CÁLCULO INFINITESIMAL 1

APUNTES DE LA ASIGNATURA

(con ejercicios de autoevaluación)

Jaime Fe Marqués
ETSI Caminos - A Coruña

This work by Jaime Fe Marqués is licensed under Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Objetivo de estos apuntes

El presente texto se propone ser una ayuda para los estudiantes de la asignatura Cálculo Infinitesimal 1.

Contiene las ideas fundamentales que se exponen en las clases de teoría, acompañadas de ejemplos resueltos y ejercicios propuestos. Al recoger una parte importante del contenido de dichas sesiones, permite dedicar mayor atención a la explicación, facilitando así la comprensión de la materia. Los ejemplos resueltos y los ejercicios propuestos facilitan asimismo el estudio personal posterior.

Estos apuntes pretenden ser un apoyo a las clases, pero no sustituirlas. En el aula se desarrollan y comentan las ideas aquí contenidas, se relacionan conceptos, se resuelven ejercicios y se dibujan algunos gráficos que complementan los apuntes. Por ello se recomienda vivamente la asistencia a clase para facilitar el dominio de la materia. En la medida de lo posible, es deseable una lectura de los apuntes previa a las clases, que ayude a conocer con antelación los principales aspectos del tema que se va a tratar.

Índice

TEMA V. CÁLCULO DE PRIMITIVAS 107

Tema I. El número real (18.09.2024)

1. Introducción

1.1. Condición necesaria y suficiente

Implicación. Cuando de un hecho (suceso, propiedad...) A, se deduce otro B, decimos que "A implica B", lo cual se denota con el símbolo $\Longrightarrow$.

$$\boxed{\text{A} \Longrightarrow \text{B}}$$

Esto se enuncia también como "si A, entonces B".

En este caso, **A es condición suficiente de B** (es suficiente que ocurra A para que ocurra B). Y **B es condición necesaria de A** (B se deduce necesariamente de A).

Ejemplo. En la frase "si piso una bombilla, se rompe", afirmamos que el hecho de pisar la bombilla es suficiente para que se rompa, luego es condición suficiente; y que la rotura se produce necesariamente como consecuencia, luego es condición necesaria. Pero no es necesario pisar la bombilla para que se rompa, pues se puede romper por otro motivo (p. ej. un martillazo); y el hecho de que la bombilla se rompa no es suficiente para asegurar que la hemos pisado, por el mismo motivo. Es decir en la relación

$$\text{Si piso la bombilla} \Longrightarrow \text{se rompe}$$

"pisar la bombilla" es condición suficiente para romperse, pero no necesaria; y "romperse" es condición necesaria de pisar la bombilla, pero no suficiente.

Equivalencia. Si se dan a la vez "A implica B" y "B implica A", entonces A es condición necesaria y suficiente de B y B es condición necesaria y suficiente de A. En este caso se dice que "A equivale a B" (o "B equivale a A") y se denota como

$$\boxed{\text{A} \Longleftrightarrow \text{B}}$$

Esto se enuncia también como "A si y sólo si B".

Ejemplo. Si el único modo de aprobar una asignatura es obtener una nota N mayor o igual que 6 en un trabajo, "$N \geq 6$" es la condición necesaria y suficiente para aprobar. Es decir que si es $N \geq 6$, se aprueba. Y si se aprueba, entonces $N \geq 6$.

Proposición contraria. Dada una proposición A, su contraria representa el caso o suceso complementario a la proposición A y se denota por no(A).

Ejemplo. Dados los números x e y, si la proposición A es "x es mayor que y", su contraria, no(A), es "x es menor o igual que y".

$$\big[\text{no}(x > y)\big] = \big[x \leq y\big]$$

Si la proposición contraria de una dada A, es no(A), es inmediato ver que la proposición contraria de no(A) será A.

$$\boxed{\text{no}\big(\text{no(A)}\big) = \text{A}}$$

En el ejemplo anterior, la proposición contraria de no(A) ("x es menor o igual que y") es "x es mayor que y", es decir A.

Relación entre proposiciones contrarias. Si entre dos proposiciones se da una implicación, entre sus contrarias se da la implicación en sentido contrario y viceversa, es decir

$$\boxed{\big[\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}\big] \Longleftrightarrow \big[\mathrm{no(B)} \Longrightarrow \mathrm{no(A)}\big]}$$

Demostración. Lo razonamos de izquierda a derecha (de derecha a izquierda se razona igual). Veamos que si $\big[\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}\big]$, entonces $\big[\mathrm{no(B)} \Longrightarrow \mathrm{no(A)}\big]$. En efecto, si de no(B) no se dedujera no(A), significa que podría darse A. Y al darse A, se daría B, con lo que tendríamos a la vez no(B) y B, lo cual no tiene sentido (no puede ocurrir algo y su contrario a la vez).

Ejemplo. Si obtener una nota N mayor o igual que 5 en el examen supone aprobar una asignatura, entonces no aprobar supone que no se ha obtenido esa nota, pues si se hubiera obtenido, se habría aprobado.
Obsérvese que lo contrario de obtener una nota N mayor o igual que 5 no es que N sea menor que 5, sino no obtener dicha nota. Esto puede deberse a obtener una menor o a no obtener ninguna, p. ej. debido a no presentarse.

1.2. Demostración por reducción al absurdo

Este modo de demostración consiste en que, para probar una propiedad P, suponemos lo contrario y razonamos. Si llegamos a un resultado falso (a un absurdo), hemos probado la propiedad. Resulta particularmente útil cuando hemos de demostrar algo y no sabemos de qué partir.

Demostración. Queremos probar P. Para ello suponemos no(P) y -razonando- llegamos a R (falso). A partir de la relación entre proposiciones contrarias del apdo. **1.1**, tenemos

$$\big[\mathrm{no(P)} \Longrightarrow \mathrm{R}\big] \Longleftrightarrow \big[\mathrm{no(R)} \Longrightarrow \mathrm{no}\big(\mathrm{no(P)}\big) = \mathrm{P}\big]$$

Es decir, nuestro razonamiento -obtener R a partir de no(P)- equivale a obtener P partir de algo verdadero $\big(\mathrm{no(R)}\big)$, con lo que hemos demostrado la propiedad P, como queríamos.

2. Sucesivas ampliaciones del concepto de número

Vamos a revisar muy brevemente los distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales), que se suponen conocidos, mostrando que cada nuevo conjunto da solución a una operación que no la tenía en el conjunto anterior. Esto nos será de utilidad para la posterior introducción de los números reales.

2.1. Números naturales

Designamos con la letra $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, que nos permite contar y enumerar las cosas.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Vemos que tiene un número infinito de elementos y que no contiene al 0 (hay textos que incluyen al 0 entre los naturales, pero aquí no lo haremos). También observamos que la suma y el producto de elementos de $\mathbb{N}$ son elementos de $\mathbb{N}$, es decir que $+$ y $\cdot$ son operaciones “cerradas”.

Subconjuntos de $\mathbb{N}$. El conjunto $\mathbb{N}$ tiene subconjuntos como los pares, los múltiplos de 3 o las potencias de 5. Representamos estos subconjuntos respectivamente como:

$$\{2n\}_{n\in\mathbb{N}}\ , \quad \{3n\}_{n\in\mathbb{N}}\ , \quad \{5^n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

y sus elementos se obtienen dando valores naturales a n en la expresión entre llaves.

Comparando $\mathbb{N}$ con el conjunto de los pares, podemos hacernos la pregunta de si hay más naturales que pares. Por un lado es claro que hay un par cada dos naturales. Por otro, podemos asignar un par a cada natural, de modo que para cada natural haya un par y viceversa.

$$1 \longleftrightarrow 2,\ 2 \longleftrightarrow 4,\ 3 \longleftrightarrow 6, \ldots,\ n \longleftrightarrow 2n, \ldots$$

en cuyo caso parece que hay el mismo número. Incluso podemos encontrar correspondencias como la anterior, que sugieran que hay más pares que naturales. La conclusión de esta aparente contradicción es que, al ser conjuntos infinitos, es inadecuado decir que hay en ellos más o menos elementos. Lo que podemos afirmar es que entre ambos conjuntos existe una biyección, por lo que decimos que tienen el mismo **cardinal**. Lo mismo ocurre entre $\mathbb{N}$ y otros subconjuntos suyos como los múltiplos de 3 o las potencias de 5, ya mencionados.

Condición de conjunto infinito. Acabamos de ver que $\mathbb{N}$ es biyectivo con un subconjunto suyo distinto de él (subconjunto **propio**). Se demuestra que esta es una condición suficiente para que un conjunto sea infinito.

2.2. Números enteros

Si en el conjunto de los naturales tratamos de dar solución a la ecuación $3+x=8$, la solución es el número natural $x=5$. Pero, si la ecuación es $8+x=3$, vemos que ningún natural la cumple, lo que nos lleva al concepto de número negativo y a la necesidad de la ampliación de $\mathbb{N}$ para obtener el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Además de incluir el elemento neutro 0, observamos que para cada número natural n hemos añadido su opuesto (elemento que sumado a n da como resultado el 0),

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, (-n) \in \mathbb{Z} \,\big/\, n + (-n) = 0$$

lo que permite definir la diferencia como **suma del opuesto**. Es inmediato que los naturales son un subconjunto de los enteros

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

y podemos describir $\mathbb{Z}$ como **una ampliación de $\mathbb{N}$ que nos permite definir la diferencia**.

2.3. Números racionales

Si en $\mathbb{Z}$ tratamos de dar solución a la ecuación $3x = 12$, la solución es el entero $x = 4$. Pero, si la ecuación es $12x = 3$, vemos que no existe solución. Esto nos lleva al concepto de número fraccionario y a la necesidad de ampliar $\mathbb{Z}$ para obtener el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ \text{donde } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$$

donde p/q y p'/q' representan el mismo número si $pq' = p'q$.
Las operaciones de suma y producto de fracciones son conocidas. Y ahora podemos obtener el inverso de cualquier elemento distinto de 0 (cuyo producto por el elemento da 1)

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\ (p \neq 0)\ \exists \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} \Big/ \ \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = 1$$

lo que nos permite definir el cociente como producto por el inverso.
Es fácil ver que los números de la forma $p/1, p \in \mathbb{Z}$ se comportan como los enteros, lo que nos permite afirmar que éstos son un subconjunto de los racionales

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

y podemos describir $\mathbb{Q}$ como **una ampliación de $\mathbb{Z}$ que nos permite definir el cociente**.

2.4. Conjuntos numerables. Principio de inducción

Definición. Un conjunto es numerable si es biyectivo con $\mathbb{N}$ o un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Ejemplos. Por la definición dada, todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es numerable. También es fácil demostrar que $\mathbb{Z}$ es numerable. Para ello basta tomar en primer lugar el 0 y a continuación enteros positivos y negativos alternativamente.

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

De este modo, todo entero aparece en la lista una sola vez y es sencillo averiguar la posición de cualquiera de ellos, a partir de lo cual se puede despejar el valor del entero que ocupa una determinada posición, par o impar. Más complicado resulta obtener una única expresión para el número que ocupa la posición n (véase el documento de apoyo "Término general de la sucesión de los enteros").

Principio de inducción. Para demostrar una propiedad P de los elementos de un conjunto numerable, podemos proceder del siguiente modo:

1) Se comprueba que se cumple la propiedad para el primer elemento: $P(1)$ es cierta.

2) Se demuestra que, si se cumple la propiedad para $n = k$, se cumple para $n = k + 1$.

$$P(k) \text{ es cierta} \Longrightarrow P(k+1) \text{ es cierta}$$

A partir de lo anterior, podemos asegurar que la propiedad se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{1) + 2) \Longrightarrow P(n) \text{ es cierta } \forall n \in \mathbb{N}}$$

Ejemplo. Hemos de demostrar la fórmula de la suma de los n primeros naturales:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Lo comprobamos para $n = 1$.

$$1 = \frac{1\,(1+1)}{2} \Longrightarrow P(1) \text{ es cierta}$$

2) Suponemos que la fórmula se cumple para $n = k$

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k\,(k+1)}{2}$$

Para demostrar que se cumple para $n = k + 1$, añadimos $(k + 1)$ al miembro izquierdo y operamos, teniendo en cuenta la igualdad anterior.

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

que corresponde a la expresión que hemos de demostrar, para $n = k+1$, es decir $P(k+1)$, por lo que hemos demostrado que se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicios. Demuestra que:

1. La suma de los cuadrados de los n primeros naturales vale $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. La suma de los cubos de los n primeros naturales vale $(1 + 2 + \cdots + n)^2$.

3. Estructura de cuerpo y relaciones de orden

3.1. Definición de cuerpo

Sea un conjunto K, de dos o más elementos, en el que se definen dos operaciones internas $+$ y $\cdot$ (suma y producto). Decimos que tiene estructura de cuerpo conmutativo si y sólo si:

a) Con respecto a $+$, tiene las propiedades asociativa, conmutativa, existencia del neutro y existencia del opuesto. Es decir que, si x, y, z son elementos cualesquiera de K, se cumple:

$$x+(y+z) = (x+y)+z; \;\; x+y = y+x; \;\; \exists\, 0 \in K/\, \forall x,\; x+0 = x; \;\; \exists\,(-x) \in K/\, x+(-x) = 0$$

b) Con respecto a $\cdot$, tiene las propiedades asociativa, conmutativa, existencia del elemento unidad y existencia del inverso. Si x, y, z son elementos cualesquiera de K, se cumple:

$$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z; \;\; x\cdot y = y\cdot x; \;\; \exists\, 1 \in K/\, \forall x,\; x\cdot 1 = x; \;\; \forall x \neq 0,\, \exists\, x^{-1} \in K/\, x\cdot\left(x^{-1}\right) = 1$$

c) La operación $\cdot$ es distributiva respecto a $+$. Es decir, $\forall x, y, z \in K$ se cumple

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Ejemplo. Es fácil comprobar que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no tienen estructura de cuerpo, pero $\mathbb{Q}$ sí la tiene.

3.2. Relación de orden

Dado un conjunto K, una relación R entre sus elementos es de orden si y sólo si $\forall a, b, c \in K$ se cumplen las propiedades siguientes:

a) Reflexiva. Todo elemento está relacionado consigo mismo: aRa.

b) Antisimétrica. Si a está relacionado con b y b con a, coinciden:

$$\left.\begin{array}{l} a\,R\,b \\ b\,R\,a \end{array}\right\} \Longrightarrow a = b$$

c) Transitiva. Si a está relacionado con b y b con c, a lo estará con c:

$$\left.\begin{array}{l} a\,R\,b \\ b\,R\,c \end{array}\right\} \Longrightarrow a\,R\,c$$

Las relaciones de orden suelen denotarse con el símbolo $\leq$. También usamos el símbolo $\geq$:

$$a \geq b \Longleftrightarrow b \leq a$$

Si a está en relación con b, pero son distintos, se escribe $a < b$ (relación de **orden estricto**):

$$a \leq b,\; a \neq b \Longrightarrow a < b$$

Orden total. El orden es total si dos elementos cualesquiera están relacionados:

$$\forall a, b \in K \Longrightarrow a \leq b \text{ o bien } b \leq a$$

De lo contrario, se trata de un **orden parcial**.

Orden compatible. Si en K están definidas las operaciones $+$ y $\cdot$, decimos que el orden es:

- Compatible con la suma, si y sólo si:

$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c,\ \forall c \in K$$

- Compatible con el producto, si y sólo si:

$$a \leq b \Longrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c,\ \forall c \in K, c > 0$$

Ejemplo 1. Es de orden total compatible con $+$ y $\cdot$, la relación $\leq$ entre racionales, que puede definirse como

$$\text{Sean } p, q \in \mathbb{Q} : \boxed{p \leq q \Longleftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q},\ r \geq 0 \big/ p + r = q}$$

Ejemplo 2. Es de orden parcial la relación de inclusión entre conjuntos, que se denota por $\subset$.

3.3. Cuerpo ordenado

Definición. Es un cuerpo conmutativo dotado de una relación de orden total, compatible con las operaciones suma y producto.

Propiedades. Un cuerpo ordenado posee las siguientes propiedades. Las tres primeras y la **e)** se deducen de la definición de cuerpo ordenado; la **f)** se demuestra a partir de la **e)**; y la **g)** y la **h)** lo hacen a partir de la **f)**; para demostrar la **d)** se utilizan varias.

a) $\boxed{a \leq b,\ c \leq d \Longrightarrow a + c \leq b + d}$

D: $a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$; $\quad c \leq d \Longrightarrow b + c \leq b + d$. Entonces $a + c \leq b + d$.

b) $\boxed{a \leq 0 \Longrightarrow -a \geq 0}$

D: $a \leq 0 \Longrightarrow a + (-a) \leq 0 + (-a) \Longrightarrow 0 \leq -a \Longrightarrow -a \geq 0$.

c) $\boxed{a \leq b \Longrightarrow -a \geq -b}$

D: Se propone como ejercicio, a partir de la demostración anterior.

d) $\boxed{a \leq b,\ c < 0 \Longrightarrow ac \geq bc}$

D: Se demuestra a partir de **b)**, **c)**, **f)** y la definición de cuerpo ordenado.

e) $\boxed{a \cdot 0 = 0}$

D: $a\,b = a(b + 0) = a\,b + a \cdot 0 \Longrightarrow \overbrace{-(a\,b) + (a\,b)}^{0} = \overbrace{-(a\,b) + (a\,b)}^{0} + a \cdot 0 \Longrightarrow a \cdot 0 = 0.$

f) $\boxed{a(-1) = -a}$

D: $0 = a \cdot 0 = a(-1 + 1) = a(-1) + a \cdot 1 \Longrightarrow 0 = a(-1) + a \Longrightarrow a(-1) = -a.$

g) $\boxed{(-a)(-b) = ab}$

D: Se propone como ejercicio, a partir de **f)**.

h) $\boxed{-a - b = -(a + b)}$

D: Se propone como ejercicio, a partir de **f)**.

3.4. Cotas e intervalos

Sea A un conjunto entre cuyos elementos existe una relación de orden. Sea $D \subset A$. Decimos que:

a) El elemento $M \in A$ es **cota superior** de D si

$$M \geq x, \forall x \in D$$

en cuyo caso se dice que D está acotado superiormente.

La menor de las cotas superiores (si existe) es el **supremo**.

Si el supremo pertenece a D, se le llama **máximo**.

b) El elemento $m \in A$ es **cota inferior** de D si

$$m \leq x, \forall x \in D$$

En este caso se dice que D está acotado inferiormente.

La mayor de las cotas inferiores (si existe) es el **ínfimo**.

Si el ínfimo pertenece a D, se le llama **mínimo**.

c) **Intervalos.** En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales definimos intervalo cerrado de extremos a y b como:

$$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{Q} \,/\, a \leq x \leq b\right\}$$

Ejercicios.

1. Define los intervalos (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, obteniendo para cada uno de ellos una cota superior y otra inferior, así como el supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

2. Demuestra que el supremo, si existe, es único.

3.5. Valor absoluto

Definición. Sea K un cuerpo ordenado y sea $K^+ = \left\{x \in K \,/\, x > 0\right\}$. Llamamos valor absoluto a la siguiente aplicación de K en $K^+ \cup \{0\}$:

$$|\,| : K \to K^+ \cup \{0\} \,/\, |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Definición equivalente. En algunas demostraciones es útil la siguiente definición, equivalente a la anterior:

$$|x| = \text{máx}\,\{x, -x\}$$

D: Demostraremos la implicación de izquierda a derecha, es decir

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \implies |x| = \text{máx}\,\{x, -x\}$$

a) Sea $x \geq 0$. Por la definición de valor absoluto y la propiedad b) de un cuerpo ordenado:

$$|x| = x; \quad -x \leq 0$$

Por lo tanto

$$|x| = x \geq 0 \geq -x \implies |x| = \text{máx}\,\{x, -x\}$$

b) Sea $x < 0$. Por la definición de valor absoluto y la propiedad b) de un cuerpo ordenado:

$$|x| = -x; \quad -x > 0$$

Por lo tanto

$$|x| = -x > 0 > x \Longrightarrow |x| = \max\{x, -x\}$$

Ejercicio. Demuestra la implicación en sentido de derecha a izquierda. Es decir que, si $|x| = \max\{x, -x\}$, se cumple $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Propiedades del valor absoluto.

a) $\boxed{|x| > 0,\ \forall x \neq 0;\ |0| = 0}$

D: Si $x > 0 \Longrightarrow |x| = x > 0$. Si $x < 0 \Longrightarrow |x| = -x > 0$. Luego, $\forall x \neq 0, |x| > 0$.

Si $x = 0 \Longrightarrow |x| = x = 0$.

b) $\boxed{|x| < y \Longleftrightarrow -y < x < y}$

D: Usando la segunda definición del valor absoluto

$$|x| = \max\{x, -x\} \Longrightarrow \begin{cases} |x| \geq x, \\ |x| \geq -x \end{cases}$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} y > |x| \geq x \Longrightarrow x < y \\ y > |x| \geq -x \Longrightarrow -y < x \end{array}\right\} \Longrightarrow -y < x < y$$

c) $\boxed{|x\,y| = |x|\,|y|}$, a partir de la cual, si $x \neq 0$, $\boxed{\left|x^{-1}\right| = |x|^{-1}}$

D: La primera igualdad se demuestra utilizando las propiedades de un cuerpo ordenado en los distintos casos posibles: $x = 0$; $y = 0$; $x, y > 0$; $x > 0, y < 0$; $x < 0, y > 0$; $x, y < 0$.

Demostramos la segunda, $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.

$$1 = |1| = \left|x\,x^{-1}\right| = |x|\left|x^{-1}\right| \Longrightarrow \left|x^{-1}\right| = |x|^{-1}$$

d) $\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}$, a partir de la cual $\boxed{|x - y| \geq ||x| - |y||}$

D: $|x| \geq x$, $|x| \geq -x$. También $|y| \geq y$, $|y| \geq -y$. Entonces

$$|x| + |y| \geq x + y; \quad |x| + |y| \geq -x - y = -(x + y)$$

Si $|x| + |y|$ es mayor o igual que $x + y$ y que $-(x + y)$, será mayor o igual que el mayor de ambos, o sea, $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Para demostrar la segunda desigualdad, se propone seguir el método siguiente, haciendo lo mismo con y y concluyendo.

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Longrightarrow |x - y| \geq |x| - |y|$$

Ejercicio. Hallar los valores de x que son solución de la inecuación $|x| > k \in \mathbb{R}$ (está resuelto en la cuestión de autoevaluación del tema). **Sol:** $x \in (-\infty, -k) \cup (k, \infty)$.

4. Sucesiones en $\mathbb{Q}$

Vamos a continuación a dar unas ideas básicas de sucesiones, que se tratarán con más profundidad en el tema III. Las sucesiones nos serán de utilidad al estudiar las propiedades y también las "carencias" del conjunto $\mathbb{Q}$, que nos llevarán a definir los números reales.

4.1. Definición

De modo informal, podemos definir una sucesión en $\mathbb{Q}$ como un conjunto ordenado de infinitos racionales. Se obtienen sus términos dando valores a n en el término general $a_n \in \mathbb{Q}$ y la sucesión se representa por su término general entre llaves:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots$$

Un caso particular de interés es el de las sucesiones monótonas, que pueden ser de dos tipos.

1. Monótona creciente, si $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Monótona decreciente, si $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Si no se verifica el signo $=$, es decir que cada término es mayor que el anterior (o menor), se dice que la sucesión es estrictamente monótona.

1. Estrictamente creciente, si $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Estrictamente decreciente, si $a_{n+1} < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, una sucesión es acotada si sus términos en valor absoluto no superan un cierto valor $k > 0$, es decir

$$\exists k > 0 \big/ \ |a_n| \leq k \ \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que equivale a decir que están comprendidos entre k y $-k$ (ambos inclusive).

4.2. Sucesión convergente

Una sucesión converge en $\mathbb{Q}$ si tiene límite finito, es decir existe un número racional al que los términos de la sucesión se acercan tanto como queramos, sin más que tomar términos suficientemente avanzados. Esta condición se expresa como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N} \big/ \ |a_m - \alpha| < \varepsilon \ \forall m \geq n$$

Ejemplo. La sucesión de término general a_n

$$a_n = \frac{2n+3}{n+1} \quad \left(= \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots \right)$$

tiene como límite 2. Esto se puede justificar, por ejemplo, descomponiendo a_n y observando que el segundo sumando llega a hacerse tan pequeño como queramos

$$a_n = \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1} \longrightarrow 2$$

En el tema III estudiaremos métodos más generales para el cálculo de límites.

4.3. Sucesión de Cauchy

Una sucesión es de Cauchy si sus términos llegan a acercarse entre sí tanto como queramos, sin más que tomar términos suficientemente avanzados. Es decir

$$\{a_n\} \text{ es de Cauchy } \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} \big/ \, |a_p - a_q| < \varepsilon \ \forall p, q \geq n$$

Relación. Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Demostración. Partimos de la definición de sucesión convergente, usando $\varepsilon/2$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} \big/ \, |a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall m \geq n$$

Entonces, $\forall p, q \geq n$ se cumple

$$\left.\begin{array}{l} |a_p - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |a_q - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow |a_p - a_q| = |a_p - \alpha + \alpha - a_q| \leq |a_p - \alpha| + |\alpha - a_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

luego dos términos llegan a estar tan próximos entre sí como queramos.

5. Propiedades de $\mathbb{Q}$

5.1. Cuerpo ordenado

El conjunto de los racionales tiene estructura de cuerpo (apdo. **3.1**) y la relación $\leq$ definida en **3.2** cumple las propiedades de orden total compatible, por lo que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado.

5.2. Orden denso

Decimos que el orden en un conjunto es denso si, entre dos elementos distintos en relación de orden, existe otro; es decir, se cumple

$$\forall a, b \in \mathbb{Q},\ a < b,\ \exists c \in \mathbb{Q} \big/ \, a < c < b$$

Para justificar que el orden en $\mathbb{Q}$ es denso, basta encontrar, para cualquier par de elementos, uno intermedio c que cumpla la condición anterior. El más sencillo es la semisuma de ambos.

Demostración. Sea $a < b$. Entonces, al ser el orden compatible con la suma y el producto,

$$a < b \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + a < a + b \\ a + b < b + b \end{array}\right\} \Longrightarrow 2a < a + b < 2b \overset{\cdot\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} a < \frac{a+b}{2} < b$$

Consecuencias.

1. Si entre los racionales a y b existe (al menos) otro c, entre a y c existirá un segundo, c_1, y entre c y b un tercero, c_2. Entre cada dos consecutivos de los anteriores habrá un nuevo racional y así sucesivamente. Como podemos repetir el proceso tantas veces como queramos, concluimos que **entre dos racionales distintos hay infinitos racionales**.

2. Una segunda consecuencia del orden denso es que **no existe el racional siguiente a uno dado** (en la recta). Si dado $p \in \mathbb{Q}$, pudiéramos encontrar el racional q inmediatamente posterior a p, al ser $p < q$ habría infinitos racionales entre ambos, luego queda demostrado por reducción al absurdo que no existe el racional siguiente a p.

Ejercicio. Razona si la ordenación usual en los enteros es densa.

5.3. Conjunto numerable

En el apartado **2.4** hemos visto que $\mathbb{Z}$ es numerable tomando alternativamente enteros positivos y negativos. Pero entre cada dos enteros hay infinitos racionales, por lo que no es tan inmediato demostrar la numerabilidad de $\mathbb{Q}$. Para simplificar consideraremos sólo los racionales positivos. En primer lugar construimos una tabla en la que estén todos.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1}\ , & \frac{2}{1}\ , & \frac{3}{1}\ , & \frac{4}{1}\ , & \dots \\
\frac{1}{2}\ , & \frac{2}{2}\ , & \frac{3}{2}\ , & \frac{4}{2}\ , & \dots \\
\frac{1}{3}\ , & \frac{2}{3}\ , & \frac{3}{3}\ , & \frac{4}{3}\ , & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Todo elemento de la tabla corresponde a un número racional y un racional cualquiera p/q estará en la fila q, columna p. Para ordenarlos procedemos por diagonales: la primera contiene al $1/1$, la segunda al $1/2$ y al $2/1$, etc. Los racionales positivos ordenados quedan como sigue

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \dots$$

De este modo, vemos que cada número racional corresponde en la lista a un número natural, con lo que demostramos que el conjunto de los racionales es biyectivo con $\mathbb{N}$, por tanto numerable.

Ejercicio. Calcula la posición que ocupa el racional $\frac{p}{q}$. **Sol:** $n_{p,q} = p + \frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}$

5.4. Expresión decimal de un número racional

Todo número racional puede expresarse en forma decimal. Esta representación es de uno de los tres tipos siguientes:

1. Decimal finita. Ej: $7/2 = 3.5$
2. Decimal periódica pura. Ej: $7/3 = 2.33333\ldots = 2.\widehat{3}$
3. Decimal periódica mixta. Ej: $7/6 = 1.16666\ldots = 1.1\widehat{6}$

Entonces podemos definir un número racional como límite de una sucesión monótona creciente. Por ejemplo, para el $7/6$,

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1.1,\ a_2 = 1.16,\ a_3 = 1.166,\ a_4 = 1.1666, \ldots a_n = 1.\overbrace{1666\ldots}^{n\,\text{cifras}}$$

6. Necesidad de ampliar $\mathbb{Q}$. Los números reales

Como acabamos de ver, el conjunto $\mathbb{Q}$ soluciona distintos problemas, como el cociente de enteros, pero tiene algunas "carencias". Señalamos tres, que se justificarán a continuación:

1. Existen puntos de la recta que no corresponden a un número racional.
2. Existen subconjuntos de $\mathbb{Q}$ no vacíos, acotados superiormente, que no tienen supremo.

3. Existen sucesiones de Cauchy sin límite en $\mathbb{Q}$.

Antes de empezar, demostraremos que **la raíz cuadrada de 2 no es racional.** Llamamos raíz cuadrada de un número a a otro número b cuyo cuadrado nos da el primero, es decir

$$\sqrt{a} = b \Longleftrightarrow b^2 = a$$

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 4 es ± 2, luego hay dos racionales cuyo cuadrado es 4. Sin embargo, como veremos por reducción al absurdo, no existe un número racional cuyo cuadrado sea igual a 2, es decir que $\sqrt{2}$ no es racional.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir que puede escribirse como p/q, $p, q \in \mathbb{N}$, siendo p/q una fracción irreducible. Resulta lo siguiente:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Longrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Longrightarrow p^2 = 2q^2 \Longrightarrow p^2 \text{ es par}$$

luego p es par (como se prueba más abajo) y puede expresarse como $p = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Sustituyendo resulta

$$p^2 = 4m^2 = 2q^2 \Longrightarrow q^2 = 2m^2$$

luego q^2 es par, por lo que q es par y p/q no es una fracción irreducible, como habíamos supuesto.

Nota. Si el cuadrado p^2 de un número natural es par, p también lo es. De lo contrario sería impar, con lo que su cuadrado también lo sería. En efecto,

$$p = 2n - 1, \; n \in \mathbb{N} \Longrightarrow p^2 = 4n^2 - 4n + 1$$

Como $4n^2$ y $4n$ son pares, p^2 sería impar, contra la hipótesis.

Justificación de las "carencias" del conjunto $\mathbb{Q}$. Analizamos las afirmaciones anteriores.

1. Existen puntos de la recta que no corresponden a un número racional.

   Por ejemplo, consideramos un triángulo rectángulo con catetos de longitud igual a 1, de modo que uno de ellos está sobre OX. Calculamos la longitud de la hipotenusa:

   $$l^2 = 1^2 + 1^2 \Longrightarrow l = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

   Por otro lado, abatiendo sobre el cateto horizontal la hipotenusa, su extremo determina un punto en el eje OX. Pero $\sqrt{2}$ no es un número racional como se ha demostrado, lo que significa que existen puntos de la recta que no corresponden a números racionales.

2. Existen subconjuntos de $\mathbb{Q}$ no vacíos, acotados superiormente, que no tienen supremo.

   Por ejemplo, si consideramos el conjunto A

   $$\mathrm{A} = \left\{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 < 4\right\} = \left\{x \in \mathbb{Q} \,/\; |x| < 2\right\} \Longrightarrow \sup \mathrm{A} = 2$$

   vemos que tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Si ahora definimos el conjunto B

   $$\mathrm{B} = \left\{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 < 2\right\} = \left\{x \in \mathbb{Q} \,/\; |x| < \sqrt{2}\right\} \Longrightarrow \sup \mathrm{B} = \sqrt{2}$$

   resulta que su supremo es $\sqrt{2}$, que no es racional, luego B no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

3. Existen sucesiones de Cauchy sin límite en $\mathbb{Q}$.

   Sea la sucesión de las raíces cuadradas por defecto de $\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$, es decir

   $$a_0 = 1, \; a_1 = 1.4, \; a_2 = 1.41, \; a_3 = 1.414, \; a_4 = 1.4142, \; a_5 = 1.41421, \ldots$$

   En esta sucesión vemos que:

- Cada término tiene una cifra decimal más que el anterior y a_n tiene n cifras.

- La diferencia entre a_n y cualquiera de los siguientes es menor que 10^{-n} y se puede hacer tan pequeña como se quiera tomando n suficientemente alto, luego es una sucesión de Cauchy.

- Por otro lado $\sqrt{2}$ está comprendido entre cada aproximación por defecto y la correspondiente por exceso

$$a_n < \sqrt{2} < a_n + \frac{1}{10^n} \Longrightarrow \boxed{\sqrt{2} - a_n < \frac{1}{10^n}}$$

por lo que la diferencia entre $\sqrt{2}$ y a_n será menor que 10^{-n}. Entonces los términos pueden acercarse a $\sqrt{2}$ tanto como queramos y hemos encontrado una sucesión de Cauchy de límite $\sqrt{2}$, por tanto sin límite en $\mathbb{Q}$.

Un posible modo de definir los números irracionales. Hemos visto, pues, que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional, pero puede aproximarse tanto como se quiera por una sucesión monótona creciente acotada de racionales. Ello sugiere que podríamos definirlo como el límite de esa sucesión. Cualquier otro número no racional (como $e, \pi, \ldots$) puede ser también aproximado tanto como se quiera por una sucesión análoga y definido como límite de esa sucesión.

Resulta entonces que una sucesión monótona creciente acotada de racionales puede tener límite racional (el caso de 7/6 en el apdo. **5.4**) o no tenerlo ($\sqrt{2}, e, \pi, \sqrt{3} \ldots$). Si asignamos un número irracional (no-racional) como límite a las sucesiones que no lo tienen en $\mathbb{Q}$ y ampliamos $\mathbb{Q}$ con los irracionales, estamos dando lugar al conjunto $\mathbb{R}$ de los reales. Como consecuencia, toda sucesión monótona creciente acotada de racionales tendrá límite en $\mathbb{R}$.

Obviamente lo anterior es sólo una aproximación intuitiva a los números reales. Para una definición rigurosa habría que definirlos, por ejemplo, como límite de sucesiones monótonas crecientes acotadas, agrupar las sucesiones que tienen el mismo límite, definir las operaciones entre dichas agrupaciones y comprobar que se cumplen ciertas propiedades.

Distintos matemáticos han seguido este sistema, justificando el conjunto $\mathbb{R}$ de diversos modos, como Dedekind (método de las cortaduras) o Cantor (método de las sucesiones de Cauchy). Según el método utilizado, la propiedad fundamental que caracteriza al conjunto $\mathbb{R}$ (propiedad de **completitud**) se enuncia de distinta manera. Dos de las más habituales son:

1. En $\mathbb{R}$, todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo.
2. En $\mathbb{R}$, toda sucesión de Cauchy tiene límite.

7. Propiedades de $\mathbb{R}$

7.1. Cuerpo ordenado

Como pasaba con $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números reales, dotado de la suma, el producto y la relación de orden $\leq$, es un cuerpo ordenado, pues sus elementos cumplen las propiedades correspondientes.

7.2. Propiedad arquimediana

Los números reales (como también $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$) cumplen que

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \big/ na > b$$

Esto significa que, dado un $a > 0$, la sucesión $a, 2a, 3a, \ldots$ no está acotada, pues existe un n suficientemente grande para que na supere a b, para todo $b \in \mathbb{R}$.

7.3. Racionales e irracionales, densos en $\mathbb{R}$

En el apdo. **5.2** dijimos que el orden en $\mathbb{Q}$ es denso, pues entre dos racionales siempre existe otro. En $\mathbb{R}$ ocurre lo mismo, más aún, se demuestra en los documentos de apoyo que entre dos reales existe un racional y un irracional. Entonces resulta:

1. Entre dos reales existe un racional. Como el racional es real, aplicando repetidamente la propiedad concluímos que entre dos reales hay infinitos racionales. Esto se expresa también diciendo que **el conjunto de los racionales es denso en** $\mathbb{R}$.

2. Entre dos reales existe un irracional, luego por el razonamiento anterior hay infinitos. Esto se expresa también diciendo que **el conjunto de los irracionales es denso en** $\mathbb{R}$.

7.4. R es completo

Ya se ha enunciado de dos maneras la propiedad de completitud (apdo. **6**). Una tercera forma de hacerlo, equivalente a las anteriores, es que **existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta**.

7.5. R no es numerable

Como se ha visto en los apartados anteriores, $\mathbb{R}$ habitualmente posee las propiedades de $\mathbb{Q}$ (y alguna más). Pero existe una propiedad de los racionales -la numerabilidad- que se pierde al ampliarlos con los irracionales, debido precisamente a que el cardinal de estos es un infinito de orden superior al de los racionales.

Demostración. Veamos por reducción al absurdo que el subconjunto de los reales formado por el intervalo $(0,1)$ no es numerable. Para ello, suponemos que lo es. Eso significa que podemos escribir en una lista ordenada todos los números reales comprendidos entre el 0 y el 1, por ejemplo

1. $0.a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots$

2. $0.a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots$

3. $0.a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots$

4. $0.a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44} \ldots$

5. $\ldots$

A partir de esta lista (en la que suponemos que están todos los números entre 0 y 1), vamos a definir otro y probaremos que no está en ella. Definimos $X = 0.x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \ldots$, siendo sus cifras

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{si } a_{nn} \neq 1 \\ 0, & \text{si } a_{nn} = 1 \end{cases}$$

El número X está entre 0 y 1, pero no está en la tabla: no puede estar en el puesto 1, pues su primera cifra es distinta de la primera del primero; no puede estar en el puesto 2, pues su segunda cifra es distinta de la segunda del segundo... no puede estar en el puesto n, pues su n-ésima cifra es distinta de la n-ésima cifra del n-ésimo número de la tabla.

Así pues, hemos definido un número que se distingue de cada uno, al menos en una cifra. Luego no puede estar en la tabla. Luego los números reales del intervalo $(0,1)$ no son numerables, ni lo es por tanto $\mathbb{R}$.

8. Operaciones en $\mathbb{R}$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se definen las siguientes operaciones (las tres primeras coinciden con las ya definidas en los racionales):

a) Suma y diferencia: $\boxed{\alpha \pm \beta \in \mathbb{R}}$

b) Producto y cociente: $\boxed{\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}}$; $\boxed{\alpha / \beta \in \mathbb{R},\ \forall \beta \neq 0}$

c) Potencia entera: α^m, $m \in \mathbb{Z}$. Distinguimos tres casos:

- Si $m \in \mathbb{N}$, $\boxed{\alpha^m = \overset{\leftarrow \text{m factores} \rightarrow}{\alpha \cdot \alpha \cdot \cdots \cdot \alpha}}$

- Si $m \in \mathbb{Z}^-$ $(\alpha \neq 0)$, $\alpha^m = \alpha^{-|m|} = \dfrac{1}{\alpha^{|m|}}$.

- Si $m = 0$ $(\alpha \neq 0)$, se define $\boxed{\alpha^0 = 1}$ (lo que es coherente con $\alpha^0 = \alpha^{n-n} = \alpha^n / \alpha^n = 1$).

d) Raíz n-ésima, $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}} = x \ / \ x^n = \alpha}$ (con n par, se define sólo para $\alpha \geq 0$).

e) Potencia de exponente racional (fracción irreducible $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$).

- Si $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, $\alpha^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^m}$; $\alpha^{\frac{m}{n}} = x \ / \ x^n = \alpha^m$ (si n es par, $\alpha \geq 0$).

- Si $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^-$ $(\alpha \neq 0)$, $\alpha^{\frac{m}{n}} = \alpha^{-\left|\frac{m}{n}\right|} = \dfrac{1}{\alpha^{\left|\frac{m}{n}\right|}}$ (si n es par, $\alpha > 0$).

f) Potencia de base un número positivo y exponente irracional α^β, $\alpha > 0$: se define como límite de una sucesión.

- Si expresamos β como límite de una sucesión monótona de racionales,

$$\beta = \lim_{n \to \infty} \beta_n$$

entonces la sucesión $\left\{\alpha^{\beta_n}\right\}$ tiene límite (como veremos en el T. III) y α^β se define como

$$\boxed{\alpha^\beta = \lim_{n \to \infty} \alpha^{\beta_n}}$$

- Podemos considerar el caso $\alpha = 0$ con $\beta > 0$, tomando una sucesión de límite β y términos positivos. Entonces los términos 0^{β_n} son nulos $\forall n$, con lo que $\boxed{0^\beta = 0}$

- En los demás casos $(\alpha = 0$, con $\beta < 0$ y $\alpha < 0, \forall \beta)$ no se define la potencia de exponente irracional.

g) Logaritmo. Dados dos números reales $\alpha, \beta > 0$, $\beta \neq 1$, existe un único $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\beta^\gamma = \alpha$. A este γ se le llama logaritmo en base β de α, $\gamma = \log_\beta \alpha$, es decir

$$\boxed{\gamma = \log_\beta \alpha \Longleftrightarrow \beta^\gamma = \alpha}$$

Los logaritmos más comunes, de base el número e, se llaman naturales o neperianos. También son muy utilizados los decimales, de base 10.

9. Ejercicios de autoevaluación

9.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. El principio de inducción puede utilizarse para demostrar propiedades de un conjunto infinito, siempre que entre sus elementos esté definida una relación de orden.

2. Decimos de A que es subconjunto propio de B si está contenido estrictamente en B, es decir: $\mathrm{A} \subset \mathrm{B},\ \mathrm{A} \neq \mathrm{B}$. Por tanto, un conjunto nunca puede ser biyectivo con un subconjunto propio suyo.

3. El conjunto de los números enteros es numerable aunque no esté acotado por la derecha ni por la izquierda.

4. Entre racionales, la condición "ser menor que" se expresa: $p/q < r/s \Longleftrightarrow ps < qr$.

5. Entre conjuntos, la relación "estar incluido en" es de orden parcial.

6. En un cuerpo ordenado K, la propiedad $a \cdot 0 = 0,\ \forall a \in \mathrm{K}$, es evidente y no necesita demostración.

7. El conjunto $\{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 < 2\}$ tiene supremo y máximo en $\mathbb{R}$.

8. En un cuerpo conmutativo, el inverso del inverso de cualquier número x es x.

9. La sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

10. $\mathbb{Q}$ es denso, por lo que no es numerable.

11. $1.\widehat{9} = 1.999999...$ es el racional inmediatamente anterior a 2.

12. En $\mathbb{R}$, todo conjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

13. No existe la potencia 3/2 de un número negativo.

14. Cualquier número positivo puede ser base de un sistema de logaritmos.

15. Entre dos números reales distintos hay siempre un racional, pero puede no haber ningún irracional.

9.2. Cuestión

Halla los valores de x que son solución de la inecuación $|x| > k \in \mathbb{R}$.

9.3. Solución del test verdadero/falso

1. **F**. Es necesario que el conjunto sea numerable.

2. **F**. $\mathbb{N}$ es biyectivo con infinitos subconjuntos propios suyos, por ejemplo los pares, los impares, los múltiplos de cinco...

3. **V**. Es suficiente con tomar en primer lugar el 0, luego el 1, luego -1, 2, -2, y así sucesivamente.

4. **V**. Basta multiplicar ambos miembros de $p/q < r/s$ por el producto qs.

5. **V**. La relación cumple las propiedades Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva. Pero, dados dos conjuntos cualesquiera, no tiene por qué estar uno de ellos contenido en el otro, luego no tienen por qué estar en relación de orden.

6. **F**. El 0 es el neutro de la suma (elemento que, sumado a uno cualquiera, no lo modifica). En principio, desconocemos el resultado de multiplicarlo por cualquier otro número. Como se demostró en clase, dicho producto es 0.

7. **F**. No tiene máximo, pues el supremo ($\sqrt{2}$) no pertenece al conjunto.

8. **F**. En un cuerpo conmutativo, el inverso del inverso de cualquier número $x \neq 0$ es x.

9. **V**. Es convergente (y su límite es 0). Por lo tanto es de Cauchy.

10. **F**. Es denso y también numerable (demostrado en clase).

11. **F**. La diferencia entre 1.999999... y 2 puede hacerse tan pequeña como se quiera, sin más que tomar un número suficientemente grande de cifras, por lo que representan el mismo número racional. La fracción generatriz de 1.999999... es $\dfrac{19-1}{9} = 2$.

12. **V**. Es una de las formas de expresar la completitud de $\mathbb{R}$.

13. **V**. Sea $r < 0$. Se cumple $r^{3/2} = \left(r^3\right)^{1/2}$. Como $r^3 < 0$, no existe su raíz cuadrada.

    De otro modo: $r^{3/2} = p \Longleftrightarrow r^3 = p^2$. Pero $r^3 = r \cdot r \cdot r < 0$ y no puede ser igual a $p^2 \geq 0$.

14. **F**. Cualquier número positivo **y distinto de 1** puede ser base de un sistema de logaritmos.

15. **F**. Entre dos números reales distintos hay siempre un racional (por tanto infinitos) y un irracional (por tanto infinitos). Esto se expresa también diciendo que, tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$ (ver apdo. **7.3**. Racionales e irracionales, densos en $\mathbb{R}$).

9.4. Solución de la cuestión

Distinguimos dos casos, $x \geq 0$ y $x < 0$. Entonces, a partir de la definición de valor absoluto de un número real:

a) Si $x \geq 0 \Longrightarrow x = |x| > k \Longrightarrow x \in (k, \infty)$.

b) Si $x < 0 \Longrightarrow -x = |x| > k \Longrightarrow x < -k \Longrightarrow x \in (-\infty, -k)$.

Así pues, cumplen la condición los x pertenecientes al conjunto $(-\infty, -k) \cup (k, \infty)$.

Nota: no se ha dicho nada del signo de k. Si $k \geq 0$, el conjunto solución es la unión de dos intervalos disjuntos y se puede escribir también como $\mathbb{R} \setminus [-k, k]$. Este conjunto es el complementario del conjunto solución de la condición $|x| \leq k$.

Si, por el contrario, $k < 0$, los intervalos $(-\infty, -k)$ y (k, ∞) se solapan, por lo que su unión es todo $\mathbb{R}$. Este resultado es lógico pues, si $k < 0$, la condición se cumple para todo x, ya que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ |x| \geq 0 > k$.

Tema II. Espacios Métricos (07.10.2024)

1. Distancia

1.1. Definición

Sea un conjunto E no vacío. Llamamos **distancia** o **métrica** a toda aplicación

$$d : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

que, a cada par (x, y) de elementos de E, le hace corresponder un número real $d(x, y) \geq 0$, tal que se cumplen las propiedades siguientes:

1. Positividad: $d(x, y) > 0$, $\forall x \neq y$; $\quad d(x, x) = 0$.
2. Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in \mathrm{E}$.
3. Desigualdad triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in \mathrm{E}$.

Llamamos espacio métrico al conjunto E dotado de la distancia d, lo que se denota por (E, d). Los elementos $x \in \mathrm{E}$ se denominan puntos.

1.2. Métricas más comunes

Entre las muchas aplicaciones que cumplen las propiedades de distancia, distinguimos las siguientes.

a) En $\mathbb{R}$ se define la métrica natural –o del valor absoluto– como

$$d(x, y) = |x - y|$$

b) Métricas en $\mathbb{R}^n$. Sean los elementos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

b.1. Distancia "del taxi".

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

b.2. Distancia euclídea.

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

b.3. Distancia del supremo.

$$d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \sup |x_i - y_i|_{i=1,\ldots,n} = \sup \big(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n| \big)$$

c) Métrica discreta. En este caso sólo hay dos valores posibles para la distancia entre los elementos de E.

$$d(x, y) = 1 \; \forall x \neq y; \quad d(x, x) = 0$$

2. Bolas y entornos

Definimos a continuación los conceptos de bola y entorno, unas agrupaciones de puntos que nos van a servir para caracterizar los distintos tipos de puntos y conjuntos de un espacio métrico.

2.1. Bola abierta

Sean $a \in \mathrm{E}$, $r > 0$. Se llama bola abierta de centro a y radio r al conjunto de puntos de E cuya distancia al punto a es menor que r.

$$\boxed{B(a,r) = \left\{x \in \mathrm{E} \,\big/\, d(a,x) < r\right\}}$$

2.2. Bola cerrada

Sean $a \in \mathrm{E}$, $r \geq 0$. Se llama bola cerrada de centro a y radio r al conjunto de puntos de E cuya distancia al punto a es menor o igual que r.

$$\boxed{\overline{B}(a,r) = \left\{x \in \mathrm{E} \,\big/\, d(a,x) \leq r\right\}}$$

Ejemplos con la distancia euclídea.

1. En $\mathbb{R}$, una bola abierta es un intervalo abierto y una bola cerrada, un intervalo cerrado.
2. En $\mathbb{R}^2$, una bola abierta es un círculo sin la circunferencia y una bola cerrada, un círculo incluida la circunferencia.

Bolas obtenidas con otras métricas. Con métricas distintas de la euclídea, la forma de las bolas puede cambiar. Se propone obtener en $\mathbb{R}^2$ las bolas cerradas de centro el origen y radio $r = 1$, correspondientes a las distancias **a)** d_1; **b)** d_∞.

Solución. Se trata de las áreas limitadas por los cuadrados cuyos vértices son respectivamente: **a)** $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ y $D(0,-1)$; **b)** $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ y $D(1,-1)$.

Bola reducida. Se llama así a la bola que no contiene a su centro. Por ejemplo, la bola abierta de centro a y radio r será

$$\boxed{B^*(a,r) = \left\{x \in \mathrm{E} \,\big/\, 0 < d(a,x) < r\right\}}$$

2.3. Entorno

Definición. Un entorno de $a \in \mathrm{E}$ es todo conjunto U_a que contiene a una bola abierta de centro a.

$$\boxed{\mathrm{U}_a \text{ entorno de } a \Longleftrightarrow \exists r > 0 \,\big/\, B(a,r) \subset \mathrm{U}_a}$$

La bola $B(a,r)$ contiene al punto a y está contenida en ella misma, luego una bola abierta de centro a es entorno de a.

Propiedades.

1. Si un conjunto V contiene a un entorno de a, V es entorno de a.
2. La intersección de dos entornos de a es entorno de a.
3. Dos puntos distintos tienen entornos disjuntos.

3. Puntos notables en un espacio métrico

Sea un espacio métrico (E, d) y un conjunto $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. Definimos diversos tipos de puntos según su relación con A. Los ejemplos se refieren a $\mathrm{C} = [0, 2) \cup \{3\}$, en el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$.

3.1. Punto de adherencia

El punto $x \in \mathrm{E}$ es de adherencia de A si y sólo si toda bola abierta de centro x contiene algún punto de A; es decir, si

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{R}^+, B(x, r) \cap \mathrm{A} \neq \phi}$$

Podemos decir que x es de adherencia de A si tiene puntos de A tan cerca como se quiera.

Consecuencia. Los puntos de A son de adherencia de A.

Ejemplo. Son de adherencia de C –entre otros– los puntos $\{0, 1, 2, 3\}$.

3.2. Punto de acumulación

El punto $x \in \mathrm{E}$ es de acumulación de A si y sólo si toda bola abierta de centro x contiene algún punto de A, distinto de x. Utilizando la bola reducida, la condición es:

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{R}^+,\ B^*(x, r) \cap \mathrm{A} \neq \phi}$$

Podemos decir que x es de acumulación de A si tiene puntos de A –distintos de él– tan cerca como se quiera.

Consecuencias. 1) Todo punto de acumulación es de adherencia. 2) Todo punto de adherencia de A pertenece a A o, de lo contrario, es de acumulación de A.

Ejemplo. Son de acumulación de C –entre otros– los puntos $\{0, 1, 2\}$.

3.3. Punto aislado

El punto $x \in \mathrm{E}$ es aislado de A si y sólo si pertenece a A y existe una bola abierta de centro x que no contiene ningún otro punto de A; es decir, si

$$\boxed{\exists r \in \mathbb{R}^+ / B(x, r) \cap \mathrm{A} = \{x\}}$$

Consecuencia. Un punto de adherencia es de acumulación, salvo si existe alguna bola centrada en él que no contiene otro punto de A más que él, en cuyo caso es aislado. Luego todo punto de adherencia, o es de acumulación o es aislado.

Ejemplo. El único punto aislado de C es el $\{3\}$.

3.4. Punto interior

El punto $x \in \mathrm{E}$ es interior de A si y sólo si existe una bola abierta de centro x contenida en A; es decir, si

$$\boxed{\exists r \in \mathbb{R}^+ / B(x, r) \subset \mathrm{A}}$$

Ejemplo. Son interiores de C –entre otros– los puntos del intervalo $[1, 2)$.

3.5. Punto exterior

El punto $x \in \mathrm{E}$ es exterior de A si y sólo si existe una bola abierta de centro x que no contiene ningún punto de A; es decir, si

$$\boxed{\exists r \in \mathbb{R}^+ / B(x,r) \cap \mathrm{A} = \phi}$$

Ejemplo. Son exteriores de C -entre otros- los puntos $\{4,5\}$ y los comprendidos entre ellos.

3.6. Punto frontera

El punto $x \in \mathrm{E}$ es frontera de A si y sólo si toda bola abierta de centro x contiene puntos de A y de su complementario, al que llamaremos $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$; es decir, si

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{R}^+ \begin{cases} B(x,r) \cap \mathrm{A} \neq \phi \\ B(x,r) \cap \mathrm{E} \setminus \mathrm{A} \neq \phi \end{cases}}$$

Podemos decir que x es frontera de A si tiene puntos de A y de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ tan cerca como se quiera.

Nota. La expresión $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$, que se lee "E menos A", se justificará en el apdo. **4.3**.

Consecuencias. 1) Un punto frontera de A es de adherencia de A y de adherencia de su complementario $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$. 2) Un punto frontera no cumple la condición de interior ni la de exterior. 3) En el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$, los puntos aislados son frontera.

Ejemplo. Son frontera de C los puntos $\{0,2,3\}$.

Ejercicio. Demuestra que un punto exterior de A es interior de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ y que un punto interior de A es exterior de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$.

4. Conjuntos notables en un espacio métrico

A partir de los distintos puntos de un espacio métrico (E, d) definidos en el apartado anterior, estudiamos a continuación los conjuntos formados por las agrupaciones de dichos puntos.

4.1. Adherencia o conjunto adherente

Definición. La adherencia de A, $\overline{\mathrm{A}}$, es el conjunto de sus puntos de adherencia.

Propiedades.

a) $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{A}}$. Por convenio, $\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E}$, $\overline{\phi} = \phi$.

b) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Longrightarrow \overline{\mathrm{A}} \subset \overline{\mathrm{B}}$.

c) $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$.

d) $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$. No se cumple la igualdad, por ejemplo, en el caso de conjuntos sin puntos en común, tales que sus adherencias sí los tienen. Por ejemplo, los intervalos $(0,1)$ y $(1,2)$.

4.2. Conjunto de los puntos aislados

El conjunto formado por los puntos aislados de A se denota $Aisl(\mathrm{A})$.

4.3. Derivado de A

Definición. El conjunto derivado de A, A', es el conjunto de sus puntos de acumulación.

Diferencia de conjuntos. Si los conjuntos A y B son disjuntos y llamamos C a su unión,

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{C}; \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \phi$$

decimos que

$$\mathrm{A} = \mathrm{C} \setminus \mathrm{B}$$

lo que se lee “A es igual a C menos B” (obviamente B es igual a C menos A). El conjunto A está formado por los elementos de C que no pertenecen a B.

$$\mathrm{A} = \mathrm{C} \setminus \mathrm{B} = \left\{ x \in \mathrm{C} \,/\, x \notin \mathrm{B} \right\}$$

Obsérvese que en esta definición exigimos que A y B sean subconjuntos (disjuntos) de C; por tanto, para “restar” B de C, el primero debe estar contenido en el segundo. La diferencia de conjuntos puede definirse de otras maneras. La definición dada aquí será útil para obtener el conjunto derivado.

Aplicación. A partir de esta definición y de lo visto en el apdo. **3.3**, entre la adherencia, el derivado y el conjunto de puntos aislados de A se da la relación siguiente

$$\boxed{\mathrm{A}' = \overline{\mathrm{A}} \setminus Aisl(\mathrm{A})}$$

que permite obtener el conjunto derivado de A por diferencia entre la adherencia y los aislados.

Demostración.

1. Tanto los puntos aislados como los de acumulación son de adherencia, luego la unión de los conjuntos $Aisl(\mathrm{A})$ y A' está contenida en $\overline{\mathrm{A}}$.

   Por otro lado, todo punto de adherencia o bien es de acumulación o bien aislado, por lo que $\overline{\mathrm{A}} \subset Aisl(\mathrm{A}) \cup \mathrm{A}'$. Entonces los conjuntos $\overline{\mathrm{A}}$ y $\mathrm{A}' \cup Aisl(\mathrm{A})$ coinciden.

2. A partir de las respectivas definiciones, un punto no puede ser a la vez de acumulación y aislado, por lo que la intersección de A' y $Aisl(\mathrm{A})$ es vacía.

   Entonces podemos afirmar que $\mathrm{A}' = \overline{\mathrm{A}} \setminus Aisl(\mathrm{A})$.

4.4. Interior de A

Definición. El interior de A, $\mathring{\mathrm{A}}$, es el conjunto de sus puntos interiores.

Propiedades.

a) $\mathring{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$. Por convenio, $\mathring{\mathrm{E}} = \mathrm{E}$, $\mathring{\phi} = \phi$.

b) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Longrightarrow \mathring{\mathrm{A}} \subset \mathring{\mathrm{B}}$.

c) $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^\circ = \mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}}$.

d) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^\circ \supset \mathring{\mathrm{A}} \cup \mathring{\mathrm{B}}$. No se cumple la igualdad, por ejemplo, en el caso de conjuntos con puntos en común, tales que sus interiores no los tienen. Ejemplo: $\mathrm{A} = [0, 1], \ \mathrm{B} = [1, 2]$.

4.5. Exterior de A

Definición. El exterior de A, $Ext(\mathrm{A})$, es el conjunto de sus puntos exteriores.

Obtención. En el ejercicio del apdo. **3** se indica que un punto exterior de un conjunto es interior de su complementario y que un punto interior de un conjunto es exterior de su complementario. Entonces

- Si x es exterior de A, es interior de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$.
- Si x es interior de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ es exterior del complementario de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$, es decir de A.

Es decir, x es exterior de A si y sólo si es interior de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$, por lo que el conjunto exterior de A puede obtenerse como el interior del complementario de A.

$$\boxed{Ext(\mathrm{A}) = \big(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}\big)^{\circ}}$$

Resulta más sencillo obtener el conjunto exterior de A utilizando la expresión

$$\boxed{Ext(\mathrm{A}) = \mathrm{E} \setminus \overline{\mathrm{A}}}$$

Demostración. Para realizarla, veamos que se cumple la inclusión en ambos sentidos.

($\rightarrow$) Si x es un punto exterior de A, existe una bola centrada en x que no contiene puntos de A, por lo que x no es de adherencia de A, luego pertenece al complementario de $\overline{\mathrm{A}}$.

$$\forall x \in Ext(\mathrm{A})\, \exists r \big/ B(x,r) \cap \mathrm{A} = \phi \Longrightarrow x \notin \overline{\mathrm{A}} \Longrightarrow x \in \mathrm{E} \setminus \overline{\mathrm{A}} \Longrightarrow Ext(\mathrm{A}) \subset \mathrm{E} \setminus \overline{\mathrm{A}}$$

($\leftarrow$) Si x pertenece al complementario de $\overline{\mathrm{A}}$, no es de adherencia de A, luego existe alguna bola centrada en x que no contiene puntos de A, por lo que x es exterior de A.

$$\forall x \in \mathrm{E} \setminus \overline{\mathrm{A}} \Longrightarrow x \notin \overline{\mathrm{A}} \Longrightarrow \exists r \big/ B(x,r) \cap \mathrm{A} = \phi \Longrightarrow x \in Ext(\mathrm{A}) \Longrightarrow \mathrm{E} \setminus \overline{\mathrm{A}} \subset Ext(\mathrm{A})$$

4.6. Frontera de A

Definición. La frontera de A, $Fr(\mathrm{A})$, es el conjunto de sus puntos frontera.

Obtención. Sabemos (apdo. **3.6**) que un punto es frontera si y sólo si es de adherencia de A y de su complementario, luego podemos obtener la frontera de A como intersección de ambas adherencias:

$$\boxed{Fr(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}}$$

Resulta más sencillo obtener el conjunto frontera por medio de la siguiente expresión:

$$\boxed{Fr(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}}}$$

Demostración. Se cumple la doble inclusión.

($\rightarrow$) Sea $x \in Fr(\mathrm{A})$. Entonces $x \in \overline{\mathrm{A}}$ y $x \in \overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}$. Por pertenecer a $\overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}$ se cumplirá que toda bola abierta centrada en x contiene puntos de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$, por lo que ninguna bola está contenida en A. Es decir, $x \notin \mathring{\mathrm{A}}$. Como $x \in \overline{\mathrm{A}}$ y $x \notin \mathring{\mathrm{A}}$ y además $\mathring{\mathrm{A}} \subset \overline{\mathrm{A}}$, resulta que $x \in \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}}$.

($\leftarrow$) Sea $x \in \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}}$, luego $x \in \overline{\mathrm{A}}$ y $x \notin \mathring{\mathrm{A}}$. Si $x \notin \mathring{\mathrm{A}}$, no existe ninguna bola abierta centrada en x contenida en A, por lo que toda bola contiene puntos del complementario de A. Entonces x pertenece a la adherencia de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$. Como también pertenece a la adherencia de A, pertenece a la intersección de ambas, luego pertenece a la frontera.

Ejemplo. Como en el apartado **3**, calculamos los conjuntos notables referidos al conjunto $\mathrm{C} = [0,2) \cup \{3\}$ en el espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$.

1. Adherencia: $\overline{\mathrm{C}} = [0,2] \cup \{3\}$.
2. Conjunto de puntos aislados: $Aisl(\mathrm{C}) = \{3\}$.
3. Derivado: $\mathrm{C}' = \overline{\mathrm{C}} \setminus Aisl(\mathrm{C}) = [0,2]$.
4. Interior: $\mathring{\mathrm{C}} = (0,2)$.
5. Exterior: $Ext(\mathrm{C}) = \mathbb{R} \setminus \overline{\mathrm{C}} = (-\infty, 0) \cup (2,3) \cup (3, \infty)$
6. Frontera: $Fr(\mathrm{C}) = \overline{\mathrm{C}} \setminus \mathring{\mathrm{C}} = \{0,2,3\}$

5. Conjuntos cerrado, abierto, compacto

Sea el espacio métrico E y el conjunto $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. Vamos a estudiar las condiciones que deben cumplirse para afirmar que dicho conjunto es cerrado, abierto o compacto.

5.1. Cerrado

Definición. Un conjunto A es cerrado si y sólo si coincide con su adherencia:

$$\boxed{\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}}$$

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, ||)$, el intervalo $[a,b]$ es un conjunto cerrado.

Condiciones equivalentes. Hay otras dos condiciones de conjunto cerrado equivalentes a la anterior: "contener a su derivado" y "contener a su frontera". Se demuestran a continuación.

a) A es cerrado si y sólo si contiene a sus puntos de acumulación.

$$\boxed{\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} \Longleftrightarrow \mathrm{A}' \subset \mathrm{A}}$$

($\rightarrow$) Los puntos de acumulación son de adherencia, luego $\mathrm{A}' \subset \overline{\mathrm{A}}$. Al ser A cerrado, $\overline{\mathrm{A}}$ coincide con A. Entonces $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$.

$$\mathrm{A}' \subset \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$$

($\leftarrow$) La adherencia $\overline{\mathrm{A}}$ es la unión de A' y $Aisl(\mathrm{A})$. Como ambos están contenidos en A, su unión también lo está, por lo que $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$. Como además $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{A}}$, se cumple $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$.

$$\mathrm{A}', Aisl(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A} \Longrightarrow \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}' \cup Aisl(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A} \overset{\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{A}}}{\Longrightarrow} \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$$

b) A es cerrado si y sólo si contiene a su frontera.

$$\boxed{\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} \Longleftrightarrow Fr(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}}$$

($\rightarrow$) La frontera está contenida en la adherencia. Como A coincide con su adherencia, la frontera está contenida en A.

$$Fr(\mathrm{A}) \subset \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \Longrightarrow Fr(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$$

($\leftarrow$) La adherencia $\overline{\mathrm{A}}$ es la unión de $\mathring{\mathrm{A}}$ y $Fr(\mathrm{A})$. Como $\mathring{\mathrm{A}}$ está contenido en A y $Fr(\mathrm{A})$ también (por hipótesis) $\overline{\mathrm{A}}$ está contenida en A. Como $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{A}}$, se cumple $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$.

$$\mathring{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A},\ Fr(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A} \Longrightarrow \overline{\mathrm{A}} = \mathring{\mathrm{A}} \cup Fr(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A} \overset{\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{A}}}{\Longrightarrow} \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$$

Propiedades.

1. $\overline{\mathrm{A}}$ es un cerrado, luego la adherencia de $\overline{\mathrm{A}}$ es igual a $\overline{\mathrm{A}}$: $\overline{(\overline{\mathrm{A}})} = \overline{\mathrm{A}}$.
2. E y ϕ son cerrados, pues coinciden con su adherencia (por convenio).
3. La intersección de cerrados es un cerrado.
4. La unión finita de cerrados es un cerrado (la infinita puede no serlo).

5.2. Abierto

Definición. Un conjunto A es abierto si y sólo si coincide con su interior:

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}}}$$

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, ||)$, el intervalo (a, b) es un conjunto abierto.

Condición equivalente. A es abierto si y sólo si tiene intersección vacía con su frontera (ninguno de sus puntos es frontera).

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}} \iff Fr(\mathrm{A}) \cap \mathrm{A} = \phi}$$

Demostración.

(→) $Fr(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}}$ (apdo. **4.6**), por lo que la intersección de $\mathring{\mathrm{A}}$ y $Fr(\mathrm{A})$ es vacía. Por ser A abierto, coincide con su interior, entonces la intersección de A y su frontera es vacía.

(←) Si la intersección de A y $Fr(\mathrm{A})$ es vacía, ningún punto de A pertenecerá a su frontera. Como A y su frontera están contenidos en $\overline{\mathrm{A}}$, entonces todo punto de A pertenecerá a $\overline{\mathrm{A}} \setminus Fr(\mathrm{A}) = \mathring{\mathrm{A}}$, por lo que $\mathrm{A} \subset \mathring{\mathrm{A}}$. Como además $\mathring{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$, resulta $\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}}$.

Propiedades.

1. $\mathring{\mathrm{A}}$ es un abierto, luego el interior de $\mathring{\mathrm{A}}$ es igual a $\mathring{\mathrm{A}}$: $\left(\mathring{\mathrm{A}}\right)^\circ = \mathring{\mathrm{A}}$.
2. E y ϕ son abiertos, pues coinciden con su interior (por convenio).
3. La unión de abiertos es un abierto.
4. La intersección finita de abiertos es un abierto (la infinita puede no serlo).

Ejercicio. Hemos visto que la unión de infinitos cerrados puede no ser cerrado y la intersección de infinitos abiertos puede no ser abierto. Estudia lo que ocurre en los dos siguientes casos:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0\,, \frac{n-1}{n}\right] \quad ; \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

5.3. Relación entre abierto y cerrado

Teorema. *Un conjunto es abierto si y sólo si su complementario es cerrado.*

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}} \iff \mathrm{E} \setminus \mathrm{A} = \overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}}$$

Demostración.

($\rightarrow$) Sea $\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}}$. Queremos demostrar que $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} = \overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}$. Como se cumple $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}$, basta con demostrar que $\overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}} \subset \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$.

Sea $x \in \overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}$. Entonces toda bola abierta centrada en x contiene puntos de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$, luego ninguna está contenida en A, por lo que x no pertenece al conjunto $\mathring{\mathrm{A}}$. Como $\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}}$, x no pertenece a A, luego pertenece a su complementario $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$. Por lo tanto $\overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}} \subset \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$.

($\leftarrow$) Sea $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} = \overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}$. Queremos demostrar que $\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}}$. Como se cumple $\mathring{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$, basta con demostrar que $\mathrm{A} \subset \mathring{\mathrm{A}}$.

Sea $x \in \mathrm{A}$. Entonces $x \notin \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$. Como $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} = \overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}$, x no pertenece a $\overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}$. Entonces existe alguna bola abierta centrada en x que no contiene puntos de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$, por lo que está contenida en A, luego $x \in \mathring{\mathrm{A}}$. Por lo tanto $\mathrm{A} \subset \mathring{\mathrm{A}}$.

5.4. Compacto

Definición. Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Ejemplos. En $(\mathbb{R}, ||)$, son compactos el intervalo $[a, b]$ o una unión finita de intervalos cerrados. No son compactos los intervalos (a, b) o $[a, \infty)$.

Caso de $\mathbb{R}^n$. Usamos la misma definición (cerrado y acotado) en $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclídea.

Nota. En $\mathbb{R}^n$ decimos que un conjunto es acotado si y sólo si está contenido en una bola de radio finito.

$$\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n \text{ acotado} \iff \exists\, \vec{a} \in \mathbb{R}^n, \exists r > 0 \,/\, \mathrm{A} \subset B(\vec{a}, r)$$

Ejemplo. El conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1\right\}$ es compacto.

6. El espacio métrico $(\mathbb{R}, ||)$

Estudiamos ahora un espacio métrico particular: el conjunto de los números reales, dotado de la métrica del valor absoluto. En primer lugar comprobaremos que las distintas distancias estudiadas (salvo la discreta) coinciden. A continuación definiremos los conjuntos abiertos y cerrados y enunciaremos el teorema de Bolzano-Weierstrass.

6.1. Distancia

Es inmediato comprobar que las distancias d_1, d_2 y d_∞ se reducen a la del valor absoluto (métrica natural). En efecto, al tener los puntos x e y sólo una coordenada, resulta:

a) $d_1(x, y) = |x - y|$.

b) $d_2(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$.

c) $d_\infty(x, y) = |x - y|$.

Ejemplo. Escribimos (a, b) en forma de bola: $c = \dfrac{a+b}{2}$, $r = \dfrac{b-a}{2} \Longrightarrow (a, b) = B(c, r)$.

Ejercicio. Escribe la bola $B(x, \delta)$ en forma de intervalo.

6.2. Abiertos y cerrados

A partir de la definición de abierto ($\mathrm{A} = \mathring{\mathrm{A}}$) y del hecho de que todo cerrado es complementario de un abierto (teorema **5.3**), se deduce:

1. En $(\mathbb{R}, ||)$ un abierto es todo conjunto que puede expresarse como unión de intervalos abiertos. Lo justificamos a continuación:

   ($\rightarrow$) A es abierto si y sólo si coincide con su interior, luego todos sus puntos son interiores. Que $x \in \mathrm{A}$ sea interior significa que es el centro de una bola abierta contenida en A, por lo que A puede expresarse como la unión de todas esas bolas (cada una contiene a uno de los puntos de A y está contenida en A). Pero, en $(\mathbb{R}, ||)$, una bola abierta es un intervalo abierto, luego si A es abierto, puede expresarse como unión de intervalos abiertos.

   ($\leftarrow$) Si A puede expresarse como unión de intervalos abiertos, será abierto, pues un intervalo abierto es un abierto y la unión de abiertos también lo es.

2. Definimos cerrado como el complementario de un abierto.

Ejemplos. $(a, b) \cup (c, d)$ es un abierto. El complementario del cerrado $[p, q]$ es $\mathbb{R} \setminus [p, q] = (-\infty, p) \cup (q, \infty)$, que es una unión de abiertos.

Ejercicio. Razona si es cerrado el conjunto $\{c\}$, formado por un punto.

6.3. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Todo subconjunto acotado $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}$*, con infinitos puntos, posee al menos un punto de acumulación.*

Demostración. Al ser S acotado podemos encontrar unos valores $a, b \in \mathbb{R} \big/ \mathrm{S} \subset [a, b]$. Dividimos $[a, b]$ en dos partes iguales y tomamos una que contenga infinitos puntos (al menos una los tiene, pues de lo contrario S sería finito).
Dividimos el semiintervalo elegido en dos partes iguales, tomando de nuevo una que contenga infinitos puntos. Repetimos la operación una y otra vez, obteniendo –después de n divisiones– el intervalo I_n de longitud

$$l_n = \frac{b - a}{2^n}$$

que tiende a 0, cuando $n \to \infty$. Pero I_n sigue conteniendo infinitos puntos.
De este modo, acabamos definiendo un punto α, tal que tiene infinitos puntos de S en todo entorno suyo, por lo que cumple la condición de punto de acumulación de S. Este punto puede no pertenecer a S, en cuyo caso pertenecerá a su frontera.

Ejemplos. Estudiamos los conjuntos a) $\mathrm{S}_1 = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$; b) $\mathrm{S}_2 = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$; c) $\mathrm{S}_3 = (a, b)$.

En a) el punto de acumulación es $\alpha = 1$. En b) $\alpha = 0$. En el caso c), cualquier punto del intervalo $[a, b]$ es de acumulación de S_3.

Ejercicios.

a) Aplica el teorema a un subconjunto propio de $\mathbb{N}$.

b) Aplica el teorema a $\mathrm{S} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

c) Justifica que, si el punto de acumulación α no pertenece a S, pertenece a su frontera.

7. Ejercicios de autoevaluación

7.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2$ se cumple: $d_\infty(\overline{x}, \overline{y}) \leq d_1(\overline{x}, \overline{y}) \quad (d_1$, "distancia del taxi").
2. En $\mathbb{R}^2$ una bola cerrada es un círculo, independientemente de la métrica empleada.
3. Un punto frontera no es interior ni exterior.
4. $\mathring{\mathrm{A}} \subset \mathring{\mathrm{B}} \Longrightarrow \mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.
5. $Ext(\mathrm{A}) = \mathrm{E} \setminus \overline{\mathrm{A}}$.
6. $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} \Longleftrightarrow \mathrm{A}' \subset \mathrm{A} \Longleftrightarrow Fr(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$.
7. En $(\mathbb{R}, ||)$ todo cerrado es un intervalo cerrado.
8. El intervalo [2,3] es entorno de todos sus puntos.
9. Si un conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}$ no posee ningún punto de acumulación, entonces tendrá sólo un número finito de puntos.
10. Entre los elementos de $\mathbb{R}^2$ no hay relación de orden, por lo que en $\mathbb{R}^2$ no existen conjuntos acotados.
11. Dado el conjunto $\mathrm{A} = \left\{ \dfrac{3n^2}{3n^2 - 1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, obtener:

    a) $\overline{\mathrm{A}}$:

    b) A':

    c) $\mathring{\mathrm{A}}$:

    d) $Fr(\mathrm{A})$:

    e) $Aisl(\mathrm{A})$:

7.2. Cuestión

Define punto interior y expresa matemáticamente la condición que debe cumplir. Razona si un punto interior puede ser frontera.

7.3. Solución del test verdadero/falso

1. **V**. $d_\infty(\overline{x}, \overline{y}) = \text{máx}\left\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right\} \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = d_1(\overline{x}, \overline{y})$.
2. **F**. Una bola cerrada en $\mathbb{R}^2$ puede tomar formas distintas con las distintas distancias: es un rombo con la d_1 y un cuadrado con la d_∞.
3. **V**. En toda bola centrada en el punto frontera hay puntos del conjunto y del complementario, por lo que ninguna bola está contenida en el conjunto (condición de interior) ni en el complementario (condición de exterior).
4. **F**. Ejemplo: $\mathrm{A} = [0, 1]$, $\mathrm{B} = (0, 1)$. Con la implicación en sentido contrario, la afirmación es cierta: es una de las propiedades de los conjuntos interiores.

5. **V**. Ver apdo. **4.5**

6. **V**. Son tres definiciones equivalentes de conjunto cerrado (demostración en los apuntes).

7. **F**. Todo intervalo cerrado es un cerrado, pero no viceversa. La unión de dos intervalos cerrados disjuntos es un cerrado y sin embargo no es un intervalo.

8. **F**. Para los puntos frontera (el 2 y el 3) no existe ninguna bola centrada en ellos y contenida en el intervalo. De hecho, ser entorno de todos sus puntos es una definición alternativa de conjunto abierto y el intervalo [2,3] es un cerrado, por lo que no la cumple.

9. **V**. Pues, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, si S es acotado y posee infinitos puntos, "existe al menos un punto de $\mathbb{R}$, que es de acumulación de S". Luego, si S no posee puntos de acumulación, o bien no está acotado o no tiene infinitos puntos. Como está acotado por hipótesis, entonces debe tener un número finito de puntos.

10. **F**. Decimos que un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ está acotado si está contenido en una bola de radio finito. Esta condición no exige una relación de orden entre los elementos de $\mathbb{R}^n$.

11. $\mathrm{A} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{12}{11}, \frac{27}{26}, \frac{48}{47}, \frac{75}{74} \cdots \right\}$. La sucesión tiene límite 1. Entonces

    a) $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \cup \{1\}$.
    b) $\mathrm{A}' = \{1\}$.
    c) $\mathring{\mathrm{A}} = \phi$.
    d) $Fr(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{A}}$.
    e) $Aisl(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$.

7.4. Solución de la cuestión

En un espacio métrico (E, d), un punto $x \in \mathrm{E}$ es un punto interior de $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ si y sólo si existe una bola bola abierta de centro x, contenida en A. Es decir

$$x \text{ es interior de A} \iff \exists r \in \mathbb{R}^+ \Big/ B(x,r) \subset \mathrm{A}$$

La condición que debe cumplir un punto de E para ser frontera de A es que en toda bola abierta centrada en él existan puntos de A y de su complementario. Entonces, si un punto es frontera de A, en ninguna bola habrá sólo puntos de A, por lo que un punto interior no puede ser frontera.

Tema III. Sucesiones en $\mathbb{R}$ (21.10.2024)

1. Definición y tipos de sucesiones

1.1. Sucesión numérica

Una sucesión de números reales es la imagen de una aplicación φ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. A cada número natural n le corresponde el término a_n de la sucesión.

$$\boxed{\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(n) = a_n \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\mathbb{N}) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$$

1.2. Concepto de límite

El límite de una sucesión $\{a_n\}$ es un número a al que los términos de la sucesión se aproximan tanto como queramos, a partir de uno dado. Es decir:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \big/\ |a_m - a| < \varepsilon,\ \forall m \geq n}$$

Interpretación gráfica. La sucesión tiene límite a si, elegido un ε, los términos de $\{a_n\}$, a partir de uno dado, están contenidos en el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

1.3. Tipos de sucesiones

a) En relación con la existencia de límite, una sucesión puede converger, diverger u oscilar.

- **Sucesión convergente.** Es la que tiene límite finito.

$$\boxed{\{a_n\}\text{ es convergente} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}}$$

- **Sucesión divergente.** Es aquella cuyos términos en valor absoluto se hacen tan grandes como queramos, a partir de uno dado.

$$\boxed{\{a_n\}\text{ es divergente} \Longleftrightarrow \forall A > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \big/\ |a_m| > A,\ \forall m \geq n}$$

  condición que podemos escribir también como $\boxed{\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty}$

  Si además los términos son positivos a partir de uno dado, decimos que $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty}$

  (si son negativos a partir de uno dado, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$)

- **Sucesión oscilante.** Es la que no converge ni diverge.

  De esta definición resulta que toda sucesión es convergente, divergente u oscilante

b) En relación con la acotación de sus términos, una sucesión puede ser:

- Acotada superiormente $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \big/ a_n \leq k,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Acotada inferiormente $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \big/ a_n \geq k,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Acotada $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ \big/\ |a_n| \leq k,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1. Determina si las siguientes sucesiones son convergentes, divergentes u oscilantes, indicando además si están acotadas.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\} \ ; \ \{2^n\} \ ; \ \left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots\right\} \ ; \ \left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} \ ; \ \left\{1, \sqrt{2}, 3, \sqrt{4}, \dots\right\} \ ; \ \{1, -2, 3, -4, \dots\}$$

Ejercicio 2. Encuentra un ejemplo de sucesión:

a) Oscilante acotada ; **b)** Oscilante no acotada ; **c)** Acotada no convergente ; **d)** Acotada no oscilante ; **e)** No acotada ni divergente.

2. Propiedades de los límites

1) *Si una sucesión tiene límite, éste es único.*

D: Por reducción al absurdo. Supongamos que existan dos límites, $\alpha < \beta$.

Tomamos $\varepsilon > 0$ / $2\varepsilon < \beta - \alpha$. Al ser límites ambos, existirán n_α, n_β tales que

$$|a_m - \alpha| < \varepsilon, \ \forall m \geq n_\alpha \ \text{y} \ |a_m - \beta| < \varepsilon, \ \forall m \geq n_\beta$$

Entonces, se cumplirá, $\forall m \geq \max(n_\alpha, n_\beta)$, que

$$\beta - \alpha = |\beta - \alpha| = |\beta - a_m + a_m - \alpha| \leq |a_m - \alpha| + |a_m - \beta| < 2\varepsilon$$

Es decir, $\beta - \alpha < 2\varepsilon$, contra la hipótesis.

2) *Si una sucesión tiene límite $a > c$, sus términos a partir de uno dado son mayores que c.*

$$\boxed{\{a_n\} \to a > c \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ / \ a_m > c, \ \forall m \geq n}$$

D: Tomamos $\varepsilon > 0$ / $\varepsilon < a - c \Longrightarrow c < a - \varepsilon$. Por ser a el límite,

$$\exists n \ / \ \forall m \geq n, \ \ |a_m - a| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < a_m - a < \varepsilon \Longrightarrow a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$$

Es decir, $a_m > a - \varepsilon > c$.

3) *Si una sucesión tiene límite $a < c$, sus términos a partir de uno dado son menores que c.*

$$\boxed{\{a_n\} \to a < c \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ / \ a_m < c, \ \forall m \geq n}$$

D: Análoga a la anterior, tomando $\varepsilon > 0$ / $\varepsilon < c - a$.

4) *Si una sucesión tiene límite $a \neq 0$, sus términos a partir de uno dado tienen el signo de a.*

D: Si $a > 0$, por la propiedad 2: $\exists n \ / \ a_m > 0, \ \forall m \geq n$.

Si $a < 0$, por la propiedad 3: $\exists n \ / \ a_m < 0, \ \forall m \geq n$.

Es decir, si $a \neq 0$, los términos, a partir de uno dado, tienen el signo de a.

5) *Si el límite de $\{a_n\}$ es menor que el de $\{b_n\}$, los términos de la primera son menores que los de la segunda, a partir de uno dado.*

$$\boxed{\{a_n\} \to a,\ \{b_n\} \to b,\ a < b \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ / \ a_m < b_m,\ \forall m \geq n}$$

D: Se toma $c = (a+b)/2$, con lo que $a < c < b$, y se aplican las propiedades 2 y 3.

6) *Si se cumple $a_n < b_n < c_n,\ \forall n \geq n_0$ y las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ tienen límite α, entonces la sucesión $\{b_n\}$ tiene límite α.*

D: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \Longrightarrow \exists n_1 \ / \ |a_m - \alpha| < \varepsilon \Longrightarrow \boxed{\alpha - \varepsilon < a_m} < \alpha + \varepsilon,\ \forall m \geq n_1.$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha \Longrightarrow \exists n_2 \ / \ |c_m - \alpha| < \varepsilon \Longrightarrow \alpha - \varepsilon < \boxed{c_m < \alpha + \varepsilon},\ \forall m \geq n_2.$

Como, además, $\boxed{a_n < b_n < c_n}$, $\forall n \geq n_0$, entonces, $\forall m \geq \max(n_0, n_1, n_2)$,

$$\alpha - \varepsilon < a_m < b_m < c_m < \alpha + \varepsilon \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha}$$

7) Se obtiene una **subsucesión** de $\{a_n\}$ tomando **infinitos términos suyos, sin alterar el orden relativo entre ellos**. Si los lugares que ocupan dichos elementos en $\{a_n\}$ son $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$, la subsucesión será: $\{a_{n_i}\} = a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots a_{n_i}, \ldots$ Por ejemplo, los pares o los múltiplos de 3 son subsucesiones de los naturales.

Propiedad. *Si $\{a_n\}$ tiene límite, toda subsucesión suya tiene el mismo límite.*

D: Si a es el límite, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \ / \ |a_m - a| < \varepsilon,\ \forall m \geq n$. En ese caso, también $|a_{m_i} - a| < \varepsilon,\ \forall m_i \geq n$, pues $\{a_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

8) *Toda sucesión convergente es acotada.*

D: Por ser convergente, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \ / \ |a_m - a| < \varepsilon,\ \forall m \geq n$. Entonces, por las propiedades del valor absoluto

$$|a_m| - |a| \leq |a_m - a| < \varepsilon \Longrightarrow |a_m| < |a| + \varepsilon,\ \forall m \geq n$$

Así pues, la cota es $k = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{n-1}|, |a| + \varepsilon)$.

3. Sucesiones monótonas

3.1. Definiciones

Con respecto a la relación entre el valor de sus términos una sucesión numérica $\{a_n\}$ es:

- Monótona creciente, si y sólo si $a_{n+1} \geq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Monótona decreciente, si y sólo si $a_{n+1} \leq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Estrictamente creciente, si y sólo si $a_{n+1} > a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Estrictamente decreciente, si y sólo si $a_{n+1} < a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio. Indica el tipo de monotonía de las siguientes sucesiones:
a) $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, \ldots$; **b)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$; **c)** $1, 1, 1, 1, \ldots$; **d)** $-1, 0, 1, -2, 0, 2, -3, 0, 3, \ldots$

3.2. Teorema de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona creciente (decreciente) acotada superiormente (inferiormente) tiene límite.

Demostración. Lo demostramos para el caso creciente (partimos de la **propiedad del supremo**, estudiada en el tema I).

a) La sucesión $\{a_n\}$ es un conjunto de números reales acotado superiormente, por lo que tiene supremo α. Veamos que, al ser α la menor de las cotas superiores, cualquier valor menor que α debe ser superado por algún término de $\{a_n\}$, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / \ \boxed{\alpha - \varepsilon < a_{n_0}}$$

pues, de lo contrario, existiría algún ε tal que $\alpha - \varepsilon \geq a_{n_0}$, $\forall n_0$, en cuyo caso el supremo sería $\alpha - \varepsilon$, contra la hipótesis.

b) Al ser $\{a_n\}$ monótona creciente, $\boxed{a_{n_0} \leq a_m}$, $\forall m \geq n_0$. Y por ser α el supremo, $\boxed{a_m \leq \alpha}$.

c) Entonces, a partir de a) y b),

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \big/ \alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_m \leq \alpha \Longrightarrow \alpha - \varepsilon < a_m \leq \alpha, \ \forall m \geq n_0$$

Pero $\alpha - \varepsilon < a_m \Longrightarrow \alpha - a_m < \varepsilon$ y $a_m \leq \alpha \Longrightarrow 0 \leq \alpha - a_m$. Es decir

$$0 \leq \alpha - a_m < \varepsilon \Longrightarrow \boxed{|\alpha - a_m| < \varepsilon \ , \forall m \geq n_0}$$

que es la condición de límite para $\{a_n\}$. Es decir, el límite de la sucesión es el supremo α.

3.3. Sucesiones de intervalos encajados

Una sucesión de intervalos encajados es una sucesión de intervalos reales, tales que cada uno está incluido en el anterior, $I_n \subset I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si los intervalos son cerrados y no vacíos, es decir

$$I_n = [a_n, b_n], \quad a_n \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces su intersección es el intervalo $[a, b]$, $a \leq b$, siendo

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Si además las amplitudes de los intervalos tienden a cero, es decir $(b_n - a_n) \to 0$, entonces existe un único número real α común a todos los intervalos y se cumple

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \in \mathbb{R}}$$

Demostración breve. (demostración completa en J. Burgos, p. 64). Sean las sucesiones $\{a_n\}$ (monótona creciente) y $\{b_n\}$ (monótona decreciente), tales que $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

por lo que

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a_{n-2}, b_{n-2}] \ldots$$

luego $\{[a_n, b_n]\}$ es una sucesión de intervalos encajados. La sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente por cualquier b_i y $\{b_n\}$ lo está inferiormente por cualquier a_i, luego ambas sucesiones son monótonas acotadas, por lo que tienen límite, que llamaremos respectivamente a y b. Si $(b_n - a_n) \to 0$, estos límites coinciden pues, como veremos en **4.1**,

$$0 = \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

4. Operaciones con límites

4.1. Suma y diferencia

a) Si dos sucesiones tienen límite **finito**, el límite de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los límites.

$$\boxed{\{a_n\} \to a,\ \{b_n\} \to b \Longrightarrow \{a_n \pm b_n\} \to a \pm b}$$

D: Lo demostramos para la suma. Por ser a y b límites, se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists n_a \in \mathbb{N} \ / \ |a_m - a| < \varepsilon/2,\ \forall m \geq n_a \\ \exists n_b \in \mathbb{N} \ / \ |b_m - b| < \varepsilon/2,\ \forall m \geq n_b \end{cases}$$

Entonces, $\forall m \geq \max(n_a, n_b)$, se cumplirán ambas condiciones, por lo que

$$|a_m + b_m - (a+b)| = |(a_m - a) + (b_m - b)| \leq |a_m - a| + |b_m - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

b) Si $\{a_n\}$ es divergente y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\{a_n \pm b_n\}$ es divergente.

c) Si $\{a_n\} \to \pm\infty$ y $\{b_n\} \to \pm\infty$, entonces $\{a_n + b_n\} \to \pm\infty$.

d) Si $\{a_n\} \to \pm\infty$ y $\{b_n\} \to \mp\infty$, entonces $\{a_n - b_n\} \to \pm\infty$.

e) Si $\{a_n\} \to \pm\infty$ y $\{b_n\} \to \pm\infty$, entonces $\{a_n - b_n\}$ es un **caso dudoso**.

4.2. Producto

a) Si dos sucesiones tienen límite **finito**, el límite del producto es el producto de los límites.

$$\boxed{\{a_n\} \to a,\ \{b_n\} \to b \Longrightarrow \{a_n\, b_n\} \to a\, b}$$

D: Hemos de demostrar que $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \ / \ |a_m b_m - ab| < \varepsilon,\ \forall m \geq n.$ $\qquad (*)$

Al ser $\{a_n\}$ convergente, está acotada: $|a_n| \leq K,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Estudiamos dos opciones:

a.1) Sea $b \neq 0$. Se cumple $|a_m b_m - ab| = |a_m b_m - a_m b + a_m b - ab| =$

$$|(a_m b_m - a_m b) + (a_m b - ab)| \leq |a_m|\,|b_m - b| + |b|\,|a_m - a| \leq K\,|b_m - b| + |b|\,|a_m - a|\,.$$

Por ser ambas convergentes, $\begin{cases} \forall \dfrac{\varepsilon}{2\,|b|} > 0\ \exists n_a \ / \ |a_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2\,|b|},\ \forall m \geq n_a \\ \\ \forall \dfrac{\varepsilon}{2K} > 0\ \exists n_b \ / \ |b_m - b| < \dfrac{\varepsilon}{2K},\ \forall m \geq n_b \end{cases}$

Entonces, $\forall m \geq \max(n_a, n_b)$, $|a_m b_m - ab| < K \dfrac{\varepsilon}{2K} + |b| \dfrac{\varepsilon}{2\,|b|} = \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

a.2) Si $b = 0$, $\forall \dfrac{\varepsilon}{K} > 0\ \exists n \ / \ |b_m - 0| < \dfrac{\varepsilon}{K},\ \forall m \geq n$ y, sustituyendo en $(*)$, resulta

$$\forall m \geq n,\ |a_m b_m - ab| = |a_m b_m - 0| \leq |a_m|\,|b_m| \leq K\,|b_m| < K \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

b) Si $\{a_n\} \to 0$ y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\{a_n\, b_n\} \to 0$.

c) Si $\{a_n\} \to \pm\infty$ y $b_n \geq k > 0\, \forall n_0 \geq 0$, entonces $\{a_n\, b_n\} \to \pm\infty$.

d) Si $\{a_n\} \to \pm\infty$ y $\{b_n\} \to 0$, entonces $\{a_n\, b_n\}$ es un **caso dudoso**.

4.3. Inverso

a) Si una sucesión tiene límite **finito y no nulo**, el límite del inverso es el inverso del límite.

$$\boxed{\{a_n\} \to a \neq 0 \Longrightarrow \left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to \frac{1}{a}}$$

D: Hemos de demostrar que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \, / \left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon, \; \forall m \geq n.$

Operamos: $\left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_m|}{|a_m|\,|a|} = \frac{1}{|a|}\frac{1}{|a_m|}\,|a - a_m|$. En esta expresión:

1) $\frac{1}{|a_m|}$ está acotado. En efecto, si $\{a_n\} \to a$, entonces $\{|a_n|\} \to |a|$ (visto en prácticas).

   Como $\left|\frac{a}{2}\right| < |a|$ entonces $\exists n_1 \;/\; |a_m| > \left|\frac{a}{2}\right| \Longrightarrow \frac{1}{|a_m|} < \frac{2}{|a|}, \; \forall m \geq n_1.$

2) El término $|a - a_m|$ puede hacerse tan pequeño como queramos, pues $\{a_n\} \to a$.

   Luego $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_2 \;/\; |a - a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon\,|a|^2, \; \forall m \geq n_2.$

Entonces $\forall m \geq \max(n_1, n_2)$, $\left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}\frac{1}{|a_m|}\,|a - a_m| < \frac{1}{|a|}\frac{2}{|a|}\frac{1}{2}\varepsilon|a|^2 = \varepsilon.$

b) Si $\{a_n\}$ es divergente, entonces $\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to 0$. Y si $\{a_n\} \to 0$, entonces $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ es divergente.

4.4. Cociente

a) Si dos sucesiones tienen límite **finito**, el límite del cociente es el cociente de los límites **si el denominador no tiende a 0**.

$$\boxed{\{a_n\} \to a, \; \{b_n\} \to b \neq 0 \Longrightarrow \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \left\{\frac{a}{b}\right\}}$$

D: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \frac{1}{b_n} \overset{\text{Si } \exists}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a\,\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

b) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienden ambas a 0 o a $\pm\infty$, entonces $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ es un **caso dudoso**.

4.5. Logaritmo

Si $\{a_n\}$ tiene límite **finito y positivo**, el límite del logaritmo de $\{a_n\}$ es el logaritmo del límite.

$$\boxed{\{a_n\} \to a > 0 \Longrightarrow \{\log_b a_n\} \to \log_b a} \; (b > 0, \; b \neq 1)$$

4.6. Exponencial

Si $\{a_n\} \to a$ y $b > 0$, el límite de la exponencial de a_n es la exponencial del límite.

$$\boxed{\{a_n\} \to a, \; b > 0 \Longrightarrow \{b^{a_n}\} \to b^a}$$

4.7. Potencial-exponencial

Si $\{a_n\} \to a > 0$ y $\{b_n\} \to b$, entonces el límite de $\left\{a_n^{b_n}\right\}$ es a^b.

$$\boxed{\{a_n\} \to a > 0,\ \{b_n\} \to b \Longrightarrow \left\{a_n^{b_n}\right\} \to a^b}$$

D: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln a_n^{b_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{b_n \ln a_n} \overset{\text{Si}\,\exists}{=} e^{\lim b_n \ln a_n} \overset{\text{Si}\,\exists}{=} e^{\lim b_n\, \lim \ln a_n} = e^{b \ln a} = a^b$

Nota. En la demostración anterior, si $a > 0$ los términos de $\{a_n\}$ son mayores que cero a partir de uno dado (propiedad 4 de los limites), por lo que será también mayor que cero la expresión $a_n^{b_n}$ y podemos calcular su logaritmo.

4.8. Tipos de indeterminación

Los casos dudosos (apdos. **4.1**, **4.2** y **4.4**) y ciertos casos de límite nulo o infinito en la base o el exponente (apdo. **4.7**) dan lugar a los siguientes tipos de indeterminación:

$$\boxed{\infty - \infty;\quad \infty \cdot 0;\quad \frac{\infty}{\infty};\quad \frac{0}{0};\quad 0^0;\quad \infty^0;\quad 1^\infty}$$

Nota. En el caso 1^∞ del cuadro anterior, 1 significa una sucesión de límite 1.

5. Criterios de convergencia

5.1. Criterio de Stolz

Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tales que:

a) $\{b_n\}$ es estrictamente monótona.

b) $\{b_n\} \to \pm\infty$ o bien $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Se cumple

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l} \quad (l \text{ finito o infinito})$$

Puede verse una demostración en J. Burgos, p. 45.

Aplicación. Cálculo de límites indeterminados del tipo $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$.

5.2. Criterio de la media aritmética

Si la sucesión $\{x_n\}$ converge, la sucesión formada por la media aritmética de sus términos tiene el mismo límite. Es decir:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = l} \quad (l \text{ finito o infinito})$$

Demostración. Definimos las sucesiones $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ y $b_n = n$ (que cumple las condiciones de Stolz). Entonces $a_n - a_{n-1} = x_n$ y $b_n - b_{n-1} = 1$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{\text{Si}\,\exists}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1} = l.$$

5.3. Criterio de la media geométrica

Sea la sucesión $\{x_n\}/x_n > 0\ \forall n$. Si converge, la sucesión formada por la media geométrica de sus términos tiene el mismo límite. Es decir:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = l \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = l}$$

Demostración. El criterio es válido para $l \geq 0$ o $l = +\infty$. Lo demostramos para $l > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \sqrt[n]{(x_1 \cdots x_n)}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(x_1\cdots x_n)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n}} \overset{\text{Si } \exists}{=} e^{\lambda},$$

donde

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n} \overset{\text{Si } \exists}{=} \lim_{n\to\infty} \ln x_n \overset{\text{Si } \exists}{=} \ln\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \ln l$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = e^{\ln l} = l$$

5.4. Regla de la raíz

Sea la sucesión $\{a_n\}/a_n > 0\ \forall n$. Se cumple

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = l \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l}$$

Demostración. Definimos una nueva sucesión $x_1 = a_1, x_2 = \dfrac{a_2}{a_1}, \ldots, x_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. Entonces:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{M.G.}}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Es decir, si existe el límite del cociente, existe el de la raíz y coinciden. Aunque puede no existir el primero y sí el segundo.

6. Infinitos e infinitésimos

6.1. Definiciones

Sea la sucesión $\{a_n\}$. Decimos que:

a) $\{a_n\}$ es un infinito si $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty}$

b) $\{a_n\}$ es un infinitésimo si $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

Si una sucesión tiene límite 0, se dice también que es una sucesión nula.

Ejemplo.

1. Son infinitos las sucesiones $\{a_n\}$, de término general n^2, $\sqrt{n}$, -2^n, $\ln n$.
2. Son infinitésimos las sucesiones de término general $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{-1}{2^n}$, $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ $(n \neq 1)$.

6.2. Comparación

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ infinitos (infinitésimos):

a) Si $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ es un infinito (infinitésimo), $\{a_n\}$ **es de mayor orden que** $\{b_n\}$.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k\in\mathbb{R},\ k\neq 0$, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ **son del mismo orden**. Entonces

- Sea $\{a_n\}$ un infinito. Si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^p}=k\neq 0,\ p>0$$

decimos que $\{a_n\}$ **es de orden** p **y** $\boxed{kn^p}$ **es su parte principal**.

- Sea $\{a_n\}$ un infinitésimo. Si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(1/n)^p}=k\neq 0,\ p>0$$

decimos que $\{a_n\}$ es **de orden** p **y** $\boxed{k/n^p}$ **es su parte principal**.

c) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$, decimos que $\{a_n\}$ es despreciable frente a $\{b_n\}$.

Ejemplos. A partir de las definiciones a), b) y c) anteriores, se observa lo siguiente (prescindimos de las llaves que indican sucesión para simplificar):

a.1) El infinito n^3 es de mayor orden que n y de menor orden que n^5.

a.2) El infinitésimo $\dfrac{1}{n^3}$ es de mayor orden que $\dfrac{1}{n}$ y de menor orden que $\dfrac{1}{n^5}$.

b.1) $3n^2$ es un infinito del mismo orden que n^2.

b.2) $\dfrac{3}{n}$ es un infinitésimo del mismo orden que $\dfrac{1}{n}$.

b.3) $3n^2+n$ es un infinito de orden 2 y su parte principal es $3n^2$.

b.4) $\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}$ es un infinitésimo de orden 1 y su parte principal es $\dfrac{3}{n}$.

c.1) $3n$ es despreciable frente a n^2.

c.2) $\dfrac{1}{n^2}$ es despreciable frente a $\dfrac{3}{n}$.

6.3. Relación entre tipos de infinito

Se demuestra (J. Burgos, p. 50) que todo infinito logarítmico es despreciable frente a cualquiera potencial; todo potencial frente a cualquiera exponencial; y todo exponencial frente a cualquiera potencial-exponencial. Lo representamos con el símbolo $\ll$:

$$\boxed{\underset{p>1,\ a>0}{\left(\log_p n\right)^a}\ll \underset{b>0}{n^b}\ll \underset{c>1}{c^n}\ll \underset{d>0}{n^{dn}}}$$

Ejemplo. Se cumple: $(\ln n)^{1000}\ll\sqrt{n}$; $\quad n^{1000}\ll 2^n$; $\quad 1000^n\ll n^n$.

7. Sucesiones equivalentes

7.1. Definición

Dadas $\{a_n\}$ y $\{a'_n\}$ con igual límite, finito o infinito, se dice que son equivalentes si el límite de su cociente es igual a 1:

$$\boxed{a_n \sim a'_n \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n} = 1}$$

Entonces dos sucesiones equivalentes tienen el mismo límite (por definición). Y si dos sucesiones tienen igual límite a, finito y no nulo, son equivalentes. En efecto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n} = \frac{a}{a} = 1$$

7.2. Propiedades

Si $a_n \sim a'_n$, se cumple

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a'_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a'_n}{a'_n} = 0}$$

Demostración. Dividimos la diferencia entre a'_n (se obtiene el mismo resultado dividiendo entre a_n).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a'_n}{a'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n} - 1 = 0$$

Entonces:

a) La diferencia entre dos infinitésimos equivalentes es otro, de orden superior a ambos.

b) La diferencia entre dos infinitos equivalentes es despreciable frente a ambos.

7.3. Equivalencia con las partes principales

a) Sea a_n un infinito. Vimos en **6.2** que kn^p es la parte principal de a_n si se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} = k \in \mathbb{R},\ \ k \neq 0$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{kn^p} = \frac{1}{k} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} = \frac{k}{k} = 1 \Longrightarrow a_n \sim kn^p$$

luego **un infinito es equivalente a su parte principal**.

b) Sea a_n un infinitésimo: k/n^p será su parte principal si se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{(1/n)^p} = k \in \mathbb{R},\ \ k \neq 0$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{k/n^p} = \frac{1}{k} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{(1/n)^p} = \frac{k}{k} = 1 \Longrightarrow a_n \sim k/n^p$$

luego **un infinitésimo es equivalente a su parte principal**.

Ejemplo. Sean el infinito $a_n = 2n^3 + 3n$ y el infinitésimo $b_n = 2/n^3 + 3/n$. Cada uno de ellos será equivalente a su parte principal, por lo que $a_n \sim 2n^3, \quad b_n \sim 3/n$.

8. Sustitución por sucesiones equivalentes

8.1. Producto y cociente

Sean $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$. Se verifica lo siguiente (en cada caso se indica el lugar que ocupa en la tabla de equivalencias que se encuentra al final del apdo. **9**).

a) Si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a'_n b'_n \Longrightarrow \boxed{a_n b_n \sim a'_n b'_n}$ (A.1)

D: Veamos que ambos productos tienen igual límite y el límite del cociente de ambos es 1.

a.1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{a_n\, b_n}{a'_n\, b'_n}\, a'_n b'_n\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{a_n}{a'_n}\right)\left(\dfrac{b_n}{b'_n}\right)(a'_n b'_n)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n b'_n.$

pues los dos primeros paréntesis tienden a 1.

a.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n b_n}{a'_n b'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a'_n} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{b'_n} = 1.$

Así pues, los productos $a_n b_n$ y $a'_n b'_n$ tienen el mismo límite o ambos carecen de él (por a.1). Y, si existe el límite, ambos productos son equivalentes (por a.2).

b) Si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a'_n}{b'_n} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{a_n}{b_n} \sim \dfrac{a'_n}{b'_n}}$ (A.2)

Así pues, **al sustituir, en productos o cocientes**, alguno de los términos por una sucesión equivalente, **resulta una expresión equivalente** a la primera.

Ejemplo.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+\sqrt{n}}{3n^2-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2}{3n^2} = \dfrac{4}{3}.$
2. $\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{3n^2}\right)\left(\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{4n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n^2}.$

En el primer caso buscamos el límite de un cociente indeterminado. En el segundo queremos calcular el infinitésimo equivalente al producto (es inmediato que el límite es cero).

8.2. Logaritmo

Sea $\{a_n\}$ una sucesion de términos positivos a partir de uno dado, tal que su límite es $a \geq 0$, $a \neq 1$ (a puede ser $+\infty$). Se cumple

$$\boxed{a_n \sim a'_n \Longrightarrow \log a_n \sim \log a'_n} \quad \text{(A.3)}$$

Es decir, **al sustituir el argumento de un logaritmo** por una sucesión equivalente, **resulta una expresión equivalente** a la primera, siempre que el argumento no tenga límite 1. Para demostrarlo, veamos que:

a) $\log a_n$ y $\log a'_n$ tienen el mismo límite.

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \lim_{n\to\infty} \log \left[\frac{a_n}{a'_n}\, a'_n\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\log \overbrace{\left(\frac{a_n}{a'_n}\right)}^{\to 1} + \log a'_n\right] = \lim_{n\to\infty} \log a'_n.$$

Este último límite existe siempre, pues $\log a'_n$ tiende a $\log a$, si $a \in \mathbb{R}^+$; tiende a $+\infty$, si $a_n \to \infty$; y tiende a $-\infty$ si $a_n \to 0$.

b) El límite del cociente de $\log a_n$ y $\log a'_n$ es 1, pues

$$\log a_n - \log a'_n = \log \Bigg(\overbrace{\frac{a_n}{a'_n}}^{\to 1} \Bigg) = \varepsilon_n \Longrightarrow \log a_n = \log a'_n + \varepsilon_n$$

Entonces $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{\log a'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log a'_n + \varepsilon_n}{\log a'_n} = \lim_{n\to\infty} \Bigg(1 + \frac{\varepsilon_n}{\underbrace{\log a'_n}_{\to \log a \neq 0}}\Bigg) = 1.$

Ejemplo.

1. $\ln (n^4 + 2n^2) \sim \ln n^4 = 4 \ln n$.
2. $\displaystyle \ln \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) \sim \ln \frac{1}{\sqrt{n}} = -\ln \sqrt{n} = -\frac{1}{2} \ln n.$

En ambos casos hemos obtenido un infinito equivalente al inicial, de expresión más sencilla.

8.3. Potencial-exponencial

Dados $a_n \sim a'_n,\ b_n \sim b'_n$, en general **no se cumple** $a_n^{b_n} \sim {a'_n}^{b'_n}$.

Ejemplo. El infinito $n + 1 + 1/n$ es equivalente a n. Pero $e^{n+1+\frac{1}{n}} \not\sim e^n$, pues el cociente de ambas expresiones tiene límite $e \neq 1$.

Estas indeterminaciones se resuelven generalmente haciendo

$$\boxed{a_n^{b_n} = e^{\ln a_n^{b_n}} = e^{b_n \ln a_n}}$$

siempre que $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

8.4. Suma o diferencia

Dados $a_n \sim a'_n,\ b_n \sim b'_n$, en general **no se cumple** $a_n \pm b_n \sim a'_n \pm b'_n$.

Ejemplo 1. Los infinitos de segundo orden $n^2 + n + 1$ y $n^2 - n + 1$ son equivalentes entre sí y a su parte principal n^2. Pero, al restarlos, no podemos sustituirlos por n^2

$$n^2 + n + 1 - (n^2 - n + 1) \not\sim (n^2 - n^2) = 0,$$

pues la diferencia sería 0. En realidad, al restar se obtiene el infinito de primer orden $2n$.

Ejemplo 2. Los infinitésimos de primer orden $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ y $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ son equivalentes entre sí y a su parte principal $1/n$. Pero, al restarlos, no podemos sustituirlos por $1/n$.

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \not\sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,$$

sino que su diferencia es el infinitésimo de segundo orden $2/n^2$.

En ambos casos se trata de dos infinitos (infinitésimos) equivalentes, por lo que poseen la misma parte principal. Al restarlos se simplifican dichas partes principales y pasan a tener importancia infinitos de menor orden (infinitésimos de mayor orden), que no son tenidos en cuenta si se realiza la sustitución, por lo que ésta no es válida.

En F. Granero, p. 153, se enuncia una **regla práctica** para funciones, válida también para sucesiones. Permite aplicar las equivalencias de infinitésimos e infinitos a sumas y diferencias, en los casos en que no desaparecen sus partes principales:

Sea un límite en que aparece un factor o divisor formado por sumas y/o diferencias de infinitos. Sea m el mayor de sus órdenes. Si al sustituir los infinitos por sus partes principales resulta un infinito de orden m, la sustitución es correcta y el límite no varía.

Para infinitésimos se enuncia igual, cambiando *mayor de sus órdenes* por *menor de sus órdenes.*

En resumen, en el caso de sumas y diferencias de infinitos o infinitésimos, podemos usar equivalencias si no desaparecen las partes principales.

Ejemplo 3.

a) Sean $a_n = n^3 - n^2,\ b_n = n^3 + n^2 \Longrightarrow a_n, b_n \sim n^3$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{3a_n - 2b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n^3}{3n^3 - 2n^3} = 2$$

Antes y después de sustituir por sus partes principales, los infinitos son de orden 3.

b) Sean $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2},\ b_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} \Rightarrow a_n, b_n \sim \dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} 4n(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} 4n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = 4$$

Antes y después de sustituir por sus partes principales, los infinitésimos son de orden 1.

9. Cálculo de límites

9.1. A partir del número e

a. Definición

El número e se define como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Pero, si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión **divergente** cualquiera, se cumple

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = e} \quad (*)$$

D: Lo demostramos en el caso de que $\{\alpha_n\}$ sea monótona creciente de términos positivos.
Sea a_n la parte entera de $\alpha_n,\ a_n = E(\alpha_n)$. Entonces

$$a_n \le \alpha_n < a_n + 1 \Longrightarrow \frac{1}{a_n} \ge \frac{1}{\alpha_n} > \frac{1}{a_n + 1} \Longrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n+1} > \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} > \left(1 + \frac{1}{a_n + 1}\right)^{a_n} \Longrightarrow$$

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}}_{(1)} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)}_{(2)} > \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} > \underbrace{\left(1 + \frac{1}{a_n + 1}\right)^{a_n+1}}_{(3)} : \underbrace{\left(1 + \frac{1}{a_n + 1}\right)}_{(4)}$$

Los factores (1) y (3) corresponden a subsucesiones de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, por lo que tienen límite e.
Los factores (2) y (4) tienen límite 1. Entonces la sucesión tiende a e (prop. 6 de los límites).

b. Generalización

La expresión $(*)$ se demuestra también (J. Burgos, p. 40) cuando $\{\alpha_n\}$:

1. Es monótona decreciente de términos negativos.
2. Tiene un número finito de términos negativos y el resto positivos.
3. Tiene un número finito de términos positivos y el resto negativos.
4. Tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos.

c. Aplicación

A partir de esta expresión del número e, podemos resolver distintos límites:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n+a} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)^{a}\right] \overset{\text{Si } \exists}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)^{a} = e$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n+a}\right)^{\alpha_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n+a}\right)^{\alpha_n+a-a} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n+a}\right)^{\alpha_n+a} :\right.$

   $\left.\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n+a}\right)^{a}\right] \overset{\text{Si } \exists}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n+a}\right)^{\alpha_n+a} : \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n+a}\right)^{a} = e$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n a} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\right]^{a} \overset{\text{Si } \exists}{=} \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\right]^{a} = e^a$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n/a}\right)^{\frac{\alpha_n}{a}}\right]^{a} \overset{\text{Si } \exists}{=} \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n/a}\right)^{\frac{\alpha_n}{a}}\right]^{a} = e^a$

d. Equivalencias

A partir del número e se justifican distintas equivalencias, como veremos a continuación (en cada una se indica el lugar que ocupa en la tabla de equivalencias). En primer lugar demostramos la relación entre logaritmos neperianos y logaritmos en base a.

1. Cambio de base: $\boxed{\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

   D: $\forall x > 0,\ x = a^{\log_a x} \Longrightarrow \ln x = \ln\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \ln a \Longrightarrow \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

2. $\boxed{\ln(1+\theta_n) \sim \theta_n}$ (B.1)

   D: Calculamos el límite del cociente de ambas expresiones. Al ser $\{1/\theta_n\}$ divergente,

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\theta_n)}{\theta_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\theta_n}\ln\left(1+\frac{1}{1/\theta_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{1/\theta_n}\right)^{\frac{1}{\theta_n}} \overset{\text{Si } \exists}{=}$$
   $$\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1/\theta_n}\right)^{\frac{1}{\theta_n}} = \ln e = 1$$

   En caso de que el logaritmo no sea neperiano, $\log_a(1+\theta_n) = \dfrac{\ln(1+\theta_n)}{\ln a} \sim \dfrac{\theta_n}{\ln a}$

3. $\boxed{\ln u_n \sim u_n - 1}$ (B.2)

D: $u_n - 1 = \theta_n \Longrightarrow u_n = 1 + \theta_n \Longrightarrow \ln u_n = \ln(1+\theta_n) \sim \theta_n = u_n - 1$

En caso de que el logaritmo no sea neperiano, $\log_a u_n = \dfrac{\ln u_n}{\ln a} \sim \dfrac{u_n - 1}{\ln a}$

4. $\boxed{e^{\theta_n} - 1 \sim \theta_n}$ (B.3)

D: $e^{\theta_n} - 1 \to 0 \Longrightarrow e^{\theta_n} - 1 = \theta'_n \sim \ln(1+\theta'_n) = \ln\big(1 + e^{\theta_n} - 1\big) = \ln e^{\theta_n} = \theta_n$

En caso de que la base no sea e, $a^{\theta_n} - 1 = e^{\theta_n \ln a} - 1 \sim \theta_n \ln a$

Ejemplos.

1. Si $a = e^2$, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{2}\ln x$
2. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
3. $\ln\left(\dfrac{n+3}{n-2}\right) \sim \dfrac{n+3}{n-2} - 1 = \dfrac{n+3-n+2}{n-2} = \dfrac{5}{n-2} \sim \dfrac{5}{n}$
4. $2^{1/n} - 1 \sim \dfrac{1}{n}\ln 2 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\,(2^{1/n}-1) = \lim\limits_{n\to\infty} n\,\dfrac{1}{n}\ln 2 = \ln 2$

9.2. Expresiones polinómicas

a. Cociente

Un polinomio en n es un infinito equivalente a su término de mayor grado, pues:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + \cdots + a_k n^k}{a_k n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_k}\left(\frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \cdots + a_k\right) = 1 \Longrightarrow \boxed{P_k(n) \sim a_k\, n^k} \quad \text{(C.1)}$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_k(n)}{Q_l(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_k\, n^k}{b_l\, n^l} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{b_l} & k = l \\ 0 & k < l \\ \infty \cdot \text{signo}(a_k/b_l) & k > l \end{cases}$

b. Logaritmo

Si $a_k > 0$, el neperiano de $P_k(n)$ es equivalente al infinito $k \ln n$, pues

$$\ln(a_0 + \cdots + a_k n^k) \sim \ln(a_k n^k) = \ln a_k + k\ln n \sim k \ln n \Longrightarrow \boxed{\ln P_k(n) \sim k \ln n} \quad \text{(C.2)}$$

c. Raíz n-ésima

La raíz $n-$ésima de $P_k(n)$ tiene límite 1, pues, por la regla de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Entonces, considerando la sucesión de término general $P_k(n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n+1)}{P_k(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_k(n+1)^k}{a_k n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = 1 \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1}$$

d. Diferencia de raíces de polinomios

En ocasiones, la sustitución de cada uno de ellos por su término de mayor grado no da resultado. En ese caso podemos sacar factor común la raíz del término de mayor grado y utilizar la equivalencia:

$$\boxed{\sqrt[p]{1+\theta_n}-1 \sim \frac{\theta_n}{p}} \quad \text{(D.1)}$$

D: $\underbrace{\sqrt[p]{1+\theta_n}-1}_{\theta'_n} \sim \ln\left(1+\theta'_n\right) = \ln\left(1+\sqrt[p]{1+\theta_n}-1\right) = \ln(1+\theta_n)^{1/p} = \frac{1}{p}\ln(1+\theta_n) \sim \frac{\theta_n}{p}$

Ejercicios. Justifica los resultados siguientes:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-3n^2}{2n^3+4n} = \dfrac{1}{2}$

b. $\ln\left(2n^3-n+1\right) \sim 3\ln n$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n-1}}-1\right) = \dfrac{2}{3}$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+a}-\sqrt{n^2+b}\right) = 0.$

9.3. Sucesiones recurrentes

Son aquellas en las que cada término se deduce de los anteriores:

$$\boxed{a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \dots)}$$

Un ejemplo clásico es la sucesión de Fibonacci, en que cada término se obtiene sumando los dos anteriores, siendo los dos primeros 0 y 1:

$$x_n = x_{n-1}+x_{n-2}, \quad x_1 = 0, \ x_2 = 1 \Longrightarrow \{x_n\} = 0,1,1,2,3,5,8,13\dots$$

Para calcular el límite de una sucesión recurrente, suele procederse en dos fases. Primero se demuestra que existe (por ejemplo, por tratarse de una sucesión monótona y acotada). Luego se obtiene el límite a partir de la relación de recurrencia.

Ejercicio. Demuestra que es convergente y calcula el límite de la sucesión definida por:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n-1}{3}, \quad x_1 = 1 \ (\textbf{Sol: } l=-1)$$

9.4. Equivalencias de Stirling y trigonométricas

a. Fórmula de Stirling

$$\boxed{n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \quad \text{(E.1)}$$

Ejercicio. A partir de la fórmula de Stirling, se propone justificar el lugar que ocupa el infinito factorial en la siguiente tabla de infinitos (ver apdo. **6.3**).

$$\boxed{\underset{p>1,\ a>0}{\left(\log_p n\right)^a} \ll \underset{b>0}{n^b} \ll \underset{c>1}{c^n} \ll \underset{0<d<1}{n^{dn}} \ll n! \ll \underset{f\geq 1}{n^{fn}}}$$

b. Equivalencias trigonométricas

1. La tangente, el seno y el ángulo en radianes son infinitésimos equivalentes.

$$\boxed{\tan\theta_n \sim \operatorname{sen}\theta_n \sim \theta_n} \quad \text{(F.1)}$$

2. A partir de la anterior: $\boxed{1-\cos\theta_n \sim \dfrac{1}{2}\theta_n^2}$ (F.2)

   D: $1-\cos\theta_n = 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta_n}{2} \sim 2\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\theta_n^2$

Ejemplo. Resolvemos el siguiente límite usando equivalencias trigonométricas:

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\tan\frac{2}{n} - \operatorname{sen}\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3 \tan\frac{2}{n}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3\,\frac{2}{n}\,\frac{(2/n)^2}{2} = 4$$

9.5. Cambio del tipo de indeterminación

Las indeterminaciones del tipo 1^∞, 0^0 e ∞^0 suelen resolverse usando la relación

$$a^b = e^{b\ln a}$$

siempre que $a>0$. En la del tipo $\infty-\infty$ se saca factor común uno de los dos infinitos.

Simbolizando por θ_n una sucesión nula, por α_n una divergente a $+\infty$ y por u_n una de límite 1, obtenemos los siguientes casos (en los tres primeros la indeterminación ha pasado al exponente).

a) Cambio de la indeterminación tipo 1^∞ en $\infty\cdot 0$: $\boxed{u_n^{\alpha_n} = e^{\alpha_n \ln u_n}}$ (G.1)

b) Cambio de la indeterminación tipo 0^0 en $0\cdot(-\infty)$: $\boxed{\theta_n^{\theta_n'} = e^{\theta_n' \ln\theta_n}}$ (G.2)

c) Cambio de la indeterminación tipo ∞^0 en $0\cdot\infty$: $\boxed{\alpha_n^{\theta_n} = e^{\theta_n\ln\alpha_n}}$ (G.3)

d) Indeterminación tipo $\infty-\infty$: $\boxed{\alpha_n-\alpha_n' = \alpha_n\left(1-\dfrac{\alpha_n'}{\alpha_n}\right) = \alpha_n'\left(\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n'}-1\right)}$ (G.4)

Ejemplos.

1. $L=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2\ln\cos\frac{1}{n}} \overset{\text{Si}\,\exists}{=} e^\lambda;\ \lambda = \lim_{n\to\infty} n^2\ln\cos\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right) =$
   $\displaystyle -\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = -\lim_{n\to\infty} n^2\frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow L = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

2. $L=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\tan\frac{1}{n}} \overset{\text{Si}\,\exists}{=} e^\lambda.$

   $\displaystyle\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(-\ln n) = 0 \Longrightarrow L = e^0 = 1$

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3^n - n^5\,2^n) = \lim_{n\to\infty} 3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}n^5\right) = \lim_{n\to\infty} 3^n\Bigg(1-\underbrace{\frac{n^5}{(3/2)^n}}_{\to 0}\Bigg) = \infty$

TABLA DE EQUIVALENCIAS (SUCESIONES)

$$\{\alpha_n\} \to +\infty; \qquad \{\theta_n\} \to 0; \qquad \{u_n\} \to 1; \qquad a_n \sim a'_n; \qquad b_n \sim b'_n$$

A. EQUIVALENCIAS GENERALES

1.	$a_n b_n$	$\sim$	$a'_n b'_n$	$\left(\text{Si } \exists \lim\limits_{n\to\infty} a'_n b'_n\right)$
2.	$\dfrac{a_n}{b_n}$	$\sim$	$\dfrac{a'_n}{b'_n}$	$\left(\text{Si } \exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a'_n}{b'_n}\right)$
3.	$\log_p(a_n)$	$\sim$	$\log_p(a'_n)$	$\left(\text{Si } \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 1\right)$

B. A PARTIR DEL NÚMERO e

1.	$\ln(1+\theta_n)$	$\sim$	θ_n
2.	$\ln u_n$	$\sim$	$u_n - 1$
3.	$e^{\theta_n} - 1$	$\sim$	θ_n

Nota: Para logaritmos en base p, se utiliza la relación $\log_p x = \dfrac{\ln x}{\ln p}$

C. EXPRESIONES POLINÓMICAS

1.	$a_0 + a_1\alpha_n + \ldots + a_p\alpha_n^p$	$\sim$	$a_p\alpha_n^p$
2.	$\ln(a_0 + a_1\alpha_n + \ldots + a_p\alpha_n^p)$	$\sim$	$p\ln\alpha_n$

D. RAÍCES

1.	$\sqrt[p]{1+\theta_n} - 1$	$\sim$	$\dfrac{\theta_n}{p}$

E. STIRLING

1.	$n!$	$\sim$	$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

F. TRIGONOMÉTRICAS

1.	θ_n	$\sim$	$\sin\theta_n$	$\sim$	$\tan\theta_n$
2.	$1-\cos\theta_n$	$\sim$	$\dfrac{1}{2}\theta_n^2$		

G. CAMBIO DEL TIPO DE INDETERMINACIÓN

1.	$u_n^{\alpha_n}$	$=$	$e^{\alpha_n \ln u_n}$	$[1^\infty \to e^{\infty\, 0}]$
2.	$\theta_n^{\theta'_n}$	$=$	$e^{\theta'_n \ln\theta_n}$	$\left[0^0 \to e^{0\,(-\infty)}\right]$
3.	$\alpha_n^{\theta_n}$	$=$	$e^{\theta_n \ln\alpha_n}$	$[\infty^0 \to e^{0\,\infty}]$
4.	$\alpha_n - \alpha'_n$	$=$	$\alpha_n\left(1 - \dfrac{\alpha'_n}{\alpha_n}\right)$	$\left[\infty - \infty \to \infty\left(1 - \dfrac{\infty}{\infty}\right)\right]$

10. Ejercicios de autoevaluación

10.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Toda sucesión convergente está acotada y viceversa.
2. Toda sucesión de Cauchy es convergente en $\mathbb{R}$.
3. Si $\{a_n\} \to a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \left\{\dfrac{1}{a_n}\right\} \to \dfrac{1}{a}$.
4. Si $\{a_n\} \to a \in \mathbb{R}$, $\{b_n\} \to b \in \mathbb{R} \Longrightarrow \left\{a_n^{b_n}\right\} \to a^b$.
5. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = x \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, si éste último existe.
7. La diferencia de dos infinitos equivalentes puede ser un infinito, pero es despreciable frente a ambos.
8. Sean $a_n, a'_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \big/ a_n \sim a'_n$. Entonces se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln a'_n$.
9. Sea una suma o diferencia de infinitésimos y m el mayor de sus órdenes. Si al sustituir los infinitésimos por sus partes principales resulta un infinitésimo de orden m, el límite no varía.
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{4n}} = e^2$.
11. $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n}$.
12. $\ln\left(3n^4 + 4n^2 + 4\right) \sim 4 \ln n$.
13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.
14. La expresión $n^{\frac{1}{\ln n}}$ vale e, $\forall n > 1$.
15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 \ln n - n \ln^2 n\right) = +\infty$.

10.2. Cuestiones

Cuestión 1. Razona la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:

"Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tales que $\{a_n\} \to a \in \mathbb{R}$ y $\{b_n\}$ no tiene límite, finito ni infinito. Si la sucesión producto $\{a_n b_n\}$ tiene límite $c \in \mathbb{R}$, entonces el límite $a = 0$."

Cuestión 2. Pon un ejemplo de sucesión divergente obtenida como suma de:
a) Una divergente y una convergente. b) Una divergente y una oscilante. c) Dos divergentes. d) Dos oscilantes. e) Dos convergentes.

Cuestión 3. Sea $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$. ¿Es suficiente que una de las dos sea divergente para que la suma lo sea? ¿Es necesario?

Cuestión 4. Razona qué podemos afirmar de la suma de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ si ambas son:
a) Convergentes. b) Acotadas. c) Oscilantes. d) Divergentes.

10.3. Solución del test verdadero/falso

1. **F**. Toda sucesión convergente está acotada (prop. 8 de los límites), pero no viceversa. Ej: la sucesión $\left\{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, \dots\right\}$ está acotada pero no converge.
2. **V**. Es una de las maneras de expresar la completitud de $\mathbb{R}$. No se cumple en $\mathbb{Q}$.
3. **F**. Se cumple sólo si $a \neq 0$.
4. **F**. La potencia de base a y exponente b se define en general para $a > 0$. Si $a > 0$, la implicación es cierta.
5. **F**. Contraejemplo: la sucesión $\{a, -a, a, -a, \dots\}$. Sí se cumple de derecha a izquierda.
6. **V**. Es una consecuencia del criterio de Stolz.
7. **V**. Se demuestra en el apdo. **7** del tema (Sucesiones equivalentes).
8. **V**. Al ser $a_n \sim a'_n$, ambas tienen el mismo límite a. Distinguimos dos casos:
   a) Si $a \neq 1$, $\ln a_n \sim \ln a'_n$, por lo que tienen igual límite (ver apdo. 8.2).
   b) Si $a = 1$, tanto $\ln a_n$ como $\ln a'_n$ tienden a $\ln 1 = 0$.
9. **F**. ... y m el **menor** de sus órdenes... (regla práctica para sumas y diferencias de infinitésimos).
10. **V**. Haciendo $\sqrt{4n} = 2\sqrt{n}$, resulta uno de los casos estudiados a partir del número e.
11. **V**. $n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim n\,\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ (ver tabla de equivalencias).
12. **V**. $\ln(3n^4 + 4n^2 + 4) \sim \ln(3n^4) = \ln 3 + \ln n^4 \sim 4 \ln n$ (ver tabla de equivalencias).
13. **V**. Usando la fórmula de Stirling y la comparación de infinitésimos potencial y exponencial queda:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} = 0$$
14. **V**. $n^{\frac{1}{\ln n}} = e^{\ln\left(n^{\frac{1}{\ln n}}\right)} = e^{\left(\frac{1}{\ln n}\ln n\right)} = e^1 = e$, $\forall n > 1$ (ver apdo. **9.5**).
15. **V**. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 \ln n - n \ln^2 n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \ln n \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = +\infty$ (ver apdo. **9.5**).

10.4. Solución de las cuestiones

Cuestión 1. *“Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tales que $\{a_n\} \to a \in \mathbb{R}$ y $\{b_n\}$ no tiene límite, finito ni infinito. Si la sucesión producto $\{a_n b_n\}$ tiene límite $c \in \mathbb{R}$, entonces el límite $a = 0$.”*

Puesto que $\{b_n\}$ no tiene límite, tiene que ser divergente u oscilante. En el primer caso sus términos se hacen tan grandes como queramos en valor absoluto, a partir de uno dado. En el segundo, ni se cumple lo anterior ni tiene límite finito.

Entonces, para que el producto $a_n b_n$ tenga límite parece intuirse la necesidad de que $\{a_n\} \to 0$. Lo demostramos por reducción al absurdo.

Supongamos que $a \neq 0$. Entonces los términos de $\{a_n\}$ serán distintos de 0 a partir de un cierto índice y se cumplirá:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{c}{a} \in \mathbb{R}$$

Pero este resultado contradice la hipótesis de que la sucesión $\{b_n\}$ no tiene límite. Así pues, si $\{a_n b_n\}$ tiene límite $c \in \mathbb{R}$, el límite $a = 0$.

Cuestión 2. *Pon un ejemplo de sucesión divergente obtenida como suma de:*

a) *Una divergente y una convergente:* $\left\{n + \dfrac{1}{n}\right\} = \{n\} + \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

b) *Una divergente y una oscilante:* $\{n + (-1)^n\} = \{n\} + \{(-1)^n\}$

c) *Dos divergentes:* $\{2n\} = \{n\} + \{n\}$

d) *Dos oscilantes:* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = \{1, 0, 3, 0, 5, 0, \ldots\} + \{0, 2, 0, 4, 0, 6, \ldots\}$

e) *Dos convergentes:* No existe. La suma de dos convergentes converge a la suma de los límites (apdo. **4**. Operaciones con límites).

Cuestión 3. *Sea* $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$. *¿Es suficiente que una de las dos sea divergente para que la suma lo sea? ¿Es necesario?*

- No es suficiente: P. ej. $\{1, 2, 3, 4, \ldots\} + \{0, -2, 0, -4, \ldots\} = \{1, 0, 3, 0, \ldots\}$, oscilante.
- No es necesario: en la cuestión 2, caso d) se obtiene una divergente sumando dos oscilantes.

Cuestión 4. *Razona qué podemos afirmar de la suma de* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *si ambas son:*

a) *Convergentes:* la suma es convergente (ver cuestión 2, caso e)).

b) *Acotadas:* la suma es acotada pues, al ser ambas acotadas,
$\exists\, k_1, k_2 > 0 \,/\, |a_n| < k_1,\ |b_n| < k_2\ \forall n$. Entonces, $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < k_1 + k_2\ \forall n$.
Como consecuencia, la suma no puede ser divergente.

c) *Oscilantes:* no podemos asegurar nada.

Ej. 1: $\{0, 1, 0, 1, \ldots\} + \{0, -1, 0, -1, \ldots\} = \{0, 0, 0, 0, \ldots\}$, convergente.

Ej. 2: $\{1, 0, 3, 0, \ldots\} + \{0, 2, 0, 4, \ldots\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, divergente.

Ej. 3: $\{0, 1, 0, 1, \ldots\} + \{0, 1, 0, 1, \ldots\} = \{0, 2, 0, 2, \ldots\}$, oscilante.

d) *Divergentes:* no podemos asegurar nada.

Ej. 4: $\{1, 2, 3, 4, \ldots\} + \{-1, -2, -3, -4, \ldots\} = \{0, 0, 0, 0, \ldots\}$, convergente.

Ej. 5: $\{1, 2, 3, 4, \ldots\} + \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, divergente.

Ej. 6: $\{l, 3, -4, \ldots\} = \{2, 0, 6, 0, \ldots\}$, oscilante.

Tema IV. Funciones en $\mathbb{R}$ (11.11.2024)

A. Nociones generales

1. Concepto de función

Definición. Sean los conjuntos A, B y $D \subset A$. Llamamos función f, de D en B, a toda correspondencia que asocia, a cada $x \in D$, un único elemento $f(x) \in B$.

$$f : D \to B; \quad x \to y = f(x)$$

A x se le llama variable independiente; y es la variable dependiente.
Si $A = B = \mathbb{R}$, se trata de una función real de variable real. Ejemplo, la función $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Dominio. Es el conjunto D de valores de la variable independiente para los que existe la función. Se llama también campo de existencia. En el ejemplo, el radicando he de ser mayor o igual que 0, por lo que

$$1 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \leq 1 \Longrightarrow |x| \leq 1$$

luego el dominio D es el intervalo $[-1, 1]$.

Recorrido. Es el conjunto de las imágenes de los elementos de D. Se le llama también conjunto imagen.

$$\boxed{f(D) = \big\{ f(x) \in B \,\big/\, x \in D \big\}}$$

En el ejemplo, $f(D) = [0, 1]$

Gráfica. La gráfica de una función es el conjunto de puntos

$$\boxed{G_f = \big\{ \big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^2 \,\big/\, x \in D \big\}}$$

En el ejemplo, la gráfica de la función es la semicircunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.

2. Operaciones con funciones

Funciones definidas en D. El conjunto de todas las funciones reales de variable real, definidas en un cierto conjunto $D \subset \mathbb{R}$, se denota $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Habitualmente D es un intervalo.

Operaciones entre funciones. Entre los elementos de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ (funciones definidas en D), se definen las operaciones suma, producto y producto por un número real, como

$$\boxed{(f + g)(x) = f(x) + g(x)}, \quad \boxed{(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)}, \quad \boxed{(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)}, \quad \forall x \in D$$

Relación de orden. Entre funciones se define la relación de orden siguiente

$$\boxed{f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x)}, \forall x \in D$$

Función acotada. Se dice que f está acotada en $S \subset D$ si el conjunto $f(S)$ está acotado. En ese caso, se llaman supremo, ínfimo, máximo o mínimo de f a los correspondientes elementos del conjunto $f(S)$.

Composición de funciones. Sean las funciones $f : A \to B$ y $g : E \to F$, tales que $f(A) \subset E$. Definimos la función compuesta $g \circ f$ como

$$g \circ f : A \to F \Big/ \boxed{(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)},\ \forall x \in A$$

La composición de funciones tiene la propiedad asociativa, pero no la conmutativa.

3. Tipos de funciones

Función par y función impar. Decimos que una función f, definida en D, es:

- Impar, si y sólo si: $\boxed{f(-x) = -f(x)}$, $\forall x \in D$. Ejemplo: $\operatorname{sen} x$, x^3, $\tanh x$.

- Par, si y sólo si: $\boxed{f(-x) = f(x)}$, $\forall x \in D$. Ejemplo: $\cos x$, x^2, $\cosh x$.

Se propone como ejercicio demostrar que la función par e impar a la vez es la función nula.

Funciones periódicas. Se dice que f es periódica de período T si y sólo si

$$\exists\, T \in \mathbb{R} \Big/ \boxed{f(x) = f(x+T)},\ \forall x \in D$$

Ejemplo: las funciones seno, coseno y tangente. Suelen estudiarse en el intervalo $[0, T]$.

Funciones monótonas. Existen dos casos:

- Monótona creciente: $\boxed{x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)}$, $x_1, x_2 \in D$. Ejemplo: $y = \sqrt{x}$.

- Monótona decreciente: $\boxed{x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)}$, $x_1, x_2 \in D$. Ejemplo: $1/x\ (x > 0)$.

Si $f(x_1)$ nunca es igual a $f(x_2)$, se trata de monotonía estricta.

Funciones elementales principales. Son la potencia, la exponencial, el logaritmo, el seno, el coseno y la tangente.

$$\boxed{x^a,\ a \in \mathbb{R};\quad b^x,\ b \in \mathbb{R}^+;\quad \log_c x,\ c \in \mathbb{R}^+,\ c \neq 1;\quad \operatorname{sen} x;\quad \cos x;\quad \tan x}$$

La suma, el producto, el cociente y la composición de funciones elementales principales (en número finito) da lugar a las funciones elementales.

Algunas funciones particulares.

1. Función parte entera. Nos da el valor del mayor entero menor o igual que $x \in \mathbb{R}$. La representaremos por $E(x)$ (también se usa $\lfloor x \rfloor$): $E(x) = p \in \mathbb{Z} \big/ p \le x < p + 1$.

2. Función parte decimal. La definimos, sólo para $x > 0$, a partir de la función parte entera. La representaremos por $\{x\}$: $\{x\} = x - E(x)$.

3. Función signo: $sgn(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

4. Función de Dirichlet: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

B. Límites de funciones

1. Límite funcional

Definición. Sea $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Sea un punto a, tal que f está definida en un entorno reducido de a, U_a^*. Decimos que f tiene límite φ en a si se cumple:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \varphi \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \,/\, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \varphi| < \varepsilon}$$

Si x está suficientemente cerca de a, su imagen $f(x)$ estará tan próxima a φ como queramos.

Obsérvese que no nos interesa el valor de $f(a)$ (que ni siquiera tiene por qué existir), sino el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to a$.

Ejemplo. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

El límite l de $f(x)$, cuando $x \to 0$, vale 1 $\big(l \neq f(0)\big)$.

Nota. Si a un entorno U_a de a le quitamos el punto a, obtenemos un entorno reducido U_a^*. Por ejemplo, si U_a es el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, U_a^* será $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

2. Límites laterales

Definición. Si, al calcular el límite, nos acercamos a $x = a$ sólo por la derecha o sólo por la izquierda, denominamos **límite lateral** al límite obtenido. Para ello f debe estar definida al menos en un semientorno reducido de a: $(a - \delta, a)$ (para el límite por la izquierda) o bien $(a, a + \delta)$ (para el límite por la derecha).

Expresamos la existencia de límites de f en a por la izquierda y por la derecha respectivamente como

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = \varphi^-} \quad ; \quad \boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = \varphi^+}$$

Ejemplo. Sea $sgn(x)$ la función signo. Se cumple:

$$\lim_{x \to 0^-} sgn(x) = -1; \quad \lim_{x \to 0^+} sgn(x) = 1$$

Relación entre los límites laterales y el funcional. Si f existe en un entorno de a, podemos acercarnos al punto por ambos lados. En ese caso se cumple el siguiente teorema:

"Es condición necesaria y suficiente para que f tenga límite en a que existan los límites laterales en a y coincidan".

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \varphi \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \varphi}$$

Ejercicio. Calcula los límites laterales de las funciones siguientes en los puntos que se indican:

a) Función parte entera de x, en los puntos $x_p \in \mathbb{Z}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}$, en el origen.

3. Extensión del concepto de límite

Hemos definido límite finito en un punto. Si ahora observamos la función $f(x) = 1/x^2$ (figura 1, izquierda), vemos que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Esto nos lleva a ampliar el concepto de límite, definiendo **límite infinito** y **límite en el infinito**.

a) Límite infinito en un punto: si x está suficientemente cerca de a, $f(x)$ se hace tan grande como queramos.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff \forall A > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > A}$$

b) Límite finito en el infinito. Si x crece suficientemente, $f(x)$ llega a estar de φ tan cerca como queramos.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \varphi \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 \,/\, x > B \Longrightarrow |f(x) - \varphi| < \varepsilon}$$

c) Límite infinito en el infinito. Si x crece suficientemente, $f(x)$ se hace tan grande como queramos.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 \,/\, x > B \Longrightarrow f(x) > A}$$

En la figura de la izquierda ($f(x) = 1/x^2$) se muestran ejemplos de los casos a) (donde $a = 0$) y b) (donde $\varphi = 0$).

En la figura de la derecha ($f(x) = x^2$), se muestra un ejemplo del caso c).

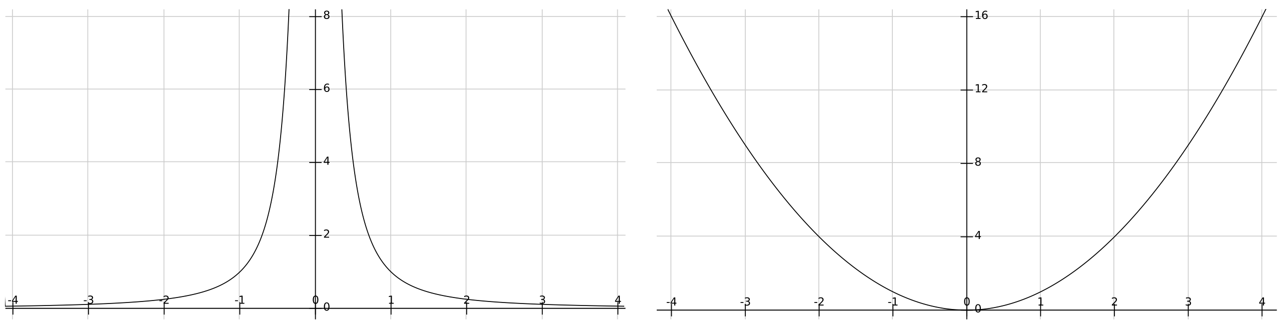

Figura 1: Casos a) $a = 0$; b) $\varphi = 0$; c) $a = \varphi = +\infty$.

Hemos definido los casos correspondientes a $+\infty$. Las definiciones para $-\infty$ son muy similares y se propone obtenerlas como ejercicio.

Ejercicio. Se propone estudiar los límites en $+\infty$ y en 0^+ de las dos siguientes funciones y dibujarlas aproximadamente:

a) $f(x) = e^{1/x}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in \mathbb{Q} \\ -\dfrac{1}{x}, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

4. Límite por sucesiones. Relación con el límite funcional

Sea $f(x)$ definida en un entorno reducido U_a^*, $a \in \mathbb{R}$. Se cumple el siguiente teorema:

"Es condición necesaria y suficiente para que la función f tenga límite φ en a que, para toda sucesión $\{x_n\}$ de límite a, su transformada $\{f(x_n)\}$ tenga límite φ".

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \varphi \iff \forall\{x_n\} \,/\, \lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \varphi}$$

Es decir, si $f(x) \to \varphi$ (cuando $x \to a$), toda sucesión que tiende a a se transforma por f en otra que tiende a φ.

Y si existe alguna sucesión $\{x_n\}$ de límite a, cuya transformada no tenga límite φ, la función no tendrá límite φ en $x = a$.

Aplicación. Este teorema es de gran utilidad para justificar las operaciones con límites de funciones a partir de las correspondientes con límites de sucesiones (apdo. **B.6**). También sirve para demostrar que una determinada función no tiene límite en un punto a. Para ello hemos de encontrar una sucesión de límite a, cuya sucesión transformada no tenga límite, como veremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Estudiamos si la función $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$ tiene límite en el origen.

Cuando $x \to 0$, $\dfrac{\pi}{x} \to +\infty$. Entonces, para variaciones muy pequeñas de x el ángulo toma todos los valores de los sucesivos intervalos $[2\pi(n-1), 2\pi n]$, $n \in \mathbb{N}$, con lo que los valores de la función recorren una y otra vez el intervalo $[-1, 1]$ y parece claro que no existe límite.

Podemos demostrarlo tomando la sucesión $x_n = 1/n$, de límite 0. Su transformada por la función f será

$$\left\{\cos\frac{\pi}{x_n}\right\} = \left\{\cos\frac{\pi}{1/n}\right\} = \{\cos n\pi\}$$

que, cuando $n \in \mathbb{N}$, toma los valores $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$, luego no tiene límite.

Al existir una sucesión de límite 0 cuya transformada no tiene límite, queda demostrado que $f(x)$ no tiene límite en $x = 0$.

En la siguiente figura se observa el comportamiento de la función $\cos\dfrac{\pi}{x}$ en las proximidades del origen.

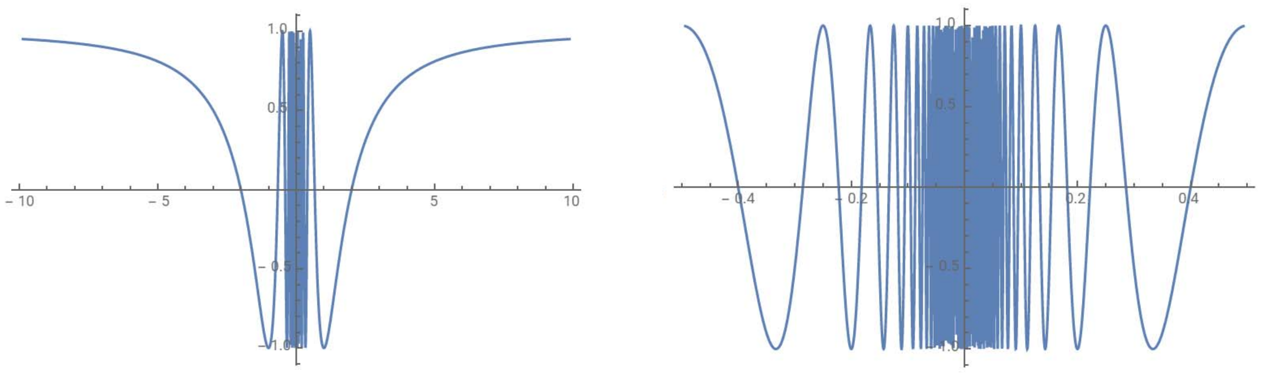

Figura 2: $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$. a) Entre $x = -10$ y $x = 10$; b) Entre $x = -0.5$ y $x = 0.5$.

Ejercicio. Estudia si la función $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$ tiene límite en el origen.

5. Propiedades de los límites

1) *El límite, si existe, es único.*

D: Por reducción al absurdo. Supongamos que existan dos, φ_1 y φ_2.

Tomamos $\varepsilon > 0 \;/\; 2\varepsilon < |\varphi_1 - \varphi_2|$ (ε es menor que la semidistancia entre ambos). Al ser φ_1 y φ_2 límites,

$$\begin{aligned}
&\exists\delta_1 > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - \varphi_1| < \varepsilon \\
&\exists\delta_2 > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - \varphi_2| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Entonces, si $0 < |x-a| < \delta$,

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = |\varphi_1 - f(x) + f(x) - \varphi_2| \leq |\varphi_1 - f(x)| + |f(x) - \varphi_2| < 2\varepsilon$$

Es decir, $2\varepsilon > |\varphi_1 - \varphi_2|$, contra la hipótesis.

2) *Si f tiene límite finito en a, la función está acotada en un entorno reducido de a, V_a^*.*

D: Por ser φ el límite,

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \varphi| < \varepsilon$$

Entonces

$$-\varepsilon < f(x) - \varphi < \varepsilon \Longrightarrow \boxed{\varphi - \varepsilon < f(x) < \varphi + \varepsilon} \text{ para } x \in V_a^*$$

Nota. V_a^* está formado por los puntos que satisfacen la condición $0 < |x-a| < \delta$, es decir $V_a^* = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

3) *Si f tiene en a límite φ, finito y no nulo, existe un entorno reducido de a en el que f tiene el signo del límite.*

D: A partir de la propiedad 2,

- Si $\boxed{\varphi > 0}$ tomamos $\varepsilon < \varphi \Longrightarrow 0 < \varphi - \varepsilon < f(x) \Longrightarrow \boxed{f(x) > 0}$ para $x \in U_a^*$.

- Si $\boxed{\varphi < 0}$ tomamos $\varepsilon < -\varphi \Longrightarrow f(x) < \varphi + \varepsilon < 0 \Longrightarrow \boxed{f(x) < 0}$ para $x \in V_a^*$.

4) *Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en un entorno reducido de a y las funciones f y h tienen límite φ en a, entonces la función g tiene límite φ en a.*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ en } V_a^* \text{ y } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \varphi \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \varphi$$

D: Por ser φ límite de f y h,

$$\forall\varepsilon > 0 \begin{cases} \exists\delta_1 > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow \varphi - \varepsilon < f(x) < \varphi + \varepsilon \\ \exists\delta_2 > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow \varphi - \varepsilon < h(x) < \varphi + \varepsilon \end{cases}$$

Además $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para $0 < |x-a| < \delta$. Entonces, si $\delta^* = \min(\delta, \delta_1, \delta_2)$, se cumple

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta^* > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta^* \Longrightarrow \boxed{\varphi - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \varphi + \varepsilon}$$

por lo que también g tiene límite φ en a.

6. Operaciones con límites

Las operaciones entre límites de funciones son análogas a las operaciones entre límites de sucesiones. Las demostraciones para funciones pueden hacerse a partir de las operaciones correspondientes para sucesiones y de la relación entre el límite funcional y el límite por sucesiones (apdo. **B.4**). Como ejemplo se demuestra la primera de ellas.

Sean f y g dos funciones definidas al menos en un entorno reducido V_a^* de $a \in \mathbb{R}$, (a puede ser $\pm\infty$). En los 6 primeros apartados los límites son finitos. En el apartado **B.7** se estudian las operaciones con límites infinitos, que en ocasiones dan lugar a casos dudosos.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \varphi, \;\; \lim\limits_{x\to a} g(x) = \gamma \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to a} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda\varphi + \mu\gamma, \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \varphi, \;\; \lim\limits_{x\to a} g(x) = \gamma \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \varphi\gamma}$

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \varphi \neq 0 \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\varphi}}$

4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \varphi \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\varphi|}$

5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \varphi > 0, \;\; p > 0 \;\; (p \neq 1) \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to a} \log_p(f(x)) = \log_p \varphi}$

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \varphi > 0, \;\; \lim\limits_{x\to a} g(x) = \gamma \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = \varphi^\gamma}$

7. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty \Longrightarrow$

   a) $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = \pm\infty}$

   b) $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = +\infty}$

   c) $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \alpha f(x) = \pm\infty, \;\; \forall \alpha > 0}$

   d) $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0}$

   e) $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = ?}$

   f) $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = ?}$

Tipos de indeterminación. El apartado 7 (casos d, e y f) y la operación f^g (en ciertos casos de límite nulo o infinito) dan lugar a los siguientes tipos de indeterminación:

$$\boxed{\frac{0}{0}; \;\; \frac{\infty}{\infty}; \;\; 0 \cdot \infty; \;\; \infty - \infty; \;\; 1^\infty; \;\; 0^0; \;\; \infty^0}$$

Demostración de 1: Puesto que ambas funciones tienen límite en $x = a$, toda sucesión $\{x_n\}$, de límite a, se transforma -por medio de f- en la sucesión $\{f(x_n)\}$, de límite φ; y -por medio de g- en la sucesión $\{g(x_n)\}$, de límite γ.

Entonces, por medio de la función $\lambda f + \mu g$, toda sucesión $\{x_n\}$, de límite a, se transforma en la sucesión $\{\lambda f(x_n) + \mu g(x_n)\}$, que tiene como límite $\lambda\varphi + \mu\gamma$ (como vimos en las operaciones con límites de sucesiones).

7. Infinitos e infinitésimos

7.1. Definiciones

Sea $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$ ó $a = \pm\infty$. Decimos que:

a) f es un infinito en a si $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.}$

b) f es un infinitésimo en a si $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = 0.}$

Ejemplo. Si $x \to \infty$, x^3 es un infinito y $1/x^3$ un infinitésimo. Si $x \to 1$, $(x-1)^2$ es un infinitésimo y $1/(x-1)^2$ un infinito.

7.2. Comparación

Sean $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ infinitos (infinitésimos) en a, tales que no se anulan en un entorno reducido de a.

a) Si f/g es un infinito (infinitésimo) en a, f **es de mayor orden que** g en a.

Ejemplo: Si $x \to \infty$, x^3 es un infinito de mayor orden que x^2, pues su cociente tiende a infinito; y $1/x^4$ es un infinitésimo de mayor orden que $1/x^2$, pues su cociente tiende a cero.

b) Si $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$, f **y** g **son del mismo orden** en a. Entonces:

b.1. Sea f un infinito para $x \to \infty$. Si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^p} = k \in \mathbb{R},\ k \neq 0,$$

$f(x)$ **es de orden** p **y** $\boxed{kx^p}$ **es su parte principal**.

b.2. Sea f un infinitésimo para $x \to \infty$. Si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{1/x^p} = k \in \mathbb{R},\ k \neq 0,$$

$f(x)$ **es de orden** p **y** $\boxed{\dfrac{k}{x^p}}$ **es su parte principal**.

b.3. Sea f un infinitésimo en $a \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^p} = k \in \mathbb{R},\ k \neq 0,$$

$f(x)$ **es de orden** p **y** $\boxed{k(x-a)^p}$ **es su parte principal**.

Ejemplo. $2x + 3x^2$ es un infinitésimo de orden 1 en el origen (parte principal: $2x$). Es también un infinito de orden 2 para $x \to \infty$ (parte principal: $3x^2$).

Ejercicio. Calcula el orden y la p.p. de $\sqrt{9x^2 - 2x}$ y de $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^2$ $(x \to \infty)$.

c) Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, f es despreciable frente a g en a.

Ejemplo. Si $x \to \infty$, $\sqrt{x}$ es despreciable frente a x^2 y $\dfrac{1}{x^3}$ lo es frente a $\dfrac{1}{x}$.

Nota. A partir de las equivalencias entre funciones (ver tabla de equivalencias al final del apdo. **9**), podemos determinar el orden y la parte principal de infinitos e infinitésimos no polinómicos. Por ejemplo, si $x \to a$, resulta:

$$f(x) = \operatorname{sen}^2(x-a) \sim (x-a)^2$$

luego $f(x)$ es un infinitésimo de orden 2 y su parte principal es $(x-a)^2$.

Ejercicio. Si $x \to 2$, calcula el orden y la parte principal de $g(x) = e^{2x-4} - 1$.

7.3. Relación entre tipos de infinito

Se demuestra que todo infinito logarítmico es despreciable frente a cualquiera potencial; todo potencial frente a cualquiera exponencial; y todo exponencial frente a cualquiera potencial-exponencial. Lo representamos con el símbolo $\ll$:

$$\boxed{\underset{p>1,\ a>0}{\left(\log_p x\right)^a} \ll \underset{b>0}{x^b} \ll \underset{c>1}{c^x} \ll \underset{d>0}{x^{dx}}}$$

8. Funciones equivalentes en un punto

Sean $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ de igual límite, finito o infinito, en a ($a \in \mathbb{R}$ ó $a = \pm\infty$). Decimos que f y g son equivalentes en a si verifican la siguiente condición:

$$\boxed{f \sim g \text{ en } a \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

La equivalencia de funciones es un tema algo más amplio que la de sucesiones, puesto que en funciones se define la equivalencia para $x \to a$ o para $x \to \infty$, mientras que en sucesiones se define sólo cuando $n \to \infty$. Pero son válidos aquí los razonamientos que se hicieron para sucesiones, lo que nos permite abreviar el estudio de la equivalencia de funciones y su sustitución por funciones equivalentes.

Así pues, si $a \in \mathbb{R}$ o $a = \pm\infty$, se cumple:

- Si $f \sim g$ en a, ambas funciones tienen el mismo límite en a.

- Si f y g tienen en a el mismo límite, finito y no nulo, $f \sim g$ en a.

- Si f y g son infinitésimos equivalentes en a, $f - g$ es un infinitésimo de orden superior a ambos en a.

- Si f y g son infinitos equivalentes en a, $f - g$ es despreciable frente a ambos en a.

- Si f es un infinito en a, es equivalente a su parte principal en a.

- Si f es un infinitésimo en a, es equivalente a su parte principal en a.

9. Sustitución por funciones equivalentes

9.1. Producto y cociente

Se demuestra que *al sustituir en productos (cocientes) una función por otra equivalente, resulta una expresión equivalente a la primera*, siempre que exista el límite del producto (cociente) de las funciones equivalentes a las iniciales.

Es decir, si $f_1 \sim f_2$ y $g_1 \sim g_2$ en a, se cumple

$$\boxed{f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2 \text{ en } a} \quad \left(\text{si } \exists \lim_{x\to a} f_2 \cdot g_2\right)$$

$$\boxed{f_1/g_1 \sim f_2/g_2 \text{ en } a} \quad \left(\text{si } \exists \lim_{x\to a} f_2/g_2\right)$$

9.2. Logaritmo

Se demuestra que *al sustituir en un logaritmo su argumento por una función equivalente, resulta una expresión equivalente a la primera*, siempre que la función no tenga límite 1 en a.

Es decir, si la función f_1 toma sólo valores positivos en un entorno de a y su límite en a es $\varphi \geq 0,\ \varphi \neq 1$ (φ puede ser $+\infty$), se cumple

$$\boxed{f_1 \sim f_2 \text{ en } a \Longrightarrow \ln f_1 \sim \ln f_2 \text{ en } a}$$

9.3. Potencial-exponencial

Dados $f_1 \sim f_2$ y $g_1 \sim g_2$ en a, en general **no** se cumple la equivalencia entre $(f_1)^{g_1}$ y $(f_2)^{g_2}$

$$(f_1)^{g_1} \not\sim (f_2)^{g_2}$$

Por ejemplo, si $x \to \infty,\ x+1 \sim x$. Pero $e^{x+1} \not\sim e^x$ (su cociente tiene límite $e \neq 1$).

Estas indeterminaciones se resuelven generalmente haciendo

$$\boxed{f^{\,g} = e^{g \ln f}} \quad (\text{si } f > 0)$$

9.4. Suma o diferencia

Como ocurría en Sucesiones (**8.4**), al calcular el límite de una suma (diferencia) de funciones no se debe, en general, sustituirlas por otras equivalentes, pues podemos obtener resultados erróneos. En estos casos aplicamos lo que sigue.

Regla práctica. *"Sea un límite en que aparece un factor o divisor formado por sumas y/o diferencias de infinitésimos. Sea m el menor de sus órdenes. Si al sustituir los infinitésimos por sus partes principales resulta un infinitésimo de orden m, la sustitución es correcta y el límite no varía"* (F. Granero, pg. 153).

Para infinitos se enuncia igual, cambiando *menor* de sus órdenes por *mayor* de sus órdenes.

Esto significa que, en el caso de sumas y diferencias de infinitésimos o infinitos, podemos usar equivalencias siempre que no desaparezcan las partes principales.

Ejemplo. En el siguiente límite se conserva el orden $m = 2$ en el numerador, tras sustituir por las partes principales, por lo que la sustitución es válida.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+x^2) - 2\,\text{sen}^2\, x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 2x^2}{x^2} = 1$$

TABLA DE EQUIVALENCIAS (FUNCIONES)

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \infty; \quad \lim_{x\to x_0} \theta(x) = 0; \quad \lim_{x\to x_0} u(x) = 1; \quad f_1(x) \sim f_2(x); \quad g_1(x) \sim g_2(x)$$

Estas equivalencias se dan en $x_0 \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_0 = \pm\infty \end{cases}$; $\quad f_1(x) \sim f_2(x)$ en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$

A. EQUIVALENCIAS GENERALES

1. $f_1(x) \cdot g_1(x) \quad \sim \quad f_2(x) \cdot g_2(x) \quad \left(\text{Si } \exists \lim_{n\to\infty} f_2(x) g_2(x)\right)$
2. $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad \sim \quad \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad \left(\text{Si } \exists \lim_{n\to\infty} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}\right)$
3. $\log_p(f_1(x)) \quad \sim \quad \log_p(f_2(x)) \quad \left(\text{Si } \exists \lim_{n\to\infty} f_1(x) \neq 1\right)$

B. A PARTIR DEL NÚMERO e

1. $\ln(1+\theta(x)) \quad \sim \quad \theta(x)$
2. $\ln u(x) \quad \sim \quad u(x) - 1$
3. $e^{\theta(x)} - 1 \quad \sim \quad \theta(x)$

Nota: Para logaritmos en base p, se utiliza la relación: $\log_p x = \dfrac{\ln x}{\ln p}$

C. EXPRESIONES POLINÓMICAS

1. $a_0 + a_1\alpha(x) + \ldots + a_p\alpha^p(x) \quad \sim \quad a_p\alpha^p(x)$
2. $\ln(a_0 + a_1\alpha(x) + \ldots + a_p\alpha^p(x)) \quad \sim \quad p \ln \alpha(x)$

D. RAÍCES

1. $\sqrt[p]{1+\theta(x)} - 1 \quad \sim \quad \dfrac{\theta(x)}{p}$

E. TRIGONOMÉTRICAS

1. $\theta(x) \quad \sim \quad \operatorname{sen}\theta(x) \quad \sim \quad \tan\theta(x)$
2. $1 - \cos\theta(x) \quad \sim \quad \dfrac{1}{2}\theta(x)^2$

F. CAMBIO DEL TIPO DE INDETERMINACIÓN

1. $f(x)^{g(x)} \quad = \quad e^{g(x)\ln f(x)} \quad [\text{para } 1^\infty, 0^0, \infty^0]$
2. $\alpha_p(x) - \alpha_q(x) \quad = \quad \alpha_p(x)\left(1 - \frac{\alpha_q(x)}{\alpha_p(x)}\right) \quad \left[\infty - \infty \to \infty\left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right)\right]$
3. $\alpha_p(x) - \alpha_q(x) \quad = \quad \dfrac{\frac{1}{\alpha_p(x)} - \frac{1}{\alpha_q(x)}}{\frac{1}{\alpha_p(x)\alpha_q(x)}} \quad \left[\infty - \infty \to \dfrac{0}{0}\right]$

C. Continuidad de funciones

1. Función continua

Definición. Sea $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, definida en un entorno de a, U_a. Decimos que f es continua en a si se cumple:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \big/\ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon}$$

Al estar f definida en U_a, podemos tomar valores de x tan próximos a a como queramos y calcular el límite. Entonces, la definición anterior equivale a la siguiente:

$$\boxed{f \text{ es continua en } a \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Definimos así la función pues la expresión fuera del origen no es válida en $x = 0$. Estudiando el límite cuando $x \to 0$, observamos que el primer factor tiende a 0 y el segundo está acotado, luego el límite es nulo y la función es continua en el origen.

Ejercicio. Estudia la continuidad en el origen de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

2. Continuidad lateral

Definición. Si f está definida al menos en un semientorno de a, es decir en $[a, a+\delta)$ o $(a-\delta, a]$, diremos que:

- f es continua en a^+ (a por la derecha) si y sólo si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- f es continua en a^- (a por la izquierda) si y sólo si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Si f está definida en un entorno de a, U_a, se cumple: "f es continua en a si y sólo si lo es por la derecha y por la izquierda".

Continuidad en un intervalo. Decimos que f es continua en $I = (a, b)$, si lo es $\forall x \in I$.

Si el intervalo es cerrado, $I = [a, b]$, f es continua en I si lo es en (a, b), en a^+ y en b^-.

Ejemplo. Estudiamos la continuidad en el origen de $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-x} = e^0 = 1\,; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

con lo que vemos que f es continua en 0^- y discontinua en 0^+.

Ejercicios.

1. Dibuja y estudia, cuando $x \to 0^-$, la función $f(x) = e^{1/x}$.
2. Dibuja y estudia la función $f(x) = |x+1|$.
3. Estudia la continuidad en el origen de $f(x) = \begin{cases} |x|\,, & x < 0 \\ |1+x|\,, & x \geq 0 \end{cases}$

3. Discontinuidades

Si f no es continua en un punto a, decimos que existe una discontinuidad en ese punto. Distinguimos los siguientes tipos:

a) Discontinuidad evitable. Se da cuando existe límite de f en a, pero no coincide con $f(a)$ (porque no existe $f(a)$ o porque ambos valores existen y son distintos).

$$\boxed{\exists \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)}$$

Para evitar esta discontinuidad, podemos asignar a f en a el valor del límite.

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Ejemplo. Si $f(x) = \dfrac{1-x^2}{2+2x}$, no existe $f(-1)$. Calculamos el límite en ese punto:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(1-x)(1+x)}{2(1+x)} = \lim_{x\to -1} \frac{(1-x)}{2} = 1$$

Dando a f en $x=-1$ el valor 1, la función es continua en ese punto.

b) Discontinuidad no evitable. Se da cuando no existe límite finito en a. La llamamos:

b.1 De primera especie (o de salto finito): cuando existen límites laterales distintos. Por ejemplo, la función Parte Entera en los puntos de abscisa entera o la función Signo en el origen.

b.2 De segunda especie: cuando alguno de los límites laterales no existe o es infinito. Por ejemplo, las funciones $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$, $g(x) = 1/x^2$ en el origen.

Ejercicios. Estudia la continuidad de las funciones siguientes en los puntos que se indican, definiendo el valor $f(a)$ en el caso de que la discontinuidad sea evitable.

1. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+2)}{2x+4}$, $a = -2$.
2. $g(x) = \dfrac{E(x)}{x}$, $a = 2$, donde $E(x)$ es la función Parte Entera de x.
3. $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $a = 1$.
4. $r(x) = e^{-1/x^2}$, $a = 0$.

4. Operaciones con funciones continuas

Sean $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continuas en I. A partir de las operaciones con límites, se demuestra la continuidad en I de:

1. $\lambda f + \mu g$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. $f \cdot g$
3. $1/g$, excepto en los puntos donde g se anula.

Como consecuencia de lo anterior, es continua la función polinómica $f(x) = P_k(x)$, así como el cociente $g(x) = \dfrac{P_k(x)}{Q_l(x)}$, salvo en los puntos en que se anula $Q_l(x)$.

5. Continuidad de las funciones elementales

A partir de la definición de las funciones elementales y de las operaciones con límites, se demuestra la continuidad en I de las siguientes funciones, en sus correspondientes intervalos:

1. x^a, $a \in \mathbb{R}$ en $(0, \infty)$ (para ciertos valores de a, el dominio puede ser mayor).
2. b^x, $b > 0$ en $\mathbb{R}$.
3. $\log_c x$, $c > 0$, $c \neq 1$ en $(0, \infty)$.
4. x^x en $(0, \infty)$.
5. $\operatorname{senh} x, \cosh x, \tanh x$ en $\mathbb{R}$.
6. $\operatorname{sen} x, \cos x$ en $\mathbb{R}$.
7. $\tan x$ en $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k-1)\dfrac{\pi}{2}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

6. Composición de funciones continuas

Sean las funciones f, continua en I y g, continua en J, tales que $f(I) \subset J$. En estas condiciones, se demuestra que "la función compuesta $g \circ f$ es continua en I".

Ejemplo. Sean $f(x) = \dfrac{1}{x}$, continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $g(x) = e^x$, continua en $\mathbb{R}$. Componiéndolas de las dos maneras posibles, obtenemos:

- La función $(g \circ f)(x) = e^y\big|_{y=\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- La función $(f \circ g)(x) = \left.\dfrac{1}{y}\right|_{y=e^x} = \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Nota. Obsérvese que el dominio de la función compuesta $g \circ f$ es la parte del dominio de f que cumple que los valores $f(x)$ forman parte del dominio de g.

$$D_{g \circ f} = \left\{x \in D_f \;/\; f(x) \in D_g\right\}$$

Aplicando la composición de funciones continuas a las funciones elementales vistas en el apartado anterior, podemos asegurar la continuidad, en los intervalos correspondientes, de funciones como $\operatorname{sen} \ln x$, $\arctan \sqrt{x}$, $e^{\cosh x}$, etc.

Ejercicios.

1. Sean $f(x) = \sqrt{x}$, continua en $[0, \infty)$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, continua en $\mathbb{R}$. Halla las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$. Comprueba que:

   - La función $g \circ f$ es continua en $[0, \infty)$.

   - La función $f \circ g$ es continua en $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$.

2. Sean $f(x) = |x|$, continua en $\mathbb{R}$ y $g(x) = \ln x$, continua en $(0, \infty)$. Halla las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$. Comprueba que:

   - La función $g \circ f$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   - La función $f \circ g$ es continua en $(0, \infty)$.

7. Teoremas de las funciones continuas

7.1. Teorema de Bolzano (o de los ceros)

Si una función continua en $[a, b]$ tiene distinto signo en los extremos del intervalo, se anula en algún punto intermedio.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua en $[a, b]$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Se cumple:

$$\boxed{\exists c \in (a, b) \ / \ f(c) = 0}$$

Demostración. Dividimos $[a, b]$ por la mitad. Si f es nula en el punto medio, ya está demostrado el teorema. De lo contrario, elegimos el semiintervalo $[a_1, b_1]$ en cuyos extremos f tiene distinto signo. Dividimos ahora $[a_1, b_1]$ por la mitad, eligiendo de nuevo el semiintervalo $[a_2, b_2]$ en cuyos extremos f tiene distinto signo.

Repitiendo la operación una y otra vez, obtenemos una sucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n]$, de longitud $(b - a)/2^n$ (ver T. III, apdo **3.3**). Cuando $n \to \infty$, esta sucesión define un punto c, en el que f ha de ser nula. En efecto, si f no es nula en c, al ser continua se cumplirá

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \neq 0$$

con lo que existirá un entorno de c en el que f toma el signo del límite (prop. 3 de los límites). Pero, por el modo como hemos hallado c, en todo entorno suyo existen puntos en que $f > 0$ y puntos en que $f < 0$. Luego, por reducción al absurdo, $f(c) = 0$.

7.2. Propiedad de Darboux (del valor intermedio)

Si una función continua en $[a, b]$ tiene distinto valor en los extremos del intervalo, toma todos los valores intermedios al menos una vez.

Supongamos $f(a) < f(b)$ (para $f(a) > f(b)$ se demuestra análogamente). Se cumple:

$$\boxed{\forall y \ / \ f(a) < y < f(b), \ \exists c \in (a, b) \ / \ f(c) = y}$$

Demostración. Definimos la función $g(x) = f(x) - y$. Se cumple

$$g(a) = f(a) - y < 0; \quad g(b) = f(b) - y > 0$$

Al tener g distinto signo en a y en b, existe un punto intermedio en el que se anula. Entonces

$$\exists c \in (a, b) \ / \ g(c) = f(c) - y = 0 \Longrightarrow f(c) = y$$

luego en ese punto la función f toma el valor y.

7.3. Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza en él un máximo y un mínimo.

Demostración. La realizamos en dos partes:

a) La función está acotada en $[a, b]$ (por reducción al absurdo). Suponemos que no lo está y dividimos $[a, b]$ por la mitad, elegiendo el semiintervalo $[a_1, b_1]$ en que f no está acotada (al menos no estará acotada en uno de ellos). Dividimos $[a_1, b_1]$ por la mitad, eligiendo de nuevo el semiintervalo $[a_2, b_2]$ en que f no está acotada.

Repitiendo la operación una y otra vez, obtenemos una sucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n]$, de longitud $(b-a)/2^n$. Cuando $n \to \infty$, esta sucesión define un punto c, tal que f no está acotada en ningún entorno suyo.

Pero, al ser f continua, ha de tener límite en c, luego ha de estar acotada en un entorno de dicho punto (prop. 2 de los límites), con lo que hemos llegado a una contradicción.

b) Al estar f acotada en $I = [a, b]$, el conjunto $f(I)$ tiene supremo M e ínfimo m (propiedad del supremo). Pero estos valores son alcanzados por f, por lo que **tiene máximo y mínimo** (lo vemos por reducción al absurdo para M):

Si f no alcanza el valor M, $f(x) - M$ no se anula y la función

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

es continua en I, luego está acotada como acabamos de ver. Entonces $\exists k > 0$ tal que, $\forall x \in I$,

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq k \implies \frac{1}{k} \leq M - f(x) \implies f(x) \leq M - \frac{1}{k}$$

Por lo tanto $M - 1/k$ (valor menor que M) es cota superior de f, luego M no es el supremo, contra la hipótesis.

7.4. Imagen de un intervalo cerrado

Una función continua transforma un intervalo cerrado en un intervalo cerrado.

Demostración. Por el teorema de Weierstrass, toda f, continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, alcanza en él un máximo M y un mínimo m.

Además, por la propiedad de Darboux, f alcanzará todos los valores comprendidos entre m y M. De este modo, el intervalo $[a, b]$ se transforma, por medio de f, en el intervalo cerrado $[m, M]$.

Si, además, la función es monótona, $[a, b]$ se transformará en $[f(a), f(b)]$ (si f es creciente) o en $[f(b), f(a)]$ (si es decreciente).

7.5. Imagen de un intervalo

Una función continua transforma un intervalo en un intervalo (J. Burgos, pg. 152).

Se demuestra que una función continua f transforma un intervalo I en otro $f(I)$. Éste tomará una las cuatro formas siguientes:

$$(\alpha, \beta), \; [\alpha, \beta], \; [\alpha, \beta), \; (\alpha, \beta]$$

donde α y β son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de la función f en I; es decir el ínfimo y el supremo del conjunto $f(I)$.

$$\alpha = \operatorname{ínf} f(I), \quad \beta = \sup f(I)$$

8. Continuidad uniforme

8.1. Definición

Vimos (apdo. **C.2**) que f es continua en I si lo es en todos sus puntos (si I contiene a sus extremos, en ellos la continuidad es lateral). Para obtener la condición de continuidad en I, usamos la condición de continuidad en un punto a, escribiendo x en lugar de a. Y en lugar del punto x ("suficientemente próximo" al a) usamos un $x' \in I$. Así, la condición de continuidad en I será:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,\big/\, |x' - x| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon \quad (x' \in I)}$$

Este valor δ depende en general de ε y también del punto x del intervalo, es decir

$$\delta = \delta(\varepsilon, x)$$

Cuando podemos expresar la condición de continuidad prescindiendo del punto x, de modo que el valor de δ depende sólo de ε decimos que la **continuidad** es **uniforme**. Entonces,

$$f \text{ uniformemente cont. en } I \Longleftrightarrow \boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,\big/\, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon}$$

Es decir, la continuidad es uniforme si la diferencia entre los valores de f en dos puntos depende exclusivamente de la distancia entre dichos puntos, independientemente de la posición de los mismos en el intervalo.

Ejemplo 1. Sea la función $y = ax + b$, $a > 0$. Calculamos la diferencia entre dos valores de la función y buscamos el valor de δ que asegure que esa diferencia sea menor que ε.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |ax_1 + b - (ax_2 + b)| = a\,|x_1 - x_2| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{a}$$

En este caso, si la distancia entre dos valores de la variable es menor que ε/a, la diferencia entre los correspondientes valores de f será menor que ε. Entonces, elegido un valor para ε, podremos calcular el δ necesario dividiendo ε entre a, con lo que nos hemos independizado de x y la continuidad será uniforme.

El ejemplo sugiere que si, a partir de $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, obtenemos una relación

$$|x_1 - x_2| < h(\varepsilon)$$

donde $h(\varepsilon)$ pueda hacerse independiente del punto x, podremos asegurar que la continuidad es uniforme tomando $\delta = h(\varepsilon)$. Esto es inmediato en el caso que acabamos de ver de una función cuya gráfica es una recta y la relación entre ε y δ es constante.

Ejemplo 2 . Estudiamos la función $y = 1/x$, continua (y no acotada) en $(0, \infty)$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1\, x_2}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1|\,|x_2|} < \varepsilon \Longleftrightarrow |x_1 - x_2| < \varepsilon\,|x_1|\,|x_2|$$

El producto $\varepsilon\,|x_1|\,|x_2|$, puede hacerse tan próximo a 0 como queramos tomando x_1, x_2 más y más pequeños. Eso hace que no podamos encontrar un valor $\delta > 0$ que permita asegurar que

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Por lo tanto la función estudiada no es uniformemente continua en $(0, \infty)$.

Los dos teoremas siguientes nos permiten justificar de modo sencillo que determinadas funciones son uniformemente continuas.

8.2. Teorema de Heine

"*Toda función f, continua en un intervalo cerrado I, es uniformemente continua en I*".

Ejemplo 1. Como vimos en el apartado anterior, la función $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua en $(0, \infty)$. Sin embargo, si consideramos un intervalo cerrado $[a, b]$, $a, b > 0$, resulta que existe un valor mínimo a de la variable x en el intervalo, de modo que la expresión $\varepsilon\,|x_1|\,|x_2|$ está acotada inferiormente

$$\varepsilon\,|x_1|\,|x_2| \geq \varepsilon\, a\, a = \varepsilon\, a^2$$

y podemos tomar este valor para δ. Entonces, si $|x_1 - x_2| < \delta$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1|\,|x_2|} < \frac{\varepsilon\, a^2}{|x_1|\,|x_2|} = \varepsilon\,\frac{a}{|x_1|}\frac{a}{|x_2|} \leq \varepsilon$$

con lo que se cumple la condición de continuidad, con δ dependiendo sólo de ε, luego existe continuidad uniforme.

Ejemplo 2. Como consecuencia del teorema, la función $y = \sqrt{x}$, continua en $[0, \infty)$, es uniformemente continua en cualquier intervalo $[0, k]$ (a pesar de tener tangente vertical en el origen).

8.3. Composición de funciones uniformemente continuas

Sean las funciones f y g tales que

$$f : I \to J; \quad g : U \to V$$

siendo $f(I) \subset U$, y ambas funciones uniformemente continuas en su dominio. Se cumple:
"*La función compuesta $g \circ f$ es uniformemente continua en I*".

D. Diferenciabilidad de funciones

1. Derivabilidad y diferenciabilidad

Gracias al concepto de derivada de una función podemos obtener la ecuación de la tangente a una curva, calcular la velocidad de un móvil o hallar los extremos de una función. A partir de las derivadas sucesivas de una función obtendremos su desarrollo de Taylor, que nos permitirá aproximar el valor de la función en los alrededores de un punto. El concepto de diferencial es fundamental para la obtención de primitivas y las distintas aplicaciones del cálculo integral: obtención de áreas, volúmenes y longitudes de curvas por integración, entre otras muchas.

1.1. Función derivable

a) Definición. Sea $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Decimos que f es derivable en $a \in I$ si y sólo si existe y es finito el siguiente límite, que llamamos derivada de f en a:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)} \tag{1}$$

En caso contrario, decimos que f no es derivable en a.

Forma alternativa. Haciendo $x - a = h \Longrightarrow x = a + h$, el límite de la condición de derivada toma la forma

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)}$$

Ejemplo. La derivada de $f(x) = x^3$ en $a = 1$ es

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

Ejercicio. Obtén la derivada de $f(x) = x^3$, en $a = 1$, de la segunda forma.

b) Derivadas laterales. Si en la condición de derivada (1) existe el límite lateral en a^+ o en a^-, se le llama derivada en a por la derecha o por la izquierda respectivamente, $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$. Se cumple que f *es derivable en a si y sólo si sus derivadas laterales existen y coinciden en a.*

c) Límite infinito. Si el límite (1) es $\pm\infty$ y la función es continua en a, decimos que f tiene **tangente vertical** en a. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x}$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = +\infty$$

d) Punto anguloso. Si existen $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$ y son distintos, se trata de un punto anguloso. Por ejemplo, $f(x) = |x|$ tiene uno en el origen.

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1; \quad f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

e) Función derivada. Si existe $f'(x) \, \forall x \in I$, decimos que f es derivable en el intervalo I. En este caso $f'(x)$ es la función derivada. Si se trata de un intervalo $I = [a, b]$, f es derivable en I si lo es en (a, b), en a^+ y en b^-.

Para obtener la derivada en un punto x genérico, utilizamos la segunda forma de obtención, usando x y $x+h$ en lugar de a y $a+h$. Por ejemplo, para derivar $f(x) = x^2$, hacemos lo siguiente:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

Ejercicio. Obtén por el mismo método la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

1.2. Función diferenciable

Al estudiar una función en las proximidades de un punto a, analizamos el incremento de su valor entre los puntos a y $a + \Delta x$, cuando Δx es muy pequeño. En muchas funciones este incremento es "casi" proporcional a Δx, es decir

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \approx c\,\Delta x$$

siendo $c \in \mathbb{R}$. En estos casos, la gráfica de f se aproxima bien por una recta en un entorno de a.
Expresando más formalmente lo anterior, decimos que $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ es **diferenciable en** $a \in I$ **si y sólo si**

$$\Delta f = c\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\,\Delta x,\ \ c \in \mathbb{R} \quad \Big(\text{siendo } \lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0\Big) \tag{2}$$

En la condición anterior, $\varepsilon(\Delta x)$ representa una expresión que tiende a 0 cuando lo hace Δx, por lo que el segundo sumando de Δf tiende a 0 más rápidamente que el primero.
Cuando Δx es muy pequeño, $\varepsilon(\Delta x)\Delta x$ es despreciable frente a $c\,\Delta x$ lo que hace que el incremento de la función venga expresado con mucha aproximación por el valor de $c\,\Delta x$. La expresión $\varepsilon(\Delta x)$ puede ser, por ejemplo $(\Delta x)^{1/2}$, $(\Delta x)^2$, etc.
Escribiendo Δx como $x - a$ en (2), la condición de diferenciabilidad de f en a pasa a ser

$$\boxed{f(x) - f(a) = c\,(x-a) + \varepsilon(x-a)(x-a)} \tag{3}$$

Si f es diferenciable en a, llamamos **diferencial de** f **en** a al producto $c\,(x-a)$.

1.3. Relación entre ambos conceptos

"Una función es diferenciable en un punto si y sólo si es derivable en dicho punto".

Demostración. La haremos sólo de izquierda a derecha. Veremos que, si f es diferenciable, es derivable y obtendremos el valor del coeficiente de proporcionalidad c. En efecto, si f cumple la condición de diferenciabilidad,

$$f(x) - f(a) = [c + \varepsilon(x-a)](x-a) \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} (c + \varepsilon(x-a)) = c$$

con lo que c es la derivada $f'(a)$ y la diferencial de f en a se convierte en $df(a) = f'(a)(x-a)$.
La **condición de diferenciabilidad** (3) toma entonces la forma que usaremos habitualmente:

$$\boxed{f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon(x-a)(x-a)} \tag{4}$$

Observamos que el primer sumando de la derecha es la diferencial de f en a, proporcional a $(x-a)$, por lo que es un infinitésimo de $(x-a)$. El segundo es el producto de $(x-a)$ por otro factor que también tiende a 0 con $(x-a)$, por lo que es un infinitésimo de mayor orden que $(x-a)$. Esto último se denota

$$\varepsilon(x-a)(x-a) = \circ(x-a)$$

Y la condición de diferenciabilidad se convierte en

$$\boxed{\Delta f = df(a) + \circ(x-a)} \quad \left(\text{siendo } \lim_{x \to a} \frac{\circ(x-a)}{x-a} = 0\right) \tag{5}$$

Diferencial de la variable. A partir de lo anterior, calculamos la diferencial de x, es decir la diferencial de la función $f(x) = x$.

$$dx = df|_{f(x)=x} \Longrightarrow dx = x'(x-a) = x - a$$

que nos dice que **la diferencial de la variable es el incremento de la misma**.
Sustituyendo lo anterior en la expresión de la diferencial, queda

$$\boxed{df(a) = f'(a)\, dx} \Longrightarrow \boxed{f'(a) = \frac{df(a)}{dx}}$$

lo que nos permite expresar la derivada de f como cociente de diferenciales.

1.4. Interpretación gráfica

Como acabamos de ver, el incremento de la función entre a y x se descompone en dos sumandos, $\Delta f = df(a) + \circ(x-a)$, lo que interpretamos gráficamente en la siguiente figura.

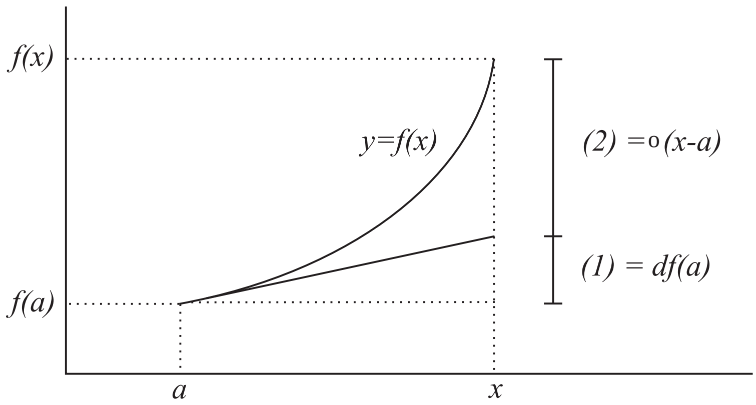

Figura 3: Interpretación gráfica de la diferencial.

Sabemos que $f'(a)$ es el valor de la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$. Dicha recta pasa por el punto $\big(a, f(a)\big)$ con pendiente $f'(a)$, por lo que su ecuación es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

Entonces, el producto de $f'(a)$ por $(x-a)$, es decir $df(a)$, es la longitud del segmento *(1)*, por lo que la longitud del segmento *(2)*, cuyo valor es $\Delta f - df(a)$, representa el sumando $\circ(x-a)$. Como se aprecia en la figura, este término puede tener mucha más importancia que $df(a)$ cuando estamos a una cierta distancia de a, pero al acercarnos al punto, se va haciendo despreciable respecto a $df(a)$.

Es decir, el Δf y la df tienden a confundirse cuando $x \to a$, pues son infinitésimos equivalentes, mientras que su diferencia $\circ(x-a)$ es un infinitésimo de orden superior.

Geométricamente, la diferencial de f es el incremento de la ordenada de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, cuando la variable se incrementa un valor $x - a$.

Lo anterior hace que el comportamiento de la curva, en las proximidades del punto esté bien descrito por la recta tangente, como se afirmaba en **1.2**.

1.5. Relación entre continuidad y diferenciabilidad

"Toda función diferenciable en un punto es continua en dicho punto". En efecto, si f es diferenciable en a, por la condición de diferenciabilidad (4) (apdo. **1.3**) resulta

$$f(x) = f(a) + [f'(a) + \varepsilon(x-a)](x-a) \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

luego f es continua en a.

La recíproca no es cierta. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pero tiene un punto anguloso en el origen, por lo que no es diferenciable en dicho punto.

1.6. Operaciones con funciones diferenciables

Las derivadas de suma, producto y cociente de funciones derivables se suponen conocidas. A partir de ellas, se comprueba que la diferenciación sigue las mismas reglas.

a) $d(f+g) = (f+g)'\,dx = (f'+g')\,dx = f'dx + g'dx = df + dg$

b) $d(f\cdot g) = (f\cdot g)'\,dx = (f'g + fg')\,dx = f'g\,dx + fg'dx = g\,df + f dg$

Ejercicio. Obtén la diferencial del cociente f/g.

2. Regla de la cadena. Aplicaciones

2.1. Derivada de la función compuesta

Sean $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{F}(J,\mathbb{R})$, tales que $f(I) \subset J$. Se cumple que: *Si f es derivable en $a \in I$ y g es derivable en $b = f(a) \in J$, entonces la función compuesta $\phi(x) = g\big(f(x)\big)$ es derivable en a.* Su derivada vale

$$\boxed{\phi'(a) = g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a)} \quad \text{o también} \quad \boxed{\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dg}{dy}\right|_{y=f(a)} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}}$$

Demostración. Partimos de las condiciones de diferenciabilidad de f y g en $x = a$ e $y = b$ respectivamente:

$$f(x) - f(a) = [f'(a) + \varepsilon_f(x-a)]\,(x-a), \quad \text{siendo } \lim_{x\to a}\varepsilon_f = 0 \tag{6}$$

$$g(y) - g(b) = [g'(b) + \varepsilon_g(y-b)]\,(y-b), \quad \text{siendo } \lim_{y\to b}\varepsilon_g = 0 \tag{7}$$

En la condición (7) aparecen $g(y)$, $g(b)$ y el factor $(y-b)$. Hacemos $y = f(x)$ y $b = f(a)$, obteniendo

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big) = \Big[g'\big(f(a)\big) + \varepsilon_g\big(f(x) - f(a)\big)\Big]\big(f(x) - f(a)\big) \tag{8}$$

Tomamos el valor de $f(x) - f(a)$ de la condición (6) y lo sustituimos en la (8), quedando un producto de corchetes, en los que omitimos las dependencias de ε_f y ε_g. Operando, resulta

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big) = \Big[g'\big(f(a)\big) + \varepsilon_g\Big]\Big[f'(a) + \varepsilon_f\Big](x-a) =$$

$$\Big[g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a) + g'\big(f(a)\big)\cdot\varepsilon_f + \varepsilon_g\cdot f'(a) + \varepsilon_g\cdot\varepsilon_f\Big](x-a)$$

Cuando $x \to a$, $f(x) \to f(a)$ por continuidad, por lo que, tanto ε_f como ε_g, tienden a 0. Entonces los sumandos 2º, 3º y 4º del corchete son expresiones del tipo $\varepsilon(x-a)$, que agrupamos. Resulta

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big) = \big[g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a) + \varepsilon(x-a)\big]\,(x-a), \quad \text{siendo } \lim_{x\to a} \varepsilon(x-a) = 0$$

El primer sumando del corchete constituye la derivada de la función compuesta, formada por el producto de las derivadas de g con respecto a y, en $y = f(a)$, y de f con respecto a x en a. Si $g\big(f(x)\big) = \phi(x)$, resulta la condición de diferenciabilidad de ϕ en a:

$$\phi(x) - \phi(a) = \left[\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=a} + \varepsilon(x-a) \right] (x-a),$$

siendo

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dg}{dy}\right|_{y=f(a)} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

Si lo anterior se cumple $\forall x \in I$, la función compuesta $\phi(x) = g(f(x))$ es diferenciable en x, $\forall x \in I$, siendo su función derivada

$$\boxed{\frac{d\phi}{dx} = \left.\frac{dg}{dy}\right|_{y=f(x)} \cdot \frac{df}{dx}}$$

lo que se conoce como **regla de la cadena**.

2.2. Aplicaciones de la regla de la cadena

Las funciones elementales principales son derivables en su dominio. Suponemos conocidas las derivadas de las funciones logaritmo, potencia y exponencial de x, así como el seno, el coseno y la tangente, tanto trigonométricos como hiperbólicos. A partir de ellas vamos a obtener las derivadas de algunas funciones compuestas.

a) $\phi(x) = \ln u(x)$. Sabiendo que $(\ln x)' = 1/x$,

$$\phi' = \frac{1}{u}\,u' \Longrightarrow \boxed{\Big(\ln u(x)\Big)' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

b) $\phi(x) = u^m(x)$. Sabiendo que $(x^m)' = m\,x^{m-1}$,

$$\phi' = m\,u^{m-1}u' \Longrightarrow \boxed{\Big(u^m(x)\Big)' = m\Big(u(x)\Big)^{m-1} u'(x)}$$

c) $\phi(x) = a^{u(x)}$, $a > 0$. Sabiendo que $(a^x)' = a^x \ln a$,

$$\phi' = a^u \ln a\, u' \Longrightarrow \boxed{\Big(a^{u(x)}\Big)' = a^{u(x)} \ln a\, u'(x)}$$

d) $\phi(x) = \Big(u(x)\Big)^{v(x)}$. Tomando logaritmos, $\ln \phi(x) = v(x) \ln u(x)$. Derivando

$$\frac{\phi'}{\phi} = v' \ln u + v\,\frac{u'}{u} \Longrightarrow \phi' = u^v \left(v' \ln u + v\,\frac{u'}{u} \right) = u^v \ln u\, v' + v\, u^{v-1} u'$$

que podemos interpretar como la suma de dos derivadas de u^v: en la primera se considera constante a u y en la segunda a v.

Ejemplos.

1. $\left(x^x\right)' = x\, x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1+\ln x)$.

2. $\left(\operatorname{sen}\sqrt{\ln\cos x}\right)' = \cos\sqrt{\ln\cos x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{\ln\cos x}}\,\dfrac{1}{\cos x}\,(-\operatorname{sen} x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\sqrt{\ln\cos x}\,\tan x}{\sqrt{\ln\cos x}}$.

Ejercicios. Obtén las derivadas de $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ y $g(x) = \arctan\left(\tan^3\dfrac{1}{x}\right)$.

3. Derivada de la función inversa

3.1. Existencia de la función inversa

Teorema. *Si f es continua y biyectiva. entonces existe su función inversa f^{-1} y es también continua y biyectiva.*

Ejemplo. La función $f(x) = x^2$, continua en $\mathbb{R}$, es biyectiva en $[0,k]$, $k \in \mathbb{R}$, luego tiene función inversa. Para obtenerla, despejamos x en función de y

$$y = f(x) = x^2 \Longrightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Luego la inversa de la función "cuadrado" es la función "raíz cuadrada", que expresamos en la forma habitual, usando como variable la x:

$$f(x) = x^2 \Longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Es decir, para calcular la función inversa de una dada $y = f(x)$, despejamos x en función de y y, a continuación, permutamos x e y en la fórmula obtenida.

3.2. Derivada de la función inversa

Sea f^{-1} la función inversa de f en un intervalo I. Veremos que, si f tiene en I derivada $f' \neq 0$, entonces f^{-1} tiene también derivada en I y se cumple que *la derivada de f^{-1} es el inverso de la derivada de f.*

$$\boxed{\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)\big|_{y=f^{-1}(x)}}}$$

Demostración. Sea una función f, de inversa f^{-1}, cuya derivada queremos obtener. Para ello, 1) despejamos x en función de y; 2) derivamos en ambos lados respecto a x, aplicando la regla de la cadena; 3) despejamos $y'(x)$, es decir $\left(f^{-1}(x)\right)'$, escribiendo y en función de x en $f'(y)$:

$$y = f^{-1}(x) \Longrightarrow x = f(y) \overset{\prime}{\Longrightarrow} 1 = f'(y)\, y'(x) \Longrightarrow y'(x) = \frac{1}{f'(y)\big|_{y=f^{-1}(x)}}$$

Ejemplo. A partir de la función seno, definimos su función inversa $y = \operatorname{arc\,sen} x$; despejamos x en función de y y derivamos:

$$y = f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x \Longrightarrow x = f(y) = \operatorname{sen} y \overset{\prime}{\Longrightarrow} 1 = \cos y\, y'$$

Despejamos ahora y' y escribimos el resultado en función de x:

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow \boxed{(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Ejercicio. Obtén la derivada de la función $\arctan x$.

4. Teoremas del valor medio

4.1. Teorema de Rolle

Sea $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, se cumple:

$$\boxed{\exists \xi \in (a, b) \ / \ f'(\xi) = 0}$$

Demostración. Por el teorema de Weierstrass sabemos que, al ser f continua en $I = [a, b]$, alcanza en I un máximo y un mínimo, es decir

$$\begin{aligned} \exists\, x_M \in [a, b] \,\big/\, M &= f(x_M) \geq f(x)\ \forall x \in [a, b] \\ \exists\, x_m \in [a, b] \,\big/\, m &= f(x_m) \leq f(x)\ \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

Si el máximo y mínimo coinciden, al estar todos los valores de f comprendidos entre ambos, la función f es constante y su derivada nula con lo que se cumple el teorema. En general, M será mayor que m y distinguimos dos casos:

a) El máximo se alcanza en un punto interior de $[a, b]$.

Como f es derivable en (a, b), calculamos la derivada en x_M^+. Observamos que el numerador es menor o igual que 0 y el denominador positivo, luego el cociente es menor o igual que 0 y su límite también lo será.

$$f'(x_M^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \leq 0$$

Calculando la derivada en x_M^-, vemos que el numerador sigue siendo menor o igual que 0, pero ahora el denominador es negativo luego el cociente es mayor o igual que 0 y su límite también lo será.

$$f'(x_M^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \geq 0$$

Como f es derivable en x_M, ambas derivadas deben coincidir, luego

$$f'(x_M^+) = f'(x_M^-) = 0$$

b) El máximo se alcanza en los extremos.

Como el máximo y el mínimo se alcanzan en distinto punto, el mínimo se alcanzará en el interior. Calculamos las derivadas laterales en x_m, observando que ahora los numeradores son mayores o iguales a 0. Obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(x_m^+) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_m + h) - f(x_m)}{h} \geq 0 \\ f'(x_m^-) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_m + h) - f(x_m)}{h} \leq 0 \end{aligned}$$

Ambas derivadas deben coincidir, luego

$$f'(x_m^+) = f'(x_m^-) = 0$$

Concluimos que al menos un extremo se alcanza en un punto interior y, en él, $f' = 0$.

Ejercicio. La función $f(x) = 1 - x^{2/3}$ se anula en $x = \pm 1$. Razona si es posible aplicarle el teorema en el intervalo $[-1, 1]$.

4.2. Teorema de Cauchy

Sean $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Se cumple:

$$\boxed{\exists \xi \in (a,b) \ / \ f'(\xi)[g(b)-g(a)] = g'(\xi)[f(b)-f(a)]}$$

Si además $g(b) \neq g(a)$ y g' y f' no se anulan a la vez, entonces

$$\boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

Demostración. A partir de f y g definimos la función F, que será también continua y derivable.

$$F(x) = f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)]$$

Se cumple $F(a) = F(b)$ (compruébese), por lo que F cumple las condiciones del teorema de Rolle. Entonces

$$\exists \xi \in (a,b) \ / \ F'(\xi) = 0 \Longrightarrow f'(\xi)[g(b)-g(a)] = g'(\xi)[f(b)-f(a)]$$

lo que demuestra la primera expresión del teorema.

Si el factor $g(b)-g(a)$ no se anula, puede pasar al otro lado dividiendo, lo que nos permite asegurar que $g'(\xi) \neq 0$. En efecto, si $g'(\xi)$ fuera nula, $f'(\xi)$ también lo sería y f' y g' se estarían anulando a la vez, contra la hipótesis.

Entonces, pasando $g'(\xi)$ a la izquierda, obtenemos la expresión buscada

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

4.3. Teorema de Lagrange o de los incrementos finitos

Sea $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces:

$$\boxed{\exists \xi \in (a,b) / f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Si $b-a=h$ entonces $b=a+h$ y podemos escribir la expresión anterior como

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h), \ 0 < \theta < 1}$$

Demostración. Se trata de un caso particular del teorema anterior, haciendo $g(x) = x$.

Interpretación geométrica. El teorema afirma que, si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), existe un punto c en (a,b) tal que la tangente en c es paralela a la secante que pasa por los puntos $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$.

4.4. Funciones monótonas derivables

Sea $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, derivable en I. Se cumple:

a) $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in I \Longleftrightarrow f$ *es monótona creciente en I.*

b) $f'(x) \leq 0, \ \forall x \in I \Longleftrightarrow f$ *es monótona decreciente en I.*

c) $f'(x) > 0, \ \forall x \in I \Longrightarrow f$ *es estrictamente creciente en I.*

d) $f'(x) < 0, \ \forall x \in I \Longrightarrow f$ *es estrictamente decreciente en I.*

Demostración del caso a) (los demás se demuestran análogamente).

($\rightarrow$) Dados dos puntos cualesquiera de I, aplicamos el teorema de Lagrange al intervalo $[x_1, x_2]$:

$$\forall x_1, x_2 \in I \;/\; x_1 < x_2 \Longrightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) \;/\; f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in I$, entonces $f'(\xi) \geq 0$ con lo que $f(x_2) \geq f(x_1)$, por lo que la función f es monótona creciente.

($\leftarrow$) Dados dos puntos x, $x + h$, con $h > 0$, al ser f creciente, se cumple:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \Longrightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

En los casos c) y d) no se da la equivalencia ya que la implicación no tiene por qué cumplirse de derecha a izquierda. Aunque el cociente entre Δf y h sea estrictamente mayor o menor que 0, el límite puede ser igual a 0 y con él la derivada. Por ejemplo, las funciones $y = \pm x^3$ son estrictamente monótonas, pero su derivada en el origen es 0.

4.5. Funciones constantes

Sea $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, derivable en I. Se cumple:

$$\boxed{f'(x) = 0,\ \forall x \in I \Longleftrightarrow f(x) = K,\ \forall x \in I}$$

Demostración.

($\rightarrow$) De nuevo aplicamos el teorema de Lagrange a dos puntos cualesquiera del intervalo:

$$\forall x_1, x_2 \in I \Big/ x_1 < x_2 \Longrightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) \;/\; f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x) = 0\, \forall x \in I$, se cumplirá $f'(\xi) = 0$ por lo que $f(x_2) = f(x_1)$. Luego f es constante.

($\leftarrow$) Si f es constante, su derivada es nula.

Corolario. Si $f' = g' \Rightarrow f = g + K$. Es decir, si f y g son primitivas de la misma función, su diferencia es una constante.

Demostración. Sea $\phi = f - g$. Entonces, por la propiedad que acabamos de ver,

$$\phi' = f' - g' = 0 \Longrightarrow \phi = K \Longrightarrow f - g = K$$

5. La derivada como límite de derivadas

Sea una función continua $f : I \to \mathbb{R}$, de la que obtenemos su derivada f' en un punto genérico. Si f' existe $\forall x \in I$, decimos que f es derivable en I y f' es su función derivada.

En el caso de que no exista f' en un punto $a \in I$ pero sí su límite cuando $x \to a$, la función será derivable también en a.

Podemos demostrarlo comprobando que en a coinciden las derivadas laterales de f con los límites laterales de f', de donde deduciremos la existencia de la derivada de f en a, si existe límite de f' en a. Estudiamos el límite por la derecha.

Derivada por la derecha. Sea $f : I \to \mathbb{R}$, definida en $I = [a, a+\delta)$. Si f es continua en I, derivable en $I \setminus \{a\}$ y tal que $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$, entonces f es derivable en a^+ y se cumple

$$\boxed{f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} f'(x)}$$

Demostración. Sea $[a, a+h]$, $0 < h < \delta$. Aplicando a f el teorema de los incrementos finitos

$$\exists \xi \in (a, a+h) \ / \ \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(\xi)$$

Si $h \to 0^+$, entonces $a+h \to a^+$ y el punto intermedio $\xi \to a^+$. Tomando límites,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\xi\to a^+} f'(\xi)$$

Pero si $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ existe y vale l, existirá $\lim\limits_{\xi\to a^+} f'(\xi)$ y valdrá lo mismo, con lo que

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = l \Longrightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l \Longrightarrow f'(a^+) = l$$

Así pues, si existe el límite de f' en a^+, coincide con la derivada de f en a^+.

Por otra parte, estudiando el límite de f' en a^-, se comprueba también que -si existe- coincide con la derivada de f en a^-. Luego, si existen los límites laterales de f', coinciden con las derivadas laterales de f y podemos concluir lo siguiente.

Derivada en a. Si f está definida en un entorno de a y existe el límite de f' en a, existen y coinciden los límites de f' en a^+ y en a^-. Al ser cada uno igual a la correspondiente derivada lateral, existirán (y coincidirán) los valores de $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$, y la función será derivable en a.

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = f'(a^-), \Longrightarrow \boxed{f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)}$$

Este resultado es útil para calcular la derivada de f en un punto a, cuando f se define en a de modo independiente a su expresión en el resto del intervalo (por ejemplo, debido a que dicha expresión no tiene sentido en a).

Ejemplo. Hallar la derivada en el origen de $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

La derivada para $x \neq 0$ es $f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x}$, que no está definida en $x = 0$. Sin embargo, puesto que f' tiene límite en ese punto

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$$

Nota. La existencia de límite de f' es condición suficiente para la existencia de la derivada de f, pero no necesaria. Aunque $f'(x)$ no tenga límite en a, es posible que f sea derivable en a.

Ejercicio. Compruébese (obteniendo $f'(0)$ por la definición) que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

es derivable en el origen, pero su función derivada no tiene límite cuando $x \to 0$.

6. Reglas de L'hôpital

Los teoremas que se enuncian a continuación permiten resolver algunos límites en forma de cociente, del tipo $0/0$ e ∞/∞, a partir de la fórmula del valor medio de Cauchy. Los enunciaremos para límites laterales en $a, b \in \mathbb{R}$, pero **son válidos también cuando** $x \to \pm\infty$.

Sean f y g derivables en (a, b), siendo $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ o bien $\gamma = \pm\infty$.

a) Si f y g se anulan en a y son continuas en a^+, es decir

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = 0; \quad \lim_{x\to a^+} g(x) = g(a) = 0,$$

se cumple

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \Longrightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma}$$

b) Si f y g se anulan en b y son continuas en b^-, es decir

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) = 0; \quad \lim_{x\to b^-} g(x) = g(b) = 0,$$

se cumple

$$\boxed{\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \Longrightarrow \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma}$$

c) Si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$, se cumple

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \Longrightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma}$$

d) Si $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = \pm\infty$, se cumple

$$\boxed{\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \Longrightarrow \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma}$$

En los cuatro casos, si existe el límite del cociente de derivadas, existe el del cociente de funciones y toma el mismo valor.

El teorema se ha enunciado para límites laterales. En el caso (habitual) de que busquemos el límite en un punto c cualquiera de un intervalo, consideraremos un intervalo a la derecha y otro a la izquierda de c, $(c, c+\delta)$ y $(c-\delta, c)$. Si en c existe el límite del cociente de derivadas, existirán los límites laterales en c^+ y en c^-, por lo que, aplicando el teorema en ambos intervalos, resulta:

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \Longrightarrow \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to c^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \Longrightarrow \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \end{array} \right\} \Longrightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$

El hecho de que no exista el límite del cociente de derivadas no supone que no pueda existir el del cociente de funciones buscado. Asimismo, si el límite del cociente de derivadas sigue siendo indeterminado, puede volverse a aplicar L'hôpital, si se siguen cumpliendo las condiciones del teorema para el cociente f'/g' (se muestran ejemplos de ambos casos en un documento de apoyo).

Demostración para el caso a). (Indeterminación tipo 0/0, con límite en a^+).

Dado (a,b), elegimos un $x \in (a,b)$ cualquiera. Se cumple:

1. $g' \neq 0$ en (a,x) pues se cumple en (a,b) por hipótesis.

2. $g(x) \neq g(a)$ pues, si fuera $g(x) = g(a)$, por el teorema de Rolle existiría un $\xi \in (a,x)$ tal que se anularía $g'(\xi)$, lo cual no puede ocurrir por hipótesis.

Entonces, por el Teorema de Cauchy, existirá un $\xi \in (a,x)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

por ser nulas f y g en a. Es decir, el cociente de funciones en el punto x vale lo mismo que el de derivadas en un punto $\xi \in (a,x)$.

Como la igualdad se verifica $\forall x \in (a,b)$, tomamos límites cuando $x \to a^+$. Al ser $\xi \in (a,x)$, si $x \to a^+$, también se cumplirá $\xi \to a^+$, por lo que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Entonces, si existe límite del cociente de $f'(x)$ y $g'(x)\,(x \to a^+)$, existirá y valdrá lo mismo el del cociente de $f'(\xi)$ y $g'(\xi)\,(\xi \to a^+)$, de donde:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \Longrightarrow \lim_{\xi \to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \gamma \Longrightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$

Ejemplo. Calculamos el límite del cociente de $\ln x$ y $\operatorname{sen}(x-1)$ cuando $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\operatorname{sen}(x-1)} \overset{\text{Si}\,\exists}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)'}{[\operatorname{sen}(x-1)]'} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{\cos(x-1)} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

7. Derivadas sucesivas

Si una función f es derivable en el intervalo I, podemos calcular la expresión f' de su derivada en un punto genérico. Entonces decimos que f' es la **función derivada primera de f en I.**

Si existe la derivada de la función f' en $a \in I$, se le llama derivada segunda de f en a, $f''(a)$. Y si esto ocurre en x, $\forall x \in I$, $f''(x)$ será la **función derivada segunda de f en I.**

Generalizando lo anterior, obtenemos la **función derivada n-ésima de f**, que expresamos como $f^{(n}$ o en la forma alternativa $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

$$\begin{aligned}
f' &= \frac{df}{dx} \\
f'' &= \frac{d}{dx}(f') = \frac{d^2 f}{dx^2} \\
f''' &= \frac{d}{dx}(f'') = \frac{d^3 f}{dx^3} \\
&\vdots \\
f^{(n} &= \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}\right) = \frac{d^n f}{dx^n}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1. Función exponencial $y = a^{px}$, $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' &= a^{px}\, p \ln a \\ y'' &= a^{px}\, p^2 (\ln a)^2 \\ &\vdots \\ y^{(n} &= a^{px}\, p^n (\ln a)^n \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Función $y = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ y'' &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right) \\ &\vdots \\ y^{(n} &= \operatorname{sen}\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Potencia de un binomio $y = (ax+b)^m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Distinguimos tres casos: m mayor, menor o igual que 0.

a) $m > 0$, es decir potencia de exponente natural.

$$\begin{aligned} y' &= m\,(ax+b)^{m-1}\, a \\ y'' &= m\,(m-1)\,(ax+b)^{m-2}\, a^2 \\ &\vdots \\ y^{(n} &= \begin{cases} m\,(m-1)\cdots(m-n+1)\,(ax+b)^{m-n}\, a^n & n \le m \\ 0 & n > m \end{cases} \end{aligned}$$

Observamos que la derivada m-ésima es constante y las siguientes son nulas.

b) $m < 0$. En este caso, el exponente $m - n$ no llega a anularse, por lo que la derivada no llega a ser constante, como en el caso anterior. Entonces

$$y^{(n} = m\,(m-1)\cdots(m-n+1)\,(ax+b)^{m-n}\, a^n,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

c) $m = 0$. En este caso, la función es constante y sus derivadas nulas.

Caso particular. A partir de la potencia de un binomio con $m \in \mathbb{Z}^-$, obtenemos la derivada n-ésima de $y = 1/(x-c)$. Para ello, haciendo en la fórmula (9) $m = -1$, $a = 1$, $b = -c$, resulta:

$$\left(\frac{1}{x-c}\right)^{(n} = (-1)\,(-2)\cdots(-1-n+1)\,(x-c)^{-1-n} = \frac{(-1)^n\, n!}{(x-c)^{n+1}}$$

Ejercicio. Obtén la derivada n-ésima de la función f dada por un cociente de polinomios:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$$

cuyo resultado es

$$f^{(n}(x) = (-1)^n\, n! \left[\frac{5}{(x-2)^{n+1}} - \frac{2}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

8. Desarrollos limitados de Taylor y MacLaurin

Nuestro objetivo es aproximar una función f cerca de un punto a por medio de un polinomio, de modo que la aproximación sea mejor cuantos más términos tenga el polinomio. Para ello, obtendremos el polinomio cuyas sucesivas derivadas en a coinciden con las de la función.

8.1. Desarrollo limitado de Taylor de orden n

Sea una función $f(x)$, n veces derivable en a, lo que equivale a decir $n-1$ veces derivable en un entorno U_a de a y n veces en a.

a. Polinomio de Taylor de grado n en a

Tomamos un polinomio de grado n y coeficientes indeterminados, en potencias de $(x-a)$.

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \ldots \alpha_n(x-a)^n$$

Para identificar los coeficientes, calcularemos sus derivadas sucesivas, igualándolas a las correspondientes derivadas de $f(x)$ en a. Es decir

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \quad P_n''(a) = f''(a), \quad \ldots \quad P_n^{(n}(a) = f^{(n}(a) \tag{10}$$

Así pues

$$\begin{array}{rcl}
P_n(x) & = & \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n \qquad \Longrightarrow P_n(a) = \alpha_0 = f(a) \\
P_n'(x) & = & \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \cdots + n\,\alpha_n(x-a)^{n-1} \qquad \Longrightarrow P_n'(a) = \alpha_1 = f'(a) \\
P_n''(x) & = & 2\alpha_2 + \cdots + n(n-1)\,\alpha_n(x-a)^{n-2} \Longrightarrow P_n''(a) = 2\alpha_2 = f''(a) \Longrightarrow \alpha_2 = 1/2 f''(a) \\
 & \vdots & \\
P_n^{(n}(x) & = & n(n-1)\cdots 1\cdot\alpha_n = n!\,\alpha_n \Longrightarrow P_n^{(n}(a) = n!\,\alpha_n = f^{(n}(a) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_n = \frac{1}{n!}f^{(n}(a)}
\end{array}$$

con lo que obtenemos el polinomio de Taylor de grado n en a:

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots \frac{f^{(n}(a)(x-a)^n}{n!}}$$

b. Término complementario

Es la diferencia entre $f(x)$ y $P_n(x)$. Será derivable tantas veces como lo sea f.

$$\boxed{T_n(x) = f(x) - P_n(x)} \tag{11}$$

c. Orden de aproximación

El término complementario es el error cometido al tomar $P_n(x)$ como valor de $f(x)$ y es un **infinitésimo de mayor orden que** $(x-a)^n$, es decir que el cociente de ambos tiende a 0, cuando $x \to a$.

Demostración. Teniendo en cuenta la igualdad (10) de las derivadas de f y $P_n(x)$ y la definición de $T_n(x)$ (11), resultan nulas sus n primeras derivadas en a:

$$\left.\begin{array}{r}
P_n(a) - f(a) = P_n'(a) - f'(a) = \ldots = P_n^{(n}(a) - f^{(n}(a) = 0 \\[2ex]
T_n^{(k}(x) = f^{(k}(x) - P_n^{(k}(x), \; k = 0, 1, \ldots, n
\end{array}\right\} \Rightarrow T_n(a) = T_n'(a) = \cdots = T_n^{(n}(a) = 0$$

Entonces calculamos el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{T_n(x)}{(x-a)^n}$$

que es una indeterminación de tipo $0/0$. Aplicando la regla de L'hôpital, las derivadas de numerador y denominador tienen también límite nulo y obtenemos otra indeterminación del mismo tipo. Repitiendo el proceso $n-1$ veces resulta:

$$\lim_{x\to a} \frac{T_n(x)}{(x-a)^n} \overset{\text{Si } \exists}{=} \lim_{x\to a} \frac{T_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \overset{\text{Si } \exists}{=} \lim_{x\to a} \frac{T_n''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} \overset{\text{Si } \exists}{=} \cdots \overset{\text{Si } \exists}{=} \lim_{x\to a} \frac{T_n^{n-1}(x)}{n!(x-a)} \tag{12}$$

Hemos supuesto que f es $n-1$ veces derivable en U_a, luego no podemos derivar $T_n^{n-1}(x)$ fuera de a. Sin embargo, puesto que $T_n^{(n-1}(a)$ es nulo, lo restamos en el numerador, obteniendo la derivada de $T_n^{n-1}(x)$ en a, que es también nula:

$$\lim_{x\to a} \frac{T_n^{n-1}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{T_n^{n-1}(x) - T_n^{n-1}(a)}{(x-a)} = \frac{T^{(n}(a)}{n!} = 0 \tag{13}$$

Entonces, teniendo en cuenta (12) y (13),

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{T_n(x)}{(x-a)^n} = 0}$$

Este resultado se puede expresar como

$$\boxed{T_n(x) = \circ(x-a)^n}$$

y podemos escribir la función $f(x)$ como suma del polinomio que la aproxima más el error cometido en dicha aproximación, lo que se conoce como **desarrollo limitado de Taylor de orden n en a**.

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + T_n(x)} \quad \text{siendo} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Se demuestra que, si $f(x)$ admite un desarrollo limitado de orden n en a, éste es único.

d. Significado geométrico de los tres primeros sumandos del desarrollo

1. $y = f(a)$ es la ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto $P\big(a, f(a)\big)$.
2. $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ es la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ por el punto P.
3. $y = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2$ es la ecuación de la parábola tangente a la curva $y = f(x)$ por el punto P.

Nota. Existen infinitas parábolas tangentes a $y = f(x)$ por un punto, pero la de Taylor es la de mejor aproximación de todas ellas. De hecho, si $y = f(x)$ corresponde a la ecuación de una parábola, la que se obtiene con la fórmula de Taylor es la misma.

Ejemplo. Si $y = x^2 + x + 1$, obteniendo $f(1)$, $f'(1)$ y $f''(1)$, la parábola de Taylor para $a = 1$ es $y = (x-1)^2 + 3(x-1) + 3$, que operando se convierte en $y = x^2 + x + 1$.

Ejercicio. Obtén la parábola de Taylor para $a = 1$ de $y = 2x^2 - 1$.

8.2. Desarrollo limitado de MacLaurin de orden n

Es el caso particular del desarrollo de Taylor para $a = 0$.

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots \frac{f^{(n}(0)x^n}{n!} + T_n(x)}$$

En las siguientes figuras se observan la curva $y = e^x$ y la aproximación obtenida al ir aumentando el número de términos del desarrollo de MacLaurin. A la izquierda se representa la función. En el centro, los polinomios P_1 (recta tangente) y P_2 (parábola tangente). A la derecha se aprecia la casi total coincidencia de $f(x)$ con P_5, en el intervalo $[-3, 3]$.

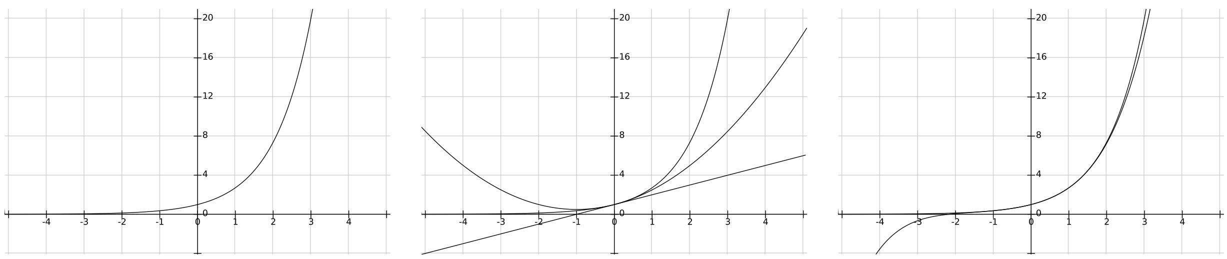

Figura 4: a) Función $f(x) = e^x$; b) Aproximación con P_1, P_2; c) Aproximación con P_5.

A continuación se muestran los primeros términos de los desarrollos de las funciones que utilizaremos con más frecuencia.

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

2. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

3. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$

4. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$

5. $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$

6. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$

8.3. Término complementario de Lagrange

Existen distintas expresiones para el término complementario. Una de las más utilizadas es la debida a Lagrange, que se demuestra suponiendo f derivable $n+1$ veces en un entorno de a y aplicando repetidamente el teorema de Rolle. La expresión de $T_n(x)$ es

$$\boxed{T_n(x) = \frac{f^{(n+1}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}} \qquad \xi \in (a, x)$$

De ξ sólo sabemos que es un valor intermedio entre a y x, si x está a la derecha de a, o entre x y a, en caso contrario. Por ello, no podemos conocer el valor exacto del error cometido, pero sí un valor aproximado o bien una cota del error.

Ejemplo. Sea $f(x) = e^x$. Escribiendo la fórmula del término complementario para f con $a = 0$ y teniendo en cuenta que $0 < \xi < x$ y que e^x es estrictamente creciente, resulta:

$$T_n(x) = \frac{f^{(n+1}(\xi)\, x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{\xi}\, x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{x}\, x^{n+1}}{(n+1)!}$$

con lo que hemos obtenido una cota del error. Si hacemos $n = 9$, lo que equivale a tomar los 10 primeros términos del desarrollo, podemos calcular una cota superior de $T_n(x)$ para distintos valores de x:

$$T_n(x) < \frac{e^x\, x^{10}}{10!} \Longrightarrow \begin{cases} \text{si } x = 1, & T_n(x) < 8 \cdot 10^{-7} \\ \text{si } x = 2, & T_n(x) < 2 \cdot 10^{-3} \\ \text{si } x = 5, & T_n(x) < 400 \end{cases}$$

lo que nos indica que la aproximación es inexistente para $x = 5$, ya que el error cometido es superior al valor de la función ($e^5 \approx 148$). En este caso, para que el error cometido en la aproximación sea aceptable (p. ej., menor que 10^{-3}), tendremos que tomar más términos.

Escribiendo la condición para $x = 5$ y procediendo por tanteo, resulta

$$\frac{e^5\, 5^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3} \Longrightarrow n = 21$$

lo que exige utilizar 22 términos del desarrollo. En este caso, $T_n(x) < 3.15 \cdot 10^{-4}$.

Ejercicio. Repite el procedimiento con la función $y = \operatorname{sen} x$.

8.4. Teorema del extremo relativo

a. Definición de extremo relativo

Dada $f : I \to \mathbb{R}$, decimos que tiene en $a \in I$ un máximo relativo (o local) si y sólo si existe un entorno de a en el que los valores de la función son menores o iguales que $f(a)$, es decir

$$\exists\, U_a \,\big/\, \forall x \in U_a \cap I, \quad f(x) \leq f(a)$$

Para mínimo, la condición es la misma, usando el símbolo $\geq$. Para máximo y mínimo en sentido estricto se utilizan $<$ y $>$ respectivamente y usamos un entorno reducido U_a^* (no incluye a a).

(Las condiciones para que una función tenga extremos absolutos –o globales– son análogas, considerando todo el dominio en lugar del entorno de un punto).

Nota. Los extremos relativos no tienen por qué estar en puntos con derivada nula; de hecho, ni siquiera es necesario que f sea derivable en esos puntos. Por ejemplo, en el intervalo $I = [-1, 1]$, la función $y = x$ tiene extremos en $x = \pm 1$, y su derivada vale 1 en todo I, mientras que la función $y = |x|$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$, donde no es derivable.

La siguiente propiedad muestra la relación entre los extremos relativos de una función diferenciable y los puntos de derivada nula.

b. Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, derivable en a, punto interior de I. Si f tiene un extremo relativo en a, entonces $f'(a) = 0$.

Demostración para el caso de máximo relativo. (Para un mínimo es análoga).
La función f es derivable en a, interior, por lo que tiene derivadas laterales. Calculamos la derivada en a^+:

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Como en a existe un máximo relativo, en un cierto entorno U_a de a, el numerador será menor o igual que 0, mientras que el denominador h es positivo. Luego el cociente será menor o igual que 0 y su límite cuando $h \to 0^+$ también. Entonces

$$f'(a^+) \leq 0$$

Por otra parte, la derivada en a^- es

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

En este caso, el numerador seguirá siendo menor o igual que 0 en el entorno U_a de a, mientras que el denominador h es negativo. Por tanto, el cociente será será mayor o igual que 0 y su límite cuando $h \to 0^-$ también. Entonces

$$f'(a^-) \geq 0$$

Como la función es derivable en a, las derivadas laterales coinciden, de donde

$$f'(a^+) = f'(a^-) = 0 \Longrightarrow f'(a) = 0$$

c. Localización de los extremos relativos.

Hemos visto que, si la función tiene un extremo en un punto interior donde es derivable, $f'(a) = 0$. Tendremos también que analizar los puntos que antes hemos descartado. Como conclusión, los posibles extremos relativos de f se encuentran en:

- Puntos interiores en los que $f' = 0$ (**puntos críticos**).
- Los extremos del intervalo.
- Puntos en que f no sea derivable.

8.5. Aplicaciones del desarrollo de Taylor

a. Estudio de una función en el entorno de un punto. Máximos y mínimos

- Si una función es suficientemente derivable, a partir del desarrollo de Taylor se puede estudiar su comportamiento en el entorno de un punto y, en particular, obtener sus extremos en puntos interiores del dominio. Sea el desarrollo de $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots$$

- Si $f'(a) = 0$ y x está muy cerca de a, el comportamiento de $y = f(x)$ viene dado aproximadamente por el de $y = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$ (los siguientes términos son infinitésimos de orden superior).

  Su gráfica es una parábola con el vértice en $x = a$. Si $f''(a) > 0$, tenemos un mínimo en $x = a$ y, si $f''(a) < 0$, un máximo.

- Si, además, $f''(a) = 0$, cerca de a la función se comporta como $y = f(a) + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$, que corresponde a una cúbica con un punto de inflexión en $x = a$.

  Esto significa que, si $f'''(a) > 0$, la derivada primera (nula en a) deja de decrecer y empieza a crecer. Si $f'''(a) < 0$, sucede lo contrario.

  Consecuencia geométrica: en $x = a$ el centro de curvatura cambia de lado.

Ejemplo 1. $y = x^2 - x + 1$. Se cumple $f'(\frac{1}{2}) = 0,\ f''(\frac{1}{2}) = 2 \Longrightarrow$ mínimo $\big(f(\frac{1}{2}) = 3/4\big)$.

Ejemplo 2. $y = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$. Ahora $f'(\frac{1}{2}) = f''(\frac{1}{2}) = 0,\ f''' \neq 0 \Longrightarrow$ p. de inflexión.

Nota. Que exista un punto de inflexión no significa necesariamente que la tangente a la curva sea horizontal. Por ejemplo, estudiamos la cúbica $y = f(x) = x^3 + kx$, que pasa por el origen. Como $f''(0) = 0, f'''(0) = 6 \neq 0$, la curva tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Pero al ser $f'(0) = k$, en el origen la pendiente de la tangente es $f'(0) = k$.

b. Equivalencias de infinitésimos

A partir de algunos desarrollos se deducen equivalencias ya conocidas, eliminando en los desarrollos infinitésimos de orden superior:

1. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots \Longrightarrow e^x - 1 \sim x$

2. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots \Longrightarrow \ln(1+x) \sim x$

3. $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \Longrightarrow \operatorname{sen} x \sim x$

4. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots \Longrightarrow 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

c. Suma de series

Dando valores a x, podemos obtener la suma de series numéricas. Por ejemplo, haciendo $x = 1$ en los desarrollos de e^x y $\arctan x$, obtenemos:

1. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots \overset{x=1}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots = e - 1$

2. $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots \overset{x=1}{\Longrightarrow} 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots = \dfrac{\pi}{4}$

d. Cálculo aproximado de integrales definidas

Obtenemos el valor aproximado de la integral siguiente, con error $\varepsilon < 10^{-4}$, tomando los 3 primeros términos del desarrollo del seno.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \approx \int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{x}\, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\,\Bigg|_0^1 = 0.9461...$$

8.6. Desarrollos deducidos de otros

Sean $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, definidas en un entorno del origen, que admiten desarrollos limitados de Taylor de orden n en el origen. Sean p y q sus polinomios. Entonces (J. Burgos, p. 241):

a) La función $\boxed{\alpha f + \beta g,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$ admite desarrollo limitado de orden n en el origen, siendo su polinomio la combinación lineal de polinomios $\alpha p + \beta q$.

b) La función $\boxed{f \cdot g}$ admite desarrollo limitado de orden n en el origen. Su polinomio se obtiene multiplicando $p \cdot q$ y eliminando los términos de grado superior a n.

c) Si $g(0) \neq 0$, la función $\boxed{f/g}$ admite desarrollo limitado de orden n en el origen. Su polinomio se obtiene dividiendo p/q según potencias crecientes hasta el grado n inclusive.

d) Si $f(0) = 0$, la función compuesta $\boxed{g \circ f}$ admite desarrollo limitado de orden n en el origen. Su polinomio se obtiene eliminando los términos de grado superior a n en $q \circ p$. El polinomio $q \circ p$ se calcula sustituyendo la variable de q por el polinomio p.

e) Si F es primitiva de f, entonces $\boxed{F}$ admite desarrollo limitado de orden $n+1$ en el origen, siendo su polinomio P la primitiva de p. La constante de integración se determina haciendo que la función y el polinomio valgan igual en el origen, $P(0) = F(0)$.

Ejemplo. Sean las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$, cuyos polinomios son

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad q_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

1. Polinomio de Taylor de grado 5 de $h(x) = \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

$$2p(x) \cdot q(x) = 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{1}{45}x^7 + \frac{1}{1440}x^9 \Rightarrow$$

$$\boxed{r_5(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5}$$

2. Polinomio de Taylor de grado 5 de $h(x) = \tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{19}{360}x^7 + \ldots \Rightarrow \boxed{r_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5}$$

3. Polinomio de Taylor de grado 5 de $h(x) = \operatorname{sen} y\big|_{y=2x}$. Sustituyendo, en el polinomio del seno, la variable y por $2x$, obtenemos el mismo resultado del caso 1 (obviamente, el polinomio de la función $y = 2x$ es $2x$).

$$\boxed{r_5(x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5}$$

4. Polinomio de Taylor de grado 5 de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{sen} x = \int \cos x \; dx \Rightarrow p(x) = \int \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \; dx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + k$$

Como $p(0) = \operatorname{sen}(0) \Rightarrow k = 0$. Entonces $\boxed{p_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}}$.

9. Representación de curvas

Resulta de gran utilidad saber representar gráficamente funciones expresadas en coordenadas cartesianas explícitas, así como curvas en coordenadas paramétricas o polares. Se recomienda consultar el documento de apoyo “Apuntes de dibujo de curvas”, donde se dan unas nociones breves para la representación gráfica de curvas, acompañadas de ejemplos y ejercicios propuestos.

10. Ejercicios de autoevaluación

10.1. Tests verdadero/falso

Test 1 Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Sean f, g definidas en I. La relación $f \leq g \iff f(x) \leq g(x),\ \forall x \in I$ es de orden parcial.
2. Sea $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ y $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$. Si $m = \inf f(x)$ en A, entonces $\forall p > m$, $\exists a \in \mathrm{A} \,\big/\, f(a) < p$.
3. La función $f(x) = e^{-x}$ puede descomponerse en la suma de una función par y otra impar.
4. Si $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \,/\, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \varphi$, entonces la función f no tiene límite φ en $x = a$.
5. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \varphi \in \mathbb{R},\ f$ está acotada en todo entorno V_a^*.
6. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \varphi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \gamma \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \varphi^\gamma$.
7. La función $f(x) = 1/x^3 + x^3$ es un infinito, tanto para $x \to 0$, como para $x \to \infty$.
8. Si $f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2$ en a, entonces $f_1^{g_1} \sim f_2^{g_2}$ en a.
9. La función parte decimal, $f(x) = x - \mathrm{E}(x)$, tiene límites laterales distintos en el origen, por lo que presenta en este punto una discontinuidad evitable.
10. Sean las funciones potencia de exponente racional positivo $\left(x^{m/n},\ m/n \in \mathbb{Q}^+\right)$ y potencia de exponente irracional positivo $(x^a,\ a \notin \mathbb{Q},\ a > 0)$. Ambas son continuas en $\mathbb{R}$.
11. Toda función continua en un intervalo cerrado está acotada, por lo que tiene supremo e ínfimo. No siempre tiene máximo y mínimo.
12. Toda función continua en un intervalo acotado I es uniformemente continua en I (teorema de Heine).

Test 2 Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Sea $a \in I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Si la función f es continua en I, derivable en $I \setminus \{a\}$, y $\exists \lim\limits_{x\to a} f'(x)$, entonces f es derivable en a y se cumple que $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.
2. La diferencial del producto de f y g es el producto de las diferenciales de las funciones.
3. $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$.
4. $f' > 0$ en I si y sólo si f es estrictamente creciente en I.
5. Si f y g son infinitos en a, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
6. El término complementario $T_n(x) = f(x) - P_n(x)$ es un infinitésimo de orden n.
7. Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Los extremos relativos de f en I se encuentran sólo en los puntos de derivada nula o los extremos del intervalo I.
8. Si f y g admiten desarrollo limitado de orden n en el origen, $f \cdot g$ admite desarrollo de orden n en el origen. Su polinomio se obtiene multiplicando los polinomios de f y g y eliminando los términos de grado superior a n.
9. La función $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ es un infinito (en el origen) y un infinitésimo (para $x \to \infty$).

10.2. Cuestión

Se pide obtener un valor aproximado para $\sqrt{627}$, utilizando para ello el concepto de diferencial y sabiendo que $25^2 = 625$.

10.3. Solución de los tests verdadero/falso

Test 1

1. **V**. La relación así definida cumple las propiedades Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva. Pero, dadas dos funciones cualesquiera, no tienen porqué ser los valores de una de ellas menores o iguales que los de la otra para todo punto del dominio, por lo que no tiene porqué existir una relación de orden entre ellas (ver apdo **A.1** del tema).

2. **V**. Lo demostramos por reducción al absurdo. Supongamos lo contrario, es decir que $\exists\, p > m \,\big/\, \forall a \in \mathrm{A},\ f(a) \geq p > m$. Entonces m no es el ínfimo (la mayor de las cotas inferiores) pues p es una cota inferior mayor que m.

3. **V**. Toda función definida en un dominio simétrico admite la descomposición $f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(x) - f(-x)\Big)$, siendo el primer sumando una función par y el segundo una impar. Por ejemplo, si $f(x) = e^x$, resulta $e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4. **V**. Es consecuencia de la relación que existe entre el límite funcional y el límite por sucesiones (ver apdo. **B.4** del tema).

5. **F**. La propiedad 2 de los límites establece que f está acotada en un cierto entorno reducido de a, lo cual no asegura que lo esté en cualquiera. Ej. $f(x) = 1/x$ tiene límite $1/2$ en $x = 2$ y está acotada en $U_2^* = (1, 2) \cup (2, 3)$ pero no lo está en $V_2^* = (0, 2) \cup (2, 4)$.

6. **F**. Para ser cierto, debe cumplirse $\varphi > 0$.

7. **F**. f es un infinito para $x \to \infty$. En el origen no es un infinito pues no tiene signo constante al acercarse a 0. En efecto, si $x \to 0^+,\ f \to \infty$ y, si $x \to 0^-,\ f \to -\infty$. Sólo podemos afirmar que $|f| \to \infty$ cuando $x \to 0$. En cambio $g(x) = 1/x^4 + x^4$ sí sería un infinito en el origen (y también para $x \to \infty$).

8. **F**. No podemos asegurarlo. Ej. $f_1 = f_2 = e$; $g_1 = x^2 + x,\ g_2 = x^2$. Cuando $x \to +\infty$ el cociente entre $f_1^{g_1}$ y $f_2^{g_2}$ tiende a ∞.

9. **F**. Si los límites laterales existen y no coinciden, como en este caso, decimos que la discontinuidad es no evitable (o esencial), de primera especie o de salto finito.

10. **F**. La función $x^{m/n},\ m/n \in \mathbb{Q}^+$ existe y es continua en $\mathbb{R}$, si n es impar y sólo en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, si n es par. La función $x^a,\ a \notin \mathbb{Q},\ a > 0$ existe y es continua sólo en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. No tiene sentido un número negativo elevado a un exponente irracional.

11. **F**. Por el teorema de Weierstrass (teoremas de las funciones continuas), toda función continua en un intervalo cerrado alcanza en él un máximo y un mínimo.

12. **F**. El teorema de Heine sólo asegura la continuidad uniforme de una función continua en un intervalo cerrado. Ej. $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua en el intervalo acotado $(0, 1)$.

Test 2

1. **V**. Ver apdo. **D.5** del tema (La derivada como límite de derivadas).

2. **F**. $d(f \cdot g) = f dg + g\, df$.

3. **V**. $(x^x)' = x x^{x-1} + x^x \ln x = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$.

4. **F**. Ver apdo. **D.4.4** del tema (teoremas del valor medio). Contraejemplo: la función $y = x^5$ es estrictamente creciente pero tiene derivada nula en $x = 0$.

5. **F**. Por la regla de L'Hopital, si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$, entonces existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$.

   Pero puede no existir el primer límite y sí el segundo (ver apdo. **D.6** del tema y un documento de apoyo).

6. **F**. El término complementario $T_n(x)$ es un infinitésimo de orden superior a n. Ver apdo. **D.8.1** del tema (Desarrollo limitado de Taylor).

7. **F**. Puede haber extremos en puntos donde la función no es derivable. Ej: la función $y = |x|$ en $x = 0$.

8. **V**. Ver apdo. **D.8.6** del tema (Desarrollos deducidos de otros).

9. **F**. Es un infinito, tanto en el origen como para $x \to \infty$.

10.4. Solución de la cuestión

La condición que debe cumplir la función f para ser diferenciable en a es:

$$f(x) - f(a) = [f'(a) + \varepsilon(x-a)]\,(x-a) = f'(a)\,(x-a) + \varepsilon(x-a)\,(x-a)$$

donde $\varepsilon(x-a) \to 0$ cuando $x \to a$.

Si una función es diferenciable, podemos aproximar el incremento de f entre dos puntos por medio de la diferencial, despreciando infinitésimos de orden superior al de $(x-a)$:

$$f(x) - f(a) \approx df(a) = f'(a)\,(x-a)$$

Entonces, haciendo $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x = 627$, $a = 625$, tendremos:

$$\sqrt{627} - \sqrt{625} \approx \frac{1}{2\sqrt{625}}\,2 = 0.04 \Longrightarrow \sqrt{627} \approx 25.04$$

Dicho de otro modo, hemos sustituído el valor en el punto x de la función f por el de la recta tangente –en el punto a– a la curva $y = f(x)$:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

Nota: El valor exacto de $\sqrt{627}$ es 25.039968... El error relativo cometido al aproximar el valor del incremento por el de la diferencial es:

$$E_r = \frac{0.04 - 0.039968}{0.04}\,100 = 0.08\,\%$$

Tema V. Cálculo de primitivas (16.07.2024)

1. Introducción y conceptos básicos

Este tema está pensado como un apoyo a las clases prácticas de cálculo de primitivas, recordando algunos conceptos e introduciendo técnicas que permiten resolver integrales indefinidas.

En primer lugar se recuerdan muy brevemente algunas ideas básicas sobre funciones trigonométricas y logarítmicas. Luego se definen las funciones hiperbólicas y sus inversas, de mucha aplicación en el cálculo de primitivas (en el precurso de Matemáticas puede verse un estudio algo más detallado de estas cuestiones).

A continuación se definen los conceptos de primitiva y de integral inmediata y se introducen los cambios de variable. Tras describir el método de integración por partes, se aplica este a las fórmulas de reducción. Por último se exponen las técnicas habituales para resolver integrales racionales, trigonométricas e irracionales.

1.1. Funciones trigonométricas

a) Definiciones. A partir del seno y el coseno, se definen la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,; \qquad \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,; \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}\,; \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

b) Seno, coseno y tangente del ángulo suma y del ángulo doble.

1. $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \Longrightarrow \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.
2. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \Longrightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.
3. $\tan(x+y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \cdots = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \Longrightarrow \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

c) Derivadas del seno, el coseno y la tangente.

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x\,; \qquad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x\,; \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

d) Algunas relaciones entre funciones trigonométricas.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1\,; \qquad 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x\,; \qquad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

1.2. Logaritmo neperiano

Son muy importantes las fórmulas de los logaritmos del producto, cociente y potencia.

$$\ln xy = \ln x + \ln y\,; \qquad \ln(x/y) = \ln x - \ln y\,; \qquad \ln x^y = y \ln x$$

2. Funciones hiperbólicas

2.1. Definición

Las funciones hiperbólicas se definen a partir de la función e^x.

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,; \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,; \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

2.2. Función par e impar

Las siguientes propiedades, de fácil comprobación, muestran que el coseno es una función par, mientras que el seno y la tangente hiperbólicos son impares (igual que en funciones trigonométricas).

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)\,; \qquad \cosh(-x) = \cosh(x)\,; \qquad \tanh(-x) = -\tanh(x)$$

2.3. Relación entre el seno y el coseno hiperbólicos

Es similar a la que existe entre el seno y coseno trigonométricos.

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \cdots = 1$$

2.4. Seno, coseno y tangente hiperbólicas de $x + y$

a) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y \Longrightarrow \operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$.

b) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \Longrightarrow \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$.

c) $\tanh(x+y) = \dfrac{\operatorname{senh}(x+y)}{\cosh(x+y)} = \cdots = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \Longrightarrow \tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$.

2.5. Derivadas de las funciones hiperbólicas

A partir de la definición de estas funciones se obtienen sus derivadas (compruébese).

$$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x\,; \qquad (\cosh x)' = \operatorname{senh} x\,; \qquad (\tanh x)' = \cdots = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

2.6. Funciones inversas

Noción intuitiva. Toda función f asocia, a cada valor x de la variable independiente, un valor $y = f(x)$ de la variable dependiente. La función inversa de una dada recorre el camino contrario, asociando a cada y el correspondiente valor $x = f^{-1}(y)$. Por ejemplo, si f asocia a cada x el valor $y = 2x$, la función inversa f^{-1} asocia a cada y el correspondiente valor $x = y/2$.

Un modo práctico de obtener la función inversa de una dada consiste en despejar la variable x en función de la y, para a continuación permutar entre sí los nombres de las variables x e y. Por ejemplo, si f asocia a cada x el valor $y = x^2$,

$$y = f(x) = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{y} \Longrightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

La inversa de la función “cuadrado” es la función “raíz cuadrada”.

Ejemplo. Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas. Las funciones inversas de las tres trigonométricas principales son, respectivamente, el arco seno, el arco coseno y el arco tangente, cuyas derivadas se muestran a continuación (en el tema IV se estudia el modo general de obtener la derivada de la inversa de una función cualquiera).

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,; \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,; \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Relación entre las gráficas de una función y su inversa. Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante (razónese como ejercicio).

2.7. Funciones hiperbólicas inversas

a) Argumento seno hiperbólico. Dada $y = \operatorname{senh} x$, su función inversa es $y = \operatorname{argsh} x$ (argumento cuyo seno hiperbólico es x).

Para trabajar mejor con ella, la expresamos en forma logarítmica. Para ello partimos de la función $y = \operatorname{argsh} x$, despejamos la variable x y utilizamos la definición de la función seno hiperbólico.

$$y = \operatorname{argsh} x \Longrightarrow x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Longrightarrow 2x = e^y - e^{-y}$$

Multiplicamos por e^y ambos miembros y resolvemos una ecuación de segundo grado en e^y.

$$2x\, e^y = (e^y)^2 - 1 \Longrightarrow (e^y)^2 - 2x\, e^y - 1 = 0 \Longrightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Por fin obtenemos y como el logaritmo neperiano de lo anterior. Para el signo $+$ delante de la raíz, la expresión toma valor positivo $\forall x$. En cambio, para el signo $-$ su valor es negativo sea cual sea el valor de x, por lo que ningún valor de y es solución de la ecuación. Resulta

$$\boxed{y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in (-\infty, \infty)}$$

b) Argumento coseno hiperbólico. Repetimos los pasos del apartado anterior. Partiendo de la función argumento coseno, despejamos la x en función de e^y.

$$y = \operatorname{argch} x \Longrightarrow x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Longrightarrow 2x = e^y + e^{-y}$$

Multiplicamos por e^y y resolvemos.

$$2x\, e^y = (e^y)^2 + 1 \Longrightarrow (e^y)^2 - 2x\, e^y + 1 = 0 \Longrightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

La raíz existe sólo para $x^2 \geq 1$, es decir $x \geq 1$ o $x \leq -1$. Para $x \leq -1$, $e^y < 0$, por lo que no hay solución. Para $x \geq 1$, e^y toma valor positivo para ambos signos de la raíz y de cada uno resulta un valor de y solución de la ecuación. Tomamos sólo el signo positivo por tratarse de una función, pues cada x puede tener sólo una imagen. Resulta

$$\boxed{y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \in [1, \infty)}$$

Ejercicio. Obtén la relación entre los valores de y correspondientes a los dos signos de la raíz. ¿Puedes relacionar el resultado con las propiedades de la gráfica de la función inversa?

c) Argumento tangente hiperbólica. Partimos de la función argumento tangente, despejando x en función de e^y y multiplicando numerador y denominador por e^y.

$$y = \operatorname{argth} x \Longrightarrow x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$x\left(e^{2y} + 1\right) = e^{2y} - 1 \Longrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

y tomamos logaritmos.

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x \in (-1, 1)}$$

Ejercicio. Razona los campos de existencia indicados en los apartados b) y c).

2.8. Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

Para obtener las derivadas de estas funciones, las expresamos en forma logarítmica y derivamos por el método habitual.

a) $(\operatorname{argsh} x)' = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \cdots = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

b) $(\operatorname{argch} x)' = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]' = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \cdots = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

c) $(\operatorname{argth} x)' = \dfrac{1}{2}\left[\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right]' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)' : \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \cdots = \dfrac{1}{1-x^2}.$

3. Función primitiva. Integrales inmediatas

Los conceptos de función integral e integral definida se verán con detalle más adelante, tras haber estudiado funciones y sus derivadas. De momento introduciremos de modo simple la primitiva de una función, también llamada integral indefinida.

3.1. Primitiva de una función

Dada una función f, definida en un intervalo I, llamamos primitiva suya a toda función F, derivable en I, tal que su derivada coincide con f $(F' = f)$. En ese caso escribimos

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

Si C es una constante cualquiera, derivando resulta

$$\big(F(x) + C\big)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

luego $F(x) + C$ es también primitiva de f, por lo que $F(x) + C$, $\forall\, C \in \mathbb{R}$ es el conjunto de primitivas de $f(x)$. Esto se expresa como

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

3.2. Diferencial

El factor dx que aparece en la expresión anterior se llama diferencial de x. Como se verá en el Tema IV, la diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable, es decir

$$dg(x) = g'(x)\, dx$$

Por ejemplo, la diferencial de la función seno es el coseno por la diferencial de x.

$$u = \operatorname{sen} x \Longrightarrow du = \cos x\, dx$$

De aquí resulta

$$F'(x) = f(x) \Longrightarrow F(x) = \int f(x)\, dx = \int F'(x)\, dx = \int dF(x) \Longrightarrow F(x) = \int dF(x)$$

Es decir que la integral de la diferencial de una función es la propia función. Como consecuencia, la primitiva que buscamos es aquella función cuya diferencial sea el integrando, lo que será de utilidad en el cálculo de integrales definidas.

3.3. Linealidad de la integral

La integral de una combinación lineal es la combinación lineal de las integrales.

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

3.4. Integrales inmediatas

A partir de las fórmulas de derivación de las funciones más comunes, puede obtenerse un conjunto de integrales inmediatas que ayuda en el cálculo de primitivas. Se adjunta como anexo, al final del tema, una tabla con las 19 integrales de uso más frecuente, la mayoría de las cuales se recomienda memorizar.

Los últimos tres casos tienen dos soluciones diferentes. En los dos últimos, una de las soluciones tiene un mayor intervalo de existencia que la otra.

4. Integrales semiinmediatas y cambios de variable

Llamamos integrales semiinmediatas a aquellas que se convierten en inmediatas por medio de alguna operación sencilla en el integrando, como utilizar la regla de la cadena o hacer un cambio de variable. Por ejemplo, para integrar

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$$

podemos llamar u al $\operatorname{sen} x$, con lo que $du = \cos x\, dx$. Teniendo en cuenta la primera de las integrales inmediatas de la tabla, resulta

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

El anterior es un cambio de variable implícito. A continuación se muestra uno explícito, que permite simplificar la integral (no se resuelve completo). Haciendo $x = \operatorname{sen} t$ y $dx = \cos t\, dt$, y teniendo en cuenta una de las relaciones vistas en el apartado **1.1**, resulta

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\, \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt$$

En el documento de apoyo “Introducción a los cambios de variable” se describen con más detalle estos dos tipos de cambios y se muestran distintos ejemplos.

5. Integración por partes

Partimos de la diferencial del producto de dos funciones de x, $u(x)$ y $v(x)$. Como se estudiará en el Tema IV,

$$d(uv) = (uv)'dx = (uv' + u'v)dx = uv'dx + vu'dx = udv + vdu$$

Despejamos udv y calculamos la integral de ambos miembros. Recordando que la integral de la diferencial de una función es la propia función, resulta

$$udv = d(uv) - vdu \Longrightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

Para aplicar el método hemos de obtener los factores u y dv, calcular a partir de ellos du y v y sustituir. El método resultará útil si la integral de vdu es más sencilla de obtener que la inicial.

6. Fórmulas de reducción

1) Integral dependiente de un parámetro. Sea una integral, a la que llamaremos $I(n)$, cuyo integrando depende de un parámetro $n \in \mathbb{R}$. Supongamos que aplicando algún método (habitualmente el de integración por partes) podemos expresarla en función de la misma integral, con valores menores del parámetro, es decir $I(n) = f\big(I(n-1),\, I(n-2)\dots\big)$.

En este caso hemos hallado una **fórmula de reducción**, válida en principio $\forall n \in \mathbb{R}$. Lo más frecuente será que $I(n)$ resulte en función de $I(n-1)$ o $I(n-2)$ o ambas.

Ejemplo. Sea $I(n) = \displaystyle\int \ln^n x\; dx$. Si $n \neq 0$, aplicamos el método de partes. Resulta:

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln^n x \Rightarrow du = n \ln^{n-1} x\, \dfrac{1}{x}\, dx \\[2ex] dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\} \Longrightarrow I(n) = \int \ln^n x\; dx = x \ln^n x - nI(n-1)$$

2) El parámetro es un número natural. En este caso, aplicando repetidamente la fórmula, obtendríamos $I(n-1)$ en función de $I(n-2)$, esta en función de $I(n-3)$, etc. Iríamos así reduciendo el grado, llegando a $I(0)$ o $I(1)$. Estas se integran directamente, pues suelen ser muy sencillas (a veces son casos particulares de la fórmula general).

3) Fórmula explícita. En ocasiones, reiterando el método, podemos llegar a una fórmula explícita que nos da el valor de $I(n)$, aunque suele ser complicado. Por ejemplo, en el caso anterior llegaríamos a:

$$\int \ln^n x\; dx = x\left(\ln^n x - n \ln^{n-1} x + n(n-1) \ln^{n-2} x + \cdots + (-1)^n\, n!\right)$$

4) El parámetro es entero negativo. Supongamos que el parámetro n es entero negativo y aplicamos una y otra vez la fórmula de reducción. Tendríamos un proceso indefinido, en el que n tomaría valores negativos decrecientes. En estos casos interesa despejar al revés, $I(n-1)$ en función de $I(n)$ o, lo que es lo mismo, $I(n)$ en función de $I(n+1)$. Así, en cada paso aumentará el valor del parámetro hasta llegar a $I(-1)$, $I(0)$, que se pueden calcular directamente.

5) Cambio de signo del parámetro. Al ser la fórmula de reducción válida $\forall n \in \mathbb{R}$, a veces podemos obtener la fórmula de una integral a partir de otra, cambiando de signo el parámetro.

Ejemplo. Sean $I(n) = \displaystyle\int x^n e^x\; dx;\;\; J(n) = \int \frac{e^x}{x^n}\; dx.$

Se cumple $J(n) = I(-n)$ por lo que, si conocemos la fórmula de reducción para $I(n)$, podemos obtener la de $J(n)$ sin necesidad de integrar. Basta cambiar de signo el parámetro en la fórmula de reducción de $I(n)$ y operar.

Es decir, como conocemos $I(n)$ en función de $I(n-1)$, entonces $J(n)$ (que es $I(-n)$) se puede escribir en función de $I(-n-1)$, es decir $J(n+1)$. Para terminar, hemos de despejar $J(n+1)$ en función de $J(n)$ y de ahí obtener la relación entre $J(n)$ y $J(n-1)$.

En el caso del ejemplo es fácil obtener $I(n) = x^n e^x - nI(n-1)$. A partir de esta expresión,

$$J(n) = I(-n) = x^{-n} e^x + nI(-n-1) = x^{-n} e^x + nJ(n+1) \Longrightarrow J(n+1) = \frac{1}{n} J(n) - \frac{e^x}{nx^n}$$

de donde resulta la expresión, que también obtendríamos resolviendo directamente $J(n)$,

$$J(n) = \frac{1}{n-1} J(n-1) - \frac{1}{n-1} \frac{e^x}{x^{n-1}}$$

7. Integrales racionales

Son aquellas cuyo integrando está formado por un cociente de polinomios, es decir

$$I = \int \frac{P_k(x)}{Q_l(x)}\,dx,\ k < l$$

Para la aplicación del método, numerador y denominador no deben tener factores comunes y el grado del numerador debe ser inferior al del denominador. Si $k \geq l$, se dividen los polinomios y el problema se reduce a integrar el cociente entre el resto de la división y el polinomio $Q_l(x)$.

Según el Teorema Fundamental del Álgebra, todo polinomio de coeficientes reales y grado l tiene l raíces, que serán simples o múltiples, reales o complejas, sabiendo que para cada raíz compleja es también raíz su conjugada. Al descomponer el polinomio en factores, las raíces reales dan lugar a factores del tipo $(x-a)$, mientras que cada par de raíces complejas conjugadas da lugar a un factor cuadrático sin raíces reales, como por ejemplo x^2+x+2, cuyas raíces serían $1 \pm i$.

Sea un polinomio $Q_l(x)$ con una raíz real simple, una real múltiple, dos complejas conjugadas simples y otras dos conjugadas múltiples. Si el coeficiente del término de mayor grado es l, la descomposición en factores resultante será:

$$Q_l(x) = (x-a)(x-b)^m\,(x^2+cx+d)(x^2+ex+f)^n$$

donde el grado l es igual a la suma de grados de los factores, $l = 1+m+2+2n = 2n+m+3$.

Descomponemos el cociente en fracciones simples, obteniendo:

$$\frac{P_k(x)}{Q_l(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \cdots + \frac{B_m}{(x-b)^m} + \frac{Cx+D}{x^2+cx+d} + \frac{E_1x+F_1}{x^2+ex+f} + \cdots + \frac{E_nx+F_n}{(x^2+ex+f)^n}$$

(observamos que el número de coeficientes indeterminados es igual a l).

A continuación hacemos denominador común en el segundo miembro e igualamos los numeradores, obteniendo un sistema de l ecuaciones con l incógnitas que, una vez resuelto, nos da los coeficientes indeterminados.

Para terminar debemos integrar las distintas fracciones resultantes.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-b)^m} = \cdots = -\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x-b)^{m-1}} + C.$

c) Las fracciones de la forma $\dfrac{Cx+D}{x^2+cx+d}$ dan lugar a un logaritmo más un arco tangente, como en el ejemplo siguiente:

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + 2\int \frac{dx}{(x+1)^2+2} =$$

$$\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

d) Las fracciones del tipo $\dfrac{E_nx+F_n}{(x^2+ex+f)^n}$ pueden integrarse por un proceso laborioso, del que resulta una expresión recurrente que permite reducir el grado del denominador. Por ello, cuando el denominador contiene factores de la forma $(x^2+ex+f)^n,\ n>1$, es mucho más práctico el método de Hermite.

Método de Hermite. (para cocientes de polinomios en que el denominador tiene factores cuadráticos sin raíces reales, elevados a un exponente mayor que 1).

Suponemos, como antes, que $Q_l(x)$ tiene una raíz real simple y otra múltiple, dos complejas conjugadas simples y otras dos múltiples, y que el coeficiente del término de mayor grado es l. Al factorizarlo resulta:

$$Q_l(x) = (x-a)(x-b)^m\,(x^2+cx+d)(x^2+ex+f)^n$$

El método consiste en descomponer el integrando de la siguiente forma:

$$\frac{P_k(x)}{Q_l(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{Cx+D}{x^2+cx+d} + \frac{Ex+F}{x^2+ex+f} + \frac{d}{dx}\left(\frac{R_s(x)}{(x-b)^{m-1}(x^2+ex+f)^{n-1}}\right)$$

Es decir, en los cuatro primeros sumandos del segundo miembro, aparecen los factores de $Q_l(x)$ con exponente igual a 1. En el denominador del cociente que se deriva, el exponente de los factores está reducido en 1, por lo que no aparecen los de exponente 1. Por último, el grado de $R_s(x)$ (de coef. indeterminados) es inferior al del denominador, es decir de grado $2n+m-4$ como máximo.

Entonces se deriva el cociente, se reduce a común denominador y se igualan los numeradores, lo que produce un sistema de $2n+m+3$ ecuaciones, con otras tantas incógnitas. Tras identificar los coeficientes indeterminados, se integra: las dos primeras fracciones dan lugar a logaritmos neperianos; las dos siguientes, a logaritmo más arcotangente. En cuanto a la última, resulta la más sencilla de integrar:

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{R_s(x)}{(x-b)^{m-1}(x^2+ex+f)^{n-1}}\right) dx = \frac{R_s(x)}{(x-b)^{m-1}(x^2+ex+f)^{n-1}}$$

Ejemplo. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$

a) Descomponemos en fracciones, derivamos y hacemos denominador común:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1)-(Cx+D)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx^2+C-2Cx^2-2Dx}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3+(B-C)x^2+(A-2D)x+B+C}{\left(x^2+1\right)^2}$$

b) Planteamos el sistema, igualando los coeficientes de los términos del mismo grado. Resulta: $A=0,\quad B-C=1,\quad A-2D=0,\quad B+C=0$

c) Resolvemos el sistema: $A=D=0,\quad B=-C=1/2.$

d) Integramos, obteniendo:

$$I = \int \frac{1/2}{1+x^2}\,dx + \int \frac{d}{dx}\left(\frac{-x/2}{1+x^2}\right)\,dx = \frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2\,(1+x^2)} + C$$

Nota. Con este ejemplo se pretende únicamente mostrar la aplicación del método en un caso sencillo. El ejercicio se resolvería más fácilmente por partes (haciendo $u=x$).

Ejercicio. Resuelve por Hermite $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)\,(x^2+1)^2}\,dx.$

8. Integrales trigonométricas. Cambios de variable.

El integrando está formado por funciones trigonométricas. Los cambios de variable recomendados son los siguientes.

1) Integrando impar en seno. Si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, hacemos $\boxed{\cos x = t}$

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2}}\ ;\quad -\operatorname{sen} x\ dx = dt \Longrightarrow \boxed{dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}}$$

Ejemplo. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\ dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{1-t^2} \cos^2 x \underbrace{\operatorname{sen} x\ dx}_{-dt} = -\int (1-t^2)\, t^2\, dt.$

2) Integrando impar en coseno. Si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, hacemos $\boxed{\operatorname{sen} x = t}$

$$\boxed{\cos x = \sqrt{1-t^2}}\ ;\quad \cos x\ dx = dt \Longrightarrow \boxed{dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}$$

Ejemplo. $\displaystyle\int (\cos^3 x + \cos x) \operatorname{sen}^2 x\ dx = \int (\underbrace{\cos^2 x + 1}_{2-t^2}) \operatorname{sen}^2 x \underbrace{\cos x\, dx}_{dt} = \int (2-t^2) t^2\, dt.$

3) Integrando par en seno-coseno. Si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, hacemos $\boxed{\tan x = t}$

$$\boxed{\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\ ;\ \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\ ;\ (1+\tan^2 x)\ dx = dt \Longrightarrow \boxed{dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

Ejemplo. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}\ dx = \int \frac{1}{1+t^2} \frac{(1+t^2)^2}{t^4} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^4}.$

4) Caso general. Si nada de lo anterior da resultado, haciendo $\boxed{\tan \dfrac{x}{2} = t}$ resulta

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ ;\ \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}}\ ;\ \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\ d\left(\frac{x}{2}\right) = dt \Longrightarrow \boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

Ejemplo. $\displaystyle\int \frac{2+\operatorname{sen} x}{2+\cos x}\ dx = \cdots = 4\int \frac{1+t+t^2}{(3+t^2)(1+t^2)}\ dt.$

5) Cambio de productos en sumas. Partimos del seno y el coseno de la suma y de la diferencia. Sumando o restando las expresiones, podemos despejar los productos deseados.

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\
\operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \\
\operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y
\end{aligned}
\Longrightarrow
\begin{aligned}
&\boxed{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}} \\
&\boxed{\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}} \\
&\boxed{\operatorname{sen} x \cos y = \frac{\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)}{2}}
\end{aligned}$$

9. Integrales irracionales. Cambios de variable.

El integrando contiene expresiones de exponente fraccionarios. Estudiamos distintos casos.

1) Cociente de binomios con distintos exponentes. Es decir, integrando del tipo

$$R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}, \dots\right]$$

Hacemos el cambio: $\boxed{\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^m}$ siendo $m = \text{m.c.m.}(q, s \dots)$.

Ejemplo. $I = \displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\, dx$. Cambio $\dfrac{x+1}{x+2} = t^2 \Longrightarrow x = \dfrac{2t^2-1}{1-t^2};\ dx = \dfrac{2t\, dt}{(1-t^2)^2}$.

Resulta $I = \displaystyle\int \frac{2t^2}{(1-t^2)^2}\, dt$, que se resuelve descomponiendo en fracciones simples.

2) El integrando contiene la raíz de una suma o diferencia de cuadrados.

a) $R\left[x, \sqrt{c^2 - a^2x^2}\right] : \boxed{ax = c \operatorname{sen} t} \Longrightarrow \sqrt{c^2-a^2x^2} = c\cos t;\ dx = \dfrac{c}{a}\cos t\, dt.$

Ejemplo. $\displaystyle\int \sqrt{5-x^2}\, dx : x = \sqrt{5}\operatorname{sen} t \Longrightarrow \sqrt{5-x^2} = \cdots = \sqrt{5}\cos t;\ dx = \sqrt{5}\cos t dt.$

$$I = 5\int \cos^2 t dt = \frac{5}{2}\int (1+\cos 2t) dt = \frac{5}{2}(t + \operatorname{sen} t \cos t) = \frac{5}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x}{2}\sqrt{5-x^2} + C.$$

Caso particular. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$ (inmediata).

b) $R\left[x, \sqrt{a^2x^2 - c^2}\right] : \boxed{ax = \dfrac{c}{\cos t}} \Longrightarrow \sqrt{a^2x^2-c^2} = c\tan t;\ dx = \dfrac{c}{a}\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt.$

Ejemplo. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-5)^{3/2}} : x = \frac{\sqrt{5}}{\cos t} \Longrightarrow (x^2-5)^{3/2} = \cdots = 5^{3/2}\tan^3 t;\ dx = \sqrt{5}\,\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt.$

$$I = \int \frac{\cos^3 t}{5^{3/2}\operatorname{sen}^3 t}\,\frac{\sqrt{5}\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{5}\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t} dt = \frac{1}{5}\,\frac{-1}{\operatorname{sen} t} = -\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} + C.$$

Caso particular. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = \operatorname{argch}\frac{x}{\sqrt{5}} + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-5}\right| + C$ (inmediata).

c) $R\left[x, \sqrt{a^2x^2 + c^2}\right] : \boxed{ax = c\tan t} \Longrightarrow \sqrt{a^2x^2+c^2} = \dfrac{c}{\cos t};\ dx = \dfrac{c}{a}\dfrac{1}{\cos^2 t}\, dt.$

Ejemplo. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+5}\, dx : x = \sqrt{5}\tan t \Longrightarrow \sqrt{x^2+5} = \cdots = \frac{\sqrt{5}}{\cos t};\ dx = \frac{\sqrt{5}}{\cos^2 t} dt.$

$I = 5\displaystyle\int \frac{dt}{\cos^3 t} = 5\int \frac{\cos t\, dt}{\cos^4 t}$. Haciendo el cambio $\operatorname{sen} t = u$, resulta $5\displaystyle\int \frac{du}{(1-u^2)^2}$.

Caso particular. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = \operatorname{argsh}\frac{x}{\sqrt{5}} + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+5}\right| + C$ (inmediata).

3) El integrando contiene la raíz de un trinomio. Puede reducirse al caso anterior.

a) $a > 0 \Longrightarrow ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \dfrac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(c - \dfrac{b^2}{4a}\right).$

Ejemplo. $2x^2 + x + 1 = \left(\sqrt{2}x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \dfrac{1}{(2\sqrt{2})^2} = \left(\sqrt{2}x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{7}{8}.$

b) $a < 0 \Longrightarrow ax^2 + bx + c = -\left(-ax^2 - bx - c\right) = \dots$

Ejemplo. $-x^2 - x + 2 = -\left(x^2 + x - 2\right) = -\left[\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - 2 - \dfrac{1}{4}\right] = \dfrac{9}{4} - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2.$

4) Método Alemán. Se aplica si el integrando es del tipo $\dfrac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

$$\boxed{\frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{d}{dx}\left[Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}\right] + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}}$$

Tras identificar λ y los coeficientes de $Q_{m-1}(x)$ integramos, obteniendo

$$I = \left[Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}\right] + \int \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx,$$

que se resuelve a partir de los apartados **2)** y **3)**.

Ejemplo. $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}\, dx$. Hacemos $\dfrac{x}{\sqrt{}} = \dfrac{d}{dx}\left(k\sqrt{}\right) + \dfrac{\lambda}{\sqrt{}}$. Entonces

$$\frac{x}{\sqrt{}} = k\,\frac{3 - 2x}{2\sqrt{}} + \frac{\lambda}{\sqrt{}} \overset{\cdot 2\sqrt{}}{\Longrightarrow} 2x = 3k - 2kx + 2\lambda \Longrightarrow k = -1,\ \lambda = \frac{3}{2}$$

Y la integral se convierte en

$$I = \int \frac{d}{dx}\left(k\sqrt{}\right)\, dx + \int \frac{\lambda}{\sqrt{}}\, dx = -\sqrt{3x - x^2 - 2} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$$

La integral que queda se resuelve haciendo $3x - x^2 - 2 = \dots = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$, con lo que

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{}} = \operatorname{arc\,sen}(2x - 3) \Longrightarrow I = -\sqrt{3x - x^2 - 2} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,sen}(2x - 3) + C$$

5) El integrando es del tipo $\dfrac{1}{(x - \alpha)^p\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. Cambio $\boxed{x - \alpha = \dfrac{1}{t}}$. Entonces:

$$x = \frac{1}{t} + \alpha,\ dx = -\frac{dt}{t^2} \Longrightarrow \cdots\ I = -\int \frac{t^{p-1}}{\sqrt{Q(t)}} dt,$$

siendo $Q(t)$ un polinomio de segundo grado (si $\alpha = 0,\ Q(t) = a + bt + ct^2$).

En el caso $p = 1$, aplicamos **3)**. Si $p > 1$, aplicamos el Método Alemán.

Tabla de integrales inmediatas

1) $\displaystyle\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C,\ m \neq -1$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} + C$

4) $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

5) $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

6) $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 u}\,du = \int (1+\tan^2 u)du = \tan u + C$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}du = \int (1+\operatorname{cotan}^2 u)du = -\operatorname{cotan} u + C$

9) $\displaystyle\int \operatorname{cotan} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

10) $\displaystyle\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

11) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}\,du = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{\alpha} + C$

12) $\displaystyle\int \frac{1}{\alpha^2 + u^2}\,du = \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{u}{\alpha} + C$

13) $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

14) $\displaystyle\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

15) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 u}\,du = \tanh u + C$

16) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 u}\,du = -\coth u + C$

17) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}\,du = \operatorname{argsh}\frac{u}{\alpha} + C$

17′) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}\,du = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + \alpha^2}\right) + C$

18) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - \alpha^2}}\,du = \operatorname{argch}\frac{u}{\alpha} + C$

18′) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - \alpha^2}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - \alpha^2}\right| + C$

19) $\displaystyle\int \frac{1}{\alpha^2 - u^2}\,du = \frac{1}{\alpha}\operatorname{argth}\frac{u}{\alpha} + C$

19′) $\displaystyle\int \frac{1}{\alpha^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{\alpha + u}{\alpha - u}\right| + C$

NOTAS:

1: La primitiva de **17’** es la forma logarítmica de la primitiva de **17**. Ambas tienen el mismo campo de existencia $(-\infty, \infty)$.

2: La primitiva de **18** existe sólo para $u > \alpha$. La de **18’** existe $\forall u \neq \pm\alpha$.

3: La primitiva de **19** existe sólo para $-\alpha < u < \alpha$. La de **19’** existe $\forall u \neq \pm\alpha$.

4: En los casos **11, 12, 17-19’**, α significa la raíz cuadrada positiva de α^2. Escribimos α^2 para indicar un número positivo.