n)^2 + (y - n)^2 \leq 1\}$
- c) $A \neq \bar{A}$, por lo que A no es cerrado.
- d) En $(\mathbb{R}, ||)$ un compacto es cerrado y acotado. A no es cerrado, luego no es compacto.
- e) $\mathring{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - n)^2 + (y - n)^2 < 1\}$. $A = \mathring{A}$, luego es abierto.
- 62.- $I = \frac{1}{p} \tan^p x + C$ ($p \neq 0$). Si $p = 0$, $I = \ln |\tan x| + C$.
- 63.- $I = -2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + C$.
- 64.- $Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = E(x)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Z}, x - 1 \leq y < x\}$
 En la definición de A no existen puntos en que $y = x$ ni puntos en que $y = E(x)$. Además, si $x \in \mathbb{Z}$, será $x = E(x)$, por lo que $\nexists y / E(x) < y < x$. Luego la frontera de A no contiene puntos de A . Entonces $A \cap Fr(A) = \emptyset$, por lo que A es abierto.
- 65.- Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital se obtiene $l = -1/2$. La función es discontinua en $x = 0$, pues la expresión con la que se ha definido no tiene sentido en ese punto. La discontinuidad es evitable. Basta para ello definir $f(0) = -1/2$.
- 66.- Tras localizar los extremos relativos y estudiar los extremos del dominio, el valor que hace máximo el cociente $\frac{A}{B}$ es $A = \frac{\sqrt{41}}{2}$.
- 67.- Al tratarse de un cociente de polinomios y no anularse el denominador en el intervalo, f es continua en $[0, 6]$ y derivable en $(0, 6)$, por lo que cumple las condiciones del teorema. El valor buscado es $\xi = 7 - \sqrt{7}$.
- 68.- $P_3(y) = 4(y - 1) - 2(y - 1)^2 + \frac{4}{3}(y - 1)^3$.
- 69.- $I = \frac{1}{3} (x^3 - 1) e^{x^3} + C$.
- 70.- $I = \frac{1}{3} \arctan x - \frac{1}{6} \arctan \frac{x}{2} + C$.
- 71.- $P_8(x) = 1 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^8$.

- 72.- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}.$
- 73.- $S_L = 2\pi r h = 2\pi y \cdot 2x = \frac{4\pi x}{1+x^2}.$ La función S_L alcanza el máximo en $x = 1$. Dimensiones del rectángulo: base $2x = 2$, altura $y = \frac{1}{2}.$
- 74.- $I = \frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 - 2x + 3) + C.$
- 75.- $I = -\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C.$
- 76.- $L = \text{Máx}(a, b).$
- 77.- $P_3(x) = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3.$
- 78.- $h_{\min} = r_{\min} = 3. S_{\min} = 45\pi. S'' = 10\pi > 0 \implies \text{mínimo}.$
- 79.- $I = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.$
- 80.- $I = \arcsen x - \sqrt{1-x^2} + C.$
- 81.- $L = -\frac{1}{2}.$
- 82.- a) $v_y = -0.4 \text{ m/s}; \quad \text{b) } d = \frac{4\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}} \text{ m}.$
- 83.- $l = \sqrt{20} \text{ km}.$ Se trata de un mínimo, pues $d''(x)|_{x=1} = \frac{9}{\sqrt{2}} > 0.$
- 84.- a) $I = \frac{1}{2} \ln(1 + \sin^2 x) + C; \quad \text{b) } I_{rac} = \int \frac{t dt}{(1+t^2)(1+2t^2)}; \quad \text{c) Idem a).}$
- 85.- $L = -15.$
- 86.- a) Rectángulo de área mínima: $b = 0, h = 1, A_{\min} = 0$ (extremo izquierdo del dominio); rectángulo de área máxima: $b = 1, h = 1/e, A_{\max} = 1/e.$
b) Rectángulo de perímetro mínimo: $b = 0, h = 1, P_{\min} = 2$; no existe el rectángulo de perímetro máximo.
- 87.- $I = \frac{1}{4} (x^4 \sin x^4 + \cos x^4) + C.$
- 88.- $I = -2 \ln |\cos \sqrt{x}| + C.$
- 89.- $L = \ln a.$
- 90.- a) Se demuestra por reducción al absurdo, definiendo $f(x) = x^5 - 80x + C$, suponiendo que se anula en dos o más puntos y aplicando el teorema de Rolle.
b) Se elige un valor para x en $[-2, 2]$, por ej. $x = 1$, se hace $f(1) = 0$ y resulta $C = 79.$
- 91.- Dimensiones que producen área máxima: $b = 1/(6 - \sqrt{3}), h = (3 - \sqrt{3})/(12 - 2\sqrt{3}).$
- 92.- $I(n) = e^x (x^{2n} - 2n x^{2n-1}) + 2n(2n-1)I(n-1). I(0) = e^x.$

- 93.- $I = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \cos x + C.$
- 94.- $\bar{A} = [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5]; \quad \mathring{A} = (0, 1) \cup (1, 2); \quad \overset{\circ}{\bar{A}} = (0, 2) \cup (4, 5); \quad A' = [0, 2] \cup [4, 5];$
 $Fr(A) = \{0, 1, 2, 3\} \cup [4, 5]; \quad Ext(A) = (-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup (5, \infty).$
- 95.- $L = e^{2/3}.$
- 96.- $V_r = -0.005 \text{ cm/s}.$
- 97.- Se puede demostrar de dos maneras:
- a) Hacemos $f(x) = \arctg \sqrt{x^2 - 1} + \arcsen \frac{1}{x}$ y calculamos $f(1) = \frac{\pi}{2}$. Comprobando que $\forall x \geq 1, f'(x) = 0$, resulta que $f(x) = \frac{\pi}{2}$, con lo que se cumple la ecuación.
- b) Hacemos $\alpha = \arctan \sqrt{x^2 - 1}$ y calculamos, a partir de ello, el $\cos \alpha$. Observando que $\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ y despejando $\frac{\pi}{2} - \alpha$, se comprueba que se cumple la ecuación.
- 98.- $I = \arcsen \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$
- 99.- $I = x - \ln(e^x + 1) + C.$
- 100.- Si $k > 1, l = \infty$. Si $k = 1, l = e$. Si $k < 1, L = 0$.
- 101.- $V_a = 400 \text{ km/h}.$
- 102.- $I = \frac{5}{2}x + \frac{\sen x \cos x}{2} + \tan x + C.$
- 103.- $I = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \arctan x^2 + C.$
- 104.- Si $k > 0, l = 0$. Si $k = 0, l = \sqrt{2} - 1$. Si $k < 0, L = 1$.
- 105.- $\bar{A} = \left\{ \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup [1, 3]; \quad A' = [1, 3]; \quad Aisl(A) = \left\{ \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\};$
 $\mathring{A} = (2, 3); \quad Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \left\{ \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup [1, 2] \cup \{3\};$
 $Ext(A) = \mathbb{R} \setminus \bar{A} = (-\infty, 0) \cup (3, \infty) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1} \right).$
A no es abierto, pues $A \neq \mathring{A}$. No es cerrado pues $A \neq \bar{A}$.
- 106.- $T_{min} = \sqrt{24} + 2 \text{ horas}.$
- 107.- $I(n) = \frac{2n-3}{2n-2} I(n-1) + \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} \quad (n \neq 1); \quad I(1) = \arctan x.$
- 108.- La redefinimos incluyendo el límite en el origen: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$
- 109.- $L = e^\alpha.$

110.— El máximo valor para la suma de las dos áreas se obtiene con un círculo de radio d y otro de radio nulo (reducido a un punto).

111.— $I = -\ln \left| \arctan \frac{1}{x} \right| + C.$

112.— $I = \frac{1}{2} \frac{\sin x - \cos x}{e^x} + C.$

113.— b) $Fr(A) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = \frac{1}{z^2}, z > 1 \right\};$

$$\mathring{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 < \frac{1}{z^2}, z > 1 \right\}; \quad \bar{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq \frac{1}{z^2}, z > 1 \right\}.$$

c) $Aisl(A) = \emptyset; \quad A' = \bar{A}.$

d) $Fr(A) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = \frac{1}{z^2}, z > 1 \right\} \cup \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$

114.— $P(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}.$

115.— a) $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \text{ m/s}.$

b) $V = \pi r^2 f(r) \implies \frac{dV}{dt} = \left(2\pi r f(r) + \pi r^2 \frac{df}{dr} \right) \frac{dr}{dt},$ de donde se despeja $\frac{dr}{dt}$, con $\frac{dV}{dt} = 2.$

c.1) Sustituímos en b): $f(r) = \frac{1}{r}$ y $\frac{df}{dr} = -\frac{1}{r^2}.$ Resulta $\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi}.$

c.2) Alternativa: $V = \pi r^2 f(r) = \pi r \implies r = \frac{V}{\pi}.$ Obtenemos $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{dV}{dt} = \frac{2}{\pi}.$

116.— $I = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$

117.— $I = \frac{1}{4 \cos^4 x} + C.$

118.— $L = \theta/2.$

119.— $P_3(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$

120.— Los puntos críticos son $x = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$ Los extremos de intervalo son $x = \pm 2.$ La distancia alcanza el máximo absoluto ($M = 13$) en $x = \pm 2$ y el mínimo absoluto ($m = 3/4$) en $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$ Existe también un máximo relativo ($M' = 1$) en $x = 0.$

121.— $I = -\frac{1}{2 \arctan x^2} + C.$

122.— Se puede resolver por partes o bien operando el numerador. Se puede comprobar que las dos soluciones coinciden, sacando factor común la raíz cuadrada:

$$I_1 = x^2 \sqrt{x^2 - 1} - \frac{2}{3} (x^2 - 1)^{3/2} + C. \quad I_2 = \frac{1}{3} (x^2 - 1)^{3/2} + \sqrt{x^2 - 1} + C.$$

123.— a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{c_n} = 1/e.$

124.— Fuera del origen, $1/x$ es continua, luego $e^{1/x}$ lo es por ser la exponencial de una continua. Entonces $1 + e^{1/x}$ es continua en $\mathcal{D}$ y también $f(x)$ por ser cociente de funciones continuas. Estudiando los límites laterales de f en $x = 0$, vemos que son distintos. Entonces la discontinuidad no es evitable y f no se puede redefinir de modo que sea continua.

125.— a) Resulta el cuadrado de lado $P/4$.

b) Se obtiene el rectángulo de lados $b = P/2$, $h = 0$ o bien $b = 0$, $h = P/2$. Es decir, el rectángulo se convierte en un segmento de área nula.

126.— a) $\cos x = t \implies I_1 = \frac{1}{4 \cos^4 x} + C$.

b) $\operatorname{tg} x = t \implies I_2 = \int (1 + t^2) t dt \implies I_2 = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$.

c) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \implies I_1 = \frac{1}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} \implies I_1 - I_2 = \frac{1}{4}$.

127.— a) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right)$.

b) $A = (0, 1) \setminus \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

c) $\overline{A} = [0, 1]$, $\mathring{A} = A$; $Fr(A) = \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$; $Ext(A) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

d) $A = \mathring{A}$, luego es abierto. $A \neq \overline{A}$, luego no es cerrado, por lo que tampoco es compacto.

128.— Si $p > 3/2$, $L = \infty$. Si $p = 3/2$, $L = 1/2$. Si $p < 3/2$, $L = 0$.

129.— a) $C = 16\pi r^2 + \frac{4000\pi}{r}$.

b) La función coste tiene un único mínimo (relativo y absoluto) para $r = 5$ m, $h = 4$ m. El coste mínimo es $C_m = 1200$ euros.

130.— $I = \frac{1}{2} \arctan x^2 + C$.

131.— $I = -\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \right| + C$.

132.— a) $A_1 = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$; $A_2 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$; $A_3 = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \dots, 1 \right\}$. Cada A_i tiene el doble de puntos que A_{i-1} y lo contiene.

b) En cada A_i los puntos están equiespaciados y a la mitad de distancia entre ellos que en A_{i-1} , por lo que dos puntos consecutivos cualesquiera llegan a estar entre sí tan cerca como se quiera, para un i suficientemente alto. Entonces, todo punto del intervalo $[0, 1]$, sea racional o irracional, tiene puntos de A tan cerca como queramos, por lo que $\overline{A} = [0, 1]$.

c) Ningún punto de A es interior, pues en toda bola centrada en él habrá irracionales, por lo que no puede estar contenida en A . Entonces $\mathring{A} = \emptyset$.

d) $Aisl(A) = \emptyset$; $A' = \overline{A} \setminus Aisl(A) = \overline{A}$; $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A}$; $Ext(A) = \mathbb{R} \setminus \overline{A} = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

e) $A \neq \overset{\circ}{A}$, luego A no es abierto. $A \neq \overline{A}$, luego no es cerrado.

133.— Para $x > 0$, f es continua por ser composición, diferencia y cociente de continuas. Además debe cumplirse que el límite de f en 0^+ sea igual a c , de donde resulta: $a - b = c$.

134.— a) A partir de $a + b = 2$, $a = kb$, $A = \pi ab$, se obtiene: $A = 4\pi \frac{k}{(k+1)^2}$.

b) $k_M = 1 \implies a = b = 1 \implies A_M = \pi$. $A'' < 0 \implies$ máximo.

c) Sí, pues la circunferencia es la figura geométrica de mayor área para un perímetro dado.

135.— Dos soluciones: $I_1 = \arctan e^x + C$; $I_2 = \arctan(\sinh x) + C$.

136.— $I = \arcsen(\sen^2 x) + C$.

7.5. Cuestiones tipo test (V-F)

1.— Sean r y s dos números irracionales cualesquiera. Entonces:

- ☐ • $\frac{r}{s}$ puede ser racional.
- ☐ • $\frac{r}{s}$ puede no existir.
- ☐ • $\frac{r}{s} \geq 1$ ó $\frac{r}{s} < 1$, siempre.
- ☐ • Existe al menos una sucesión de números racionales cuyo límite es $\frac{r}{s}$.

2.— Sean los conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} / a^2 \leq 3\}$ y $B = \{b \in \mathbb{R} / b^2 > 3\}$. Se cumple que:

- ☐ • A está acotado superiormente pero no inferiormente.
- ☐ • A tiene máximo.
- ☐ • A tiene supremo en $\mathbb{R}$, pero no máximo.
- ☐ • A tiene ínfimo en $\mathbb{R}$, pero no en $\mathbb{Q}$.
- ☐ • B está acotado inferiormente, pero no superiormente.
- ☐ • B no tiene mínimo, pero sí ínfimo.
- ☐ • A y B son complementarios, es decir $A \cup B = \mathbb{R}$.

3.— Para poder aplicar el principio de inducción a un conjunto de infinitos elementos, con el fin de demostrar una propiedad, es necesario que:

- ☐ • Todos los elementos del conjunto sean números enteros.
- ☐ • Todos los elementos del conjunto sean números racionales.
- ☐ • El conjunto sea numerable.
- ☐ • El conjunto tenga estructura de cuerpo ordenado.

4.— Sean las sucesiones de término general $a_n = \frac{7^n - 1}{7^n}$ y $b_n = \frac{8n + 1}{8n}$, $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que:

- ☐ • Son de Cauchy pero no convergen en $\mathbb{Q}$.
- ☐ • Definen los números reales inmediatamente anterior y posterior a 1.
- ☐ • Convergen a un mismo número racional.
- ☐ • No convergen en $\mathbb{Q}$ pero sí en $\mathbb{R}$.

5.— Entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ existe una correspondencia biunívoca. Esto significa que:

- ☐ • Puede asignarse un número de orden a cada número racional.
- ☐ • Dado un racional, siempre es posible hallar el racional que le sigue en la recta real.
- ☐ • Entre dos números naturales existe como máximo un número finito de racionales.
- ☐ • $\mathbb{Q}$ es numerable.

6.– Sea el espacio métrico (E, d) y el conjunto $A \subset E$.

- ___• Todo punto frontera de A es de acumulación de A .
 - ___• Todo punto de acumulación de A es, o bien frontera, o bien interior de A .
 - ___• Si $Fr(A) \subset A$, entonces $A = \overline{A}$.
 - ___• Si $Fr(A) \cap A = \emptyset$, entonces $A = \overset{\circ}{A}$.
-

7.– De la frontera de un conjunto $A \subset E$, podemos afirmar que:

- ___• Es un cerrado sólo si el conjunto A es abierto.
 - ___• Es siempre un abierto.
 - ___• Es siempre un cerrado.
 - ___• No contiene ningún punto aislado de A .
-

8.– Sea (E, d) un espacio métrico y $A, B \subset E$. Se cumple:

- ___• Si $A \subset B = \overline{B}$, entonces A es cerrado.
 - ___• $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, siempre.
 - ___• $\overline{A}$ puede no contener algún punto de A .
 - ___• $\overline{(\overset{\circ}{A})} = A$.
-

9.– Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. Podemos afirmar que:

- ___• $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es abierto.
 - ___• $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es cerrado.
 - ___• El conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 2\}$ es abierto y cerrado.
 - ___• Todo cerrado es intervalo cerrado.
-

10.– Consideramos el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la métrica natural.

- ___• Todo abierto en $\mathbb{R}$ es intervalo abierto.
 - ___• Todo intervalo cerrado es cerrado.
 - ___• El conjunto de los naturales es cerrado.
 - ___• $\mathbb{R}$ coincide con su adherencia.
-

11.– A partir de la definición de entorno podemos asegurar que:

- ___• Un entorno del punto x es todo conjunto que contiene a x .
 - ___• Un entorno de un punto es siempre abierto.
 - ___• Todo conjunto abierto que contiene al punto x es entorno suyo.
 - ___• La adherencia de un conjunto A es entorno de todos los puntos interiores de A .
-

12.– Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n < 0$ y $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{a_n\}$ cumple:

- ___• Tiene límite 0.
 - ___• Diverge a $-\infty$.
 - ___• Está acotada inferiormente pero no superiormente.
 - ___• Es convergente en $\mathbb{R}$.
-

13.– Sea la sucesión $\{a_n\}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$. Se puede demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$:

- ___• A partir de las propiedades de los límites.
 - ___• A partir del límite de la media geométrica.
 - ___• Sólo en el caso de que a_n se mantenga positivo a partir de un cierto término.
 - ___• A partir del criterio de Stolz.
-

14.– Dadas las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, donde $b_n = a_n^2$. Si existe $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, podemos afirmar lo siguiente:

- ___• El límite de la sucesión $\{a_n\}$ es $a = \sqrt{b}$.
 - ___• El límite de la sucesión $\{a_n\}$ es $a = -\sqrt{b}$.
 - ___• El límite de la sucesión $\{a_n\}$ es $a = \sqrt{b}$ ó bien $a = -\sqrt{b}$, pero necesitamos conocer la sucesión para saber cual es el verdadero.
 - ___• La sucesión $\{c_n\}$, con $c_n = \cosh a_n$, es convergente en cualquier caso.
-

15.– Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones nulas de términos positivos. Para obtener los límites que se indican a continuación, podemos sustituir a_n , b_n y c_n por sus infinitésimos equivalentes.

- ___• $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \cdot b_n}{c_n}$
 - ___• $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{c_n}$
 - ___• $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n - c_n}$
 - ___• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln b_n$
-

16.— Dadas las sucesiones de números reales $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$, donde $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. Si existe $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, podemos afirmar de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que:

- ☐ • No pueden ser divergentes las dos.
 - ☐ • Pueden no ser convergentes las dos.
 - ☐ • $\{a_n\}$ converge y $\{b_n\}$ está acotada inferiormente por un número positivo.
 - ☐ • Pueden ser oscilantes las dos.
-

17.— Sea la función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = (-a, a) \subset \mathbb{R}$.

- ☐ • f puede descomponerse siempre en suma de una función par y una impar.
 - ☐ • Si $f(x)$ es monótona creciente, $|f(x)|$ también lo es.
 - ☐ • Si $f \in C^1$, la función y su derivada son continuas.
 - ☐ • Si f es una función impar, su gráfica es una curva simétrica respecto al eje OY .
-

18.— La función $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$ verifica:

- ☐ • Es derivable en todo $\mathbb{R}$.
 - ☐ • Es continua en todo $\mathbb{R}$.
 - ☐ • No está acotada en $\mathbb{R}$.
 - ☐ • $f(1) = f(-1)$, luego $f'(x) = 0$ en algún punto de $[-1, 1]$.
-

19.— Sea la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, siendo $D \subset \mathbb{R}$ su dominio.

- ☐ • Si f tiene límite en el punto $c \in \mathbb{R}$, está definida en ese punto.
 - ☐ • Si f tiene límite en el punto $c \in D$, está acotada en un entorno de ese punto.
 - ☐ • Si f es continua en el punto $c \in D$, tiene límites laterales iguales en c .
 - ☐ • Si $|f(x)|$ es continua, $f(x)$ también lo es.
-

20.— Sean f y g funciones de I en $\mathbb{R}$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

- ☐ • Si f y g son continuas en I , f/g es continua en I .
 - ☐ • Si f y $f \cdot g$ son continuas en I , g es continua en I .
 - ☐ • Si $f + g$ es continua en I , f y g son continuas en I .
 - ☐ • Si f y $f + g$ son continuas en I , g es continua en I .
-

21.— Sea la función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

- ___ • La imagen de $[a, b]$ será también un intervalo cerrado.
 - ___ • f es uniformemente continua.
 - ___ • Si f es monótona, es derivable.
 - ___ • Si f es derivable, es diferenciable.
-

22.— La función $y = e^{\frac{1}{x}} \dots$

- ___ • Pasa por el origen.
 - ___ • Su mínimo absoluto es 0.
 - ___ • Su recorrido tiene ínfimo.
 - ___ • Tiene una sola asíntota y es horizontal.
-

23.— Sea $E(x)$ la parte entera de x . La función $f(x) = E(|x|) \dots$

- ___ • Es una función par.
 - ___ • Es discontinua en los valores enteros de x .
 - ___ • Existen infinitos intervalos no vacíos en los que la función es derivable.
 - ___ • Es monótona creciente.
-

24.— Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

- ___ • Si f no está acotada en (a, b) , entonces no es continua en (a, b) .
 - ___ • Si g es una función par, derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces $g'(0) = 0$.
 - ___ • Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = 0$.
 - ___ • Si f es continua en $[a, b]$ y se anula en un punto interior de dicho intervalo, entonces tiene distinto signo en los extremos.
-

25.— Sea la función f , derivable en todo $\mathbb{R}$. Si $f(1) = 1$ y $f(2) = 2$, entonces. . .

- ___ • $\exists \xi \in (1, 2) / f(\xi) = \xi$.
 - ___ • $\exists \xi \in (1, 2) / f(\xi) = 1$.
 - ___ • $\exists \xi \in (1, 2) / f(\xi) = \sqrt{2}$.
 - ___ • $\forall \xi \in (1, 2) / f'(\xi) > 0$.
-

7.6. Soluciones a las cuestiones tipo test

Ejercicio	Respuestas válidas
1	a, c, d
2	c, d
3	c
4	c
5	a, d
6	b, c, d
7	c
8	b
9	Ninguna
10	b, c, d
11	c, d
12	d
13	Ninguna
14	d
15	a, d
16	b, d
17	a, c
18	b, c
19	b, c
20	d
21	a, b, d
22	c
23	a, c
24	b
25	c

