Álgebra Lineal II

TEMA I- Aplicaciones bilineales.

Capítulo 1. Formas bilineales y formas cuadráticas.

Vectores conjugados.
Subespacios conjugados.

Luis Fuentes García (2022).

Vectores conjugados.

Motivación:

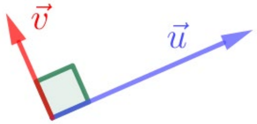
Producto escalar: nos sirve para medir ángulos y distancias ("hacer" geometría).

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ (dos vectores se transforma en un número) ⟶ $f: R^2 \times R^2 \to R$ $\quad f(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$ $\quad$ **f forma bilineal**

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ ⟶ $f(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v},\vec{u})$ $\quad$ **f simétrica**

Norma o módulo: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$ ⟶ $\omega: R^2 \to R$ $\quad \omega(\vec{u}) = f(\vec{u},\vec{u})$ $\quad$ **ω forma cuadrática**

Vectores perpendiculares u ortogonales. $\qquad$ **Vectores conjugados.**



$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ ⟶ $\vec{u}$ conjugado con $\vec{v} \iff f(\vec{u},\vec{v}) = 0$

Definición. Dada una **forma cuadrática** $\omega: U \to R$ asociada a una **forma bilineal simétrica** $f: U \times U \to R$ se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **conjugados** respecto de ω, si $f(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Ejemplo: $\omega\left((x,y)\right) = x^2 + 4xy$

$$F_c = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \end{array}$$

¡OJO!.
Fuera de la diagonal. DIVIDIDOS entre DOS

¿$(1,0)$ y $(0,1)$ conjugados? $\quad f\left((1,0),(0,1)\right) = (1\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ **¡NO!**

¿$(1,0)$ y $(2,-1)$ conjugados? $\quad f\left((1,0),(2,-1)\right) = (1\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ **¡SI!**

¿$(0,1)$ y $(0,1)$ conjugados? $\quad f\left((0,1),(0,1)\right) = (0\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\ \ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ **¡SI!**

Vector…¡conjugado consigo mismo!

$\vec{u}$ es **AUTOCONJUGADO** respecto de ω, si $f(\vec{u},\vec{u}) = 0 \iff \omega(\vec{u}) = 0$.

Subespacio conjugado (I).

Dada una **forma cuadrática** $\omega: U \to R$ asociada a una **forma bilineal simétrica** $f: U \times U \to R$:

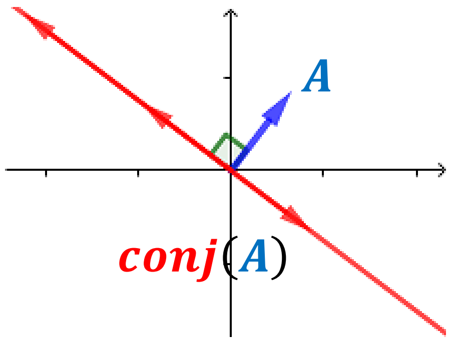
- $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **conjugados** respecto de ω, si $f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
- $\vec{u}$ es **AUTOCONJUGADO** respecto de ω, si $f(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \omega(\vec{u}) = 0$.

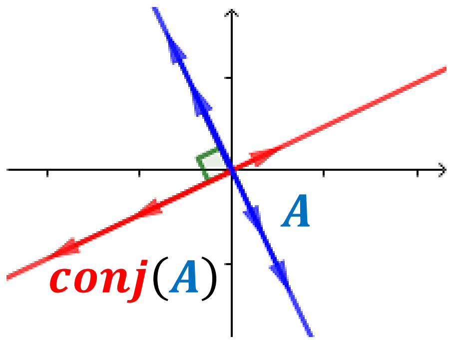
- $A \subset U$ conjunto de vectores $\Rightarrow conj(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de } \textbf{vectores} \\ \textbf{conjugados} \text{ a } \textbf{todos} \text{ los de } A \end{array} \right\}$

Subespacio conjugado de **A** respecto de ω.

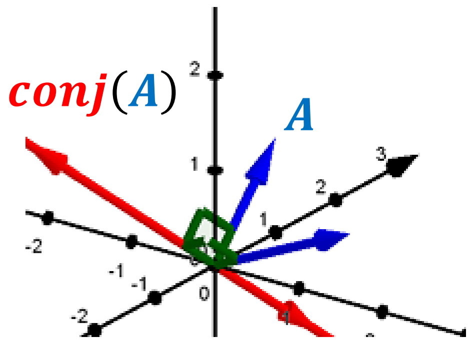
Ejemplos.

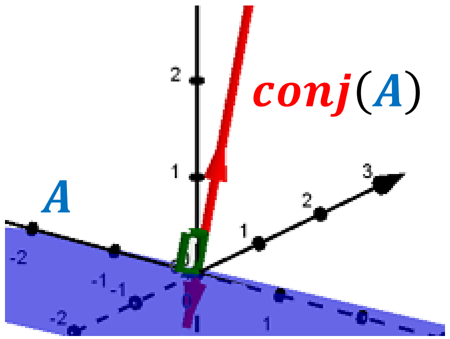
En el plano R^2 con el **producto escalar usual**





En el espacio R^3 con el **producto escalar usual**





Subespacio conjugado (II).

Dada una **forma cuadrática** $\omega: U \to R$ asociada a una **forma bilineal simétrica** $f: U \times U \to R$:

Subespacio conjugado de **A** respecto de ω.

$$A \subset U \text{ conjunto de vectores } \Rightarrow conj(A) = \{\vec{v} \in U \mid f(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ para todo } \vec{u} \in A\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de vectores} \\ \text{conjugados a todos los de } A \end{array} \right\}$$

Propiedades:

1) $conj(A)$ es un **subespacio vectorial** de U.

PRUEBA

BILINELIDAD

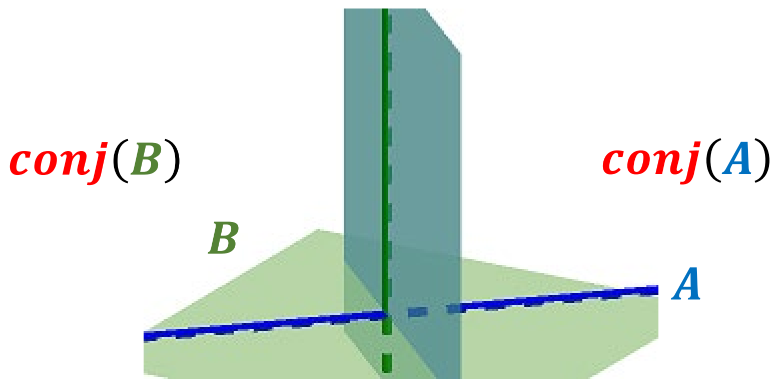
i) $\vec{0} \in conj(A) \Leftrightarrow$ ¿ Para todo $\vec{u} \in A$ se cumple $f(\vec{u}, \vec{0}) = 0$?

$$f(\vec{u}, \vec{0}) = f(\vec{u}, 0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{u}, \vec{0})$$

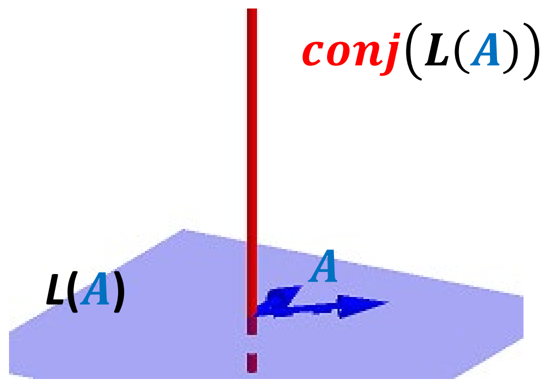
ii) $\left. \begin{array}{l} \vec{v}, \vec{w} \in conj(A) \\ \lambda, \mu \in R \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in conj(A) \Leftrightarrow$ ¿ Para todo $\vec{u} \in A$ se cumple $f(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = 0$?

$$f(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda \cdot f(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \cdot f(\vec{u}, w) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0$$

2) $A \subset B \Rightarrow conj(B) \subset conj(A)$



3) $conj(L(A)) = conj(A)$



Subespacio conjugado (III).

Ejemplo: Dada la forma cuadrática $\omega: R^3 \to R$ definida como $\omega(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xy + z^2$ y el subespacio vectorial $V = L\{(1,2,1),(2,1,1),(3,3.2)\}$, hallar $conj(V)$.

1) Comprobamos si los **generadores** de V son **independientes.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{21}(-2)]{H_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_2(-1)]{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = L\{(1,2,1),(0,3,1)\}$$

$$\dim(V) = 2$$

2) Calculamos la **matriz asociada** a la forma cuadrática en la base canónica.

$$F_C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}$$

3) $conj(L(A)) = conj(A)$

3) Calculamos $conj(V)$.

$$conj(V) = conj(\{(1,2,1),(0,3,1)\}) = \left\{ (x,y,z) \in R^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} f((x,y,z),(1,2,1)) = 0 \\ f((x,y,z),(0,3,1)) = 0 \end{array} \right\}$$

$$f((x,y,z),(1,2,1)) = 0 \Leftrightarrow (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + 3y + z = 0$$

$$f((x,y,z),(0,3,1)) = 0 \Leftrightarrow (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + 3y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3x + 3y + z = 0}$$

Ecuación implícita de $conj(V)$

Eliminamos **dependientes**

$$z = -3x - 3y \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -3\lambda - 3\mu \end{cases}}$$

Ecuaciones paramétricas de $conj(V)$

$$\boxed{conj(V) = L\{(1,0,-3)(0,1,-3)\}}$$

$$\dim(conj(V)) = 2$$