Álgebra Lineal II

TEMA II- Espacios vectoriales euclídeos.

Capítulo 3. Transformaciones ortogonales.

Transformaciones ortogonales en el plano.
Giros y simetrías.

Luis Fuentes García (2022).

Construcción de un giro en el plano.

Datos para construir un giro: a) **Producto escalar** y **base** de referencia B_0 que da la **orientación positiva**.
b) **Ángulo de giro α**.

Pasos:

1) Construir una **base ortonormal** $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ con **orientación positiva**.

1.1) Construir una **base ortonormal** $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ (por ejemplo diagonalizando la matriz de Gram).

1.2) Corregir la orientación comprobando $det(M_{BB'})$

Si $det(M_{BB'}) > 0$ **orientación correcta**. Nos quedamos con $B = B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

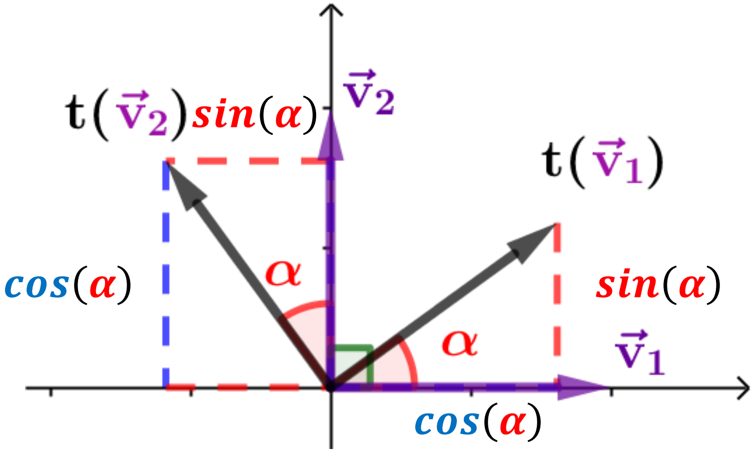
Si $det(M_{BB'}) < 0$ orientación opuesta. La corregimos tomando: $B = \{\vec{u}_1, -\vec{u}_2\}$.

2) Construimos la **matriz asociada** T_B en la **base ortonormal** con **orientación positiva** $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ calculada antes.

$$t(\vec{v}_1) = cos(\alpha)\vec{v}_1 + sin(\alpha)\vec{v}_2$$
$$t(\vec{v}_2) = -sin(\alpha)\vec{v}_1 + cos(\alpha)\vec{v}_2$$

$$\boxed{T_B = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}}$$

Matriz de giro de ángulo α



3) Hacemos un **cambio de base**.

$$T_C = M_{CB} T_B M_{BC}$$

Construcción de un giro en el plano. Ejemplo I.

Datos para construir un giro: a) **Producto escalar** y **base** de referencia B_0 que da la **orientación positiva**.
b) **Ángulo de giro α**.

Pasos:

1) Construir una **base ortonormal** $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ con **orientación positiva**.
2) Construimos la **matriz asociada** T_B
3) Hacemos un **cambio de base** $T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$

$$T_B = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Ejemplo típico. **Condiciones usuales**: **producto escalar usual** y **orientación positiva** dada por la **base canónica**.

Calcular la **matriz de giro** de **ángulo** $\alpha = 30^o$

1) La **base canónica**…¡ya es una **base ortonormal** con **orientación positiva**!. Tomamos $B = C$.

2)

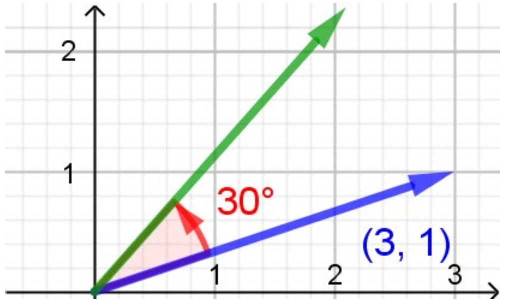
$$T_C = \begin{pmatrix} cos(30^o) & -sin(30^o) \\ sin(30^o) & cos(30^o) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}}$$

3) Ya trabajamos en la **canónica**.
¡**NO** hace falta **cambio de base**!.

Observación. La matriz sirve para girar cualquier vector.

Por ejemplo para girar el vector $(3, 1)$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3\sqrt{3}-1)/2 \\ (3+\sqrt{3})/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.37 \end{pmatrix}$$



Construcción de un giro en el plano. Ejemplo II.

Pasos:

1) Construir una **base ortonormal** $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ con orientación positiva.
2) Construimos la **matriz asociada** T_B
3) Hacemos un **cambio de base** $T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$

$$T_B = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Producto escalar dado por $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y orientación positiva dada por la **base** canónica.

Calcular la **matriz de giro** de **ángulo** $\alpha = 30^o$

1) Usamos que en una **base ortonormal** B, $G_B = Id$

$$G_C \xrightarrow[\text{CONGRUENCIA}]{} Id = G_B \qquad Id \xrightarrow[\text{OP. COLUMNA}]{} M_{CB}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-1)]{H_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{2}(1/2)]{H_{2}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = G_B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{2}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

$$B = \{(1,0), (-1/2, 1/2)\}$$

¿Orientación? $det(M_{CB})$ ¡Correcta!

2)

$$T_B = \begin{pmatrix} cos(30^o) & -sin(30^o) \\ sin(30^o) & cos(30^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

3) **Cambio de base.**

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1+2\sqrt{3} & -5 \\ 1 & 1+2\sqrt{3} \end{pmatrix}}$$

Construcción de una simetría respecto a una recta en el plano.

Datos para construir una simetría respecto a una recta: a) Producto escalar. b) Eje de simetría $L\{\vec{u}_1\}$.

Pasos:

1) Construir una **base ortogonal** $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

   Esto supone calcular un vector $\vec{u}_2$ ortogonal al generador del eje $\vec{u}_1$.

2) Construimos la **matriz asociada** T_B en la **base ortogonal** $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

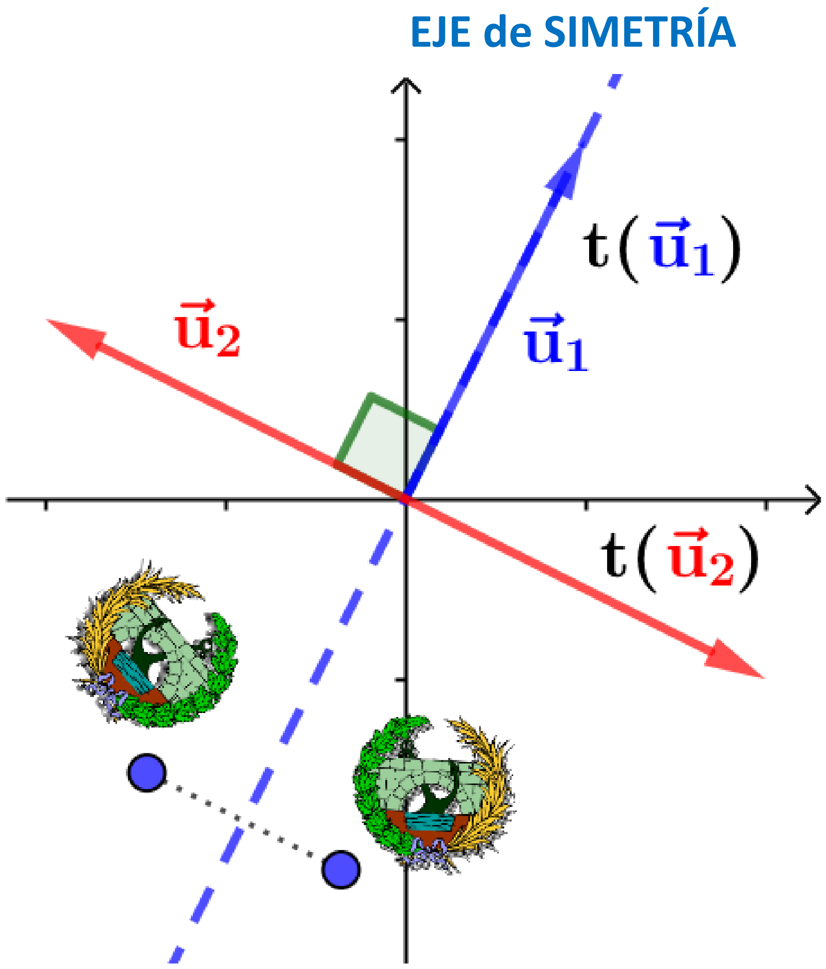
$$t(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 = 1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2$$

$$t(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2 = 0 \cdot \vec{u}_1 - 1 \cdot \vec{u}_2$$

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Hacemos un **cambio de base**.

$$T_C = M_{CB} T_B M_{BC} = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$$



Construcción de una simetría respecto a una recta en el plano. Ejemplo.

Datos para construir una simetría respecto a una recta: a) Producto escalar. b) Eje de simetría $L\{\vec{u}_1\}$.

Pasos: 1) Construir una **base <u>ortogonal</u>** $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

2) Construimos la **matriz asociada** T_B en la **base ortogonal** $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) Hacemos un **cambio de base** $T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$

Ejemplo. Producto escalar dado por $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ dar la **matriz de una simetría** respecto a la recta $L\{(2,1)\}$

1) Tenemos $\vec{u}_1 = (2,1)$ y buscamos $\vec{u}_2 = (x,y)$ ortogonal a $\vec{u}_1$

$$(x,y)\cdot(2,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 7y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{7}{3}y \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2 = (-7,3)$$

$$\boxed{y = 3}$$

Base ortogonal $B = \{\underbrace{(2,1)}_{\text{EJE}}, \underbrace{(-7,3)}_{\text{EJE}^\perp}\}$

2)

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Cambio de base:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & 28 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}$$

Clasificación de transformaciones ortogonales en el plano (I).

Objetivo: Demostrar que una **transformación ortogonal en el plano** o es un **giro** o una **simetría respecto a una recta**.

Resultados previos:

$\boldsymbol{t}: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}$ es una **transformación ortogonal** y $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}$ es **autovalor** de $\boldsymbol{t} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \pm 1$

$\boldsymbol{t}: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}$ es **ortogonal** y **diagonalizable** $\Rightarrow$ existe una **base ortonormal de autovectores.**

$\boldsymbol{t}: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}$ es **ortogonal** y tiene todos los **autovalores reales** $\Rightarrow$ **es diagonalizable**

Sea $\boldsymbol{t}: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ una **transformación ortogonal del plano**

Caso 1: Todos los **autovalores** son **reales**.

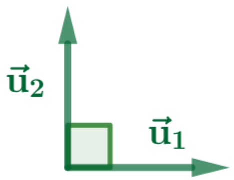
$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{t} \text{ es diagonalizable} \\ \text{Existe una base ortonormal de autovectores } \boldsymbol{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{T_B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\lambda_1} = \pm 1 \qquad \boldsymbol{\lambda_2} = \pm 1$

$\boldsymbol{t}(\vec{u}_1) = \pm \vec{u}_1 \qquad \boldsymbol{t}(\vec{u}_2) = \pm \vec{u}_2$

Caso 1.1

$\boldsymbol{\lambda_1} = +1, \boldsymbol{\lambda_2} = +1 \qquad \boldsymbol{T_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



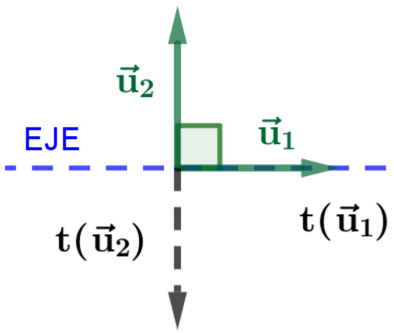
$\boldsymbol{t}(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$

$\boldsymbol{t}(\vec{u}_2) = \vec{u}_2$

GIRO DE 0^o

Caso 1.2

$\boldsymbol{\lambda_1} = +1, \boldsymbol{\lambda_2} = -1 \qquad \boldsymbol{T_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



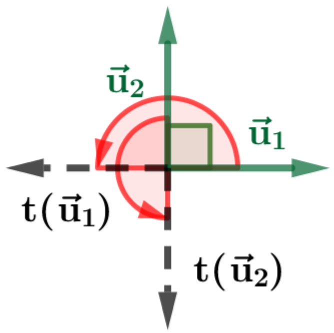
$\boldsymbol{t}(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$

$\boldsymbol{t}(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2$

SIMETRÍA RESPECTO RECTA

Caso 1.3

$\boldsymbol{\lambda_1} = -1, \boldsymbol{\lambda_2} = -1 \qquad \boldsymbol{T_B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



$\boldsymbol{t}(\vec{u}_1) = -\vec{u}_1$

$\boldsymbol{t}(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2$

GIRO DE 180^o

Clasificación de transformaciones ortogonales en el plano (II).

Sea $t: R^2 \to R^2$ una **transformación ortogonal del plano**

Caso 2: NO todos los **autovalores** son **reales**.

B **base ortonormal** $\quad T_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

t **ortogonal** $\Leftrightarrow T_B^t T_B = Id$

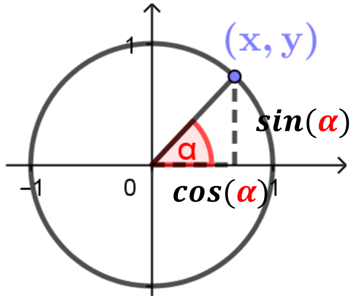
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + c^2 = 1$$
$$ab + cd = 0$$
$$b^2 + d^2 = 1$$

$x^2 + y^2 = 1$

$x = cos(\alpha)$

$y = sin(\alpha)$



$$a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \boxed{(a, c) = (cos(\alpha), sin(\alpha))}$$
$$b^2 + d^2 = 1 \Rightarrow \boxed{(b, d) = (cos(\beta), sin(\beta))}$$
$$ab + cd = 0 \Rightarrow cos(\alpha)cos(\beta) + sin(\alpha)sin(\beta) = 0$$
$$\Rightarrow cos(\alpha - \beta) = 0 \quad \begin{cases} \boxed{\alpha - \beta = -90^o} \\ \alpha - \beta = 90^o \end{cases}$$

Polinomio característico.

$$det(T_B - \lambda Id) = det\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$$

Autovalores = **Raíces del polinomio característico** **¡NO SON REALES!**

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\lambda = \frac{-(a + d)^2 \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

$$(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$$
$$(a + d)^2 < 4(ad - bc)$$
$$ad - bc > 0$$

$$cos(\alpha)sin(\beta) - cos(\beta)sin(\alpha) > 0$$
$$sin(\beta - \alpha) > 0$$
$$\beta - \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha - \beta < 0}$$

Clasificación de transformaciones ortogonales en el plano (III).

Sea $t: R^2 \to R^2$ una **transformación ortogonal del plano**

Caso 2: NO todos los **autovalores** son **reales**.

B **base ortonormal** $\quad T_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

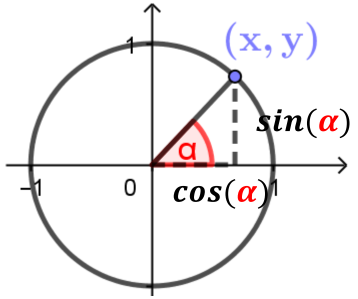
t **ortogonal** $\Updownarrow$ $T_B^t T_B = Id$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + c^2 = 1$$
$$ab + cd = 0$$
$$b^2 + d^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x = \cos(\alpha)$$
$$y = \sin(\alpha)$$



$$a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow (a, c) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$
$$b^2 + d^2 = 1 \Rightarrow (b, d) = (\cos(\beta), \sin(\beta))$$
$$ab + cd = 0 \Rightarrow \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = 0$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\boxed{\alpha - \beta = -90^o}$$
$$\alpha - \beta = 90^o$$

$$\alpha - \beta = -90^o \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha + 90^o$$

$$(b, d) = (\cos(\beta), \sin(\beta)) = (\cos(\alpha + 90^o), \sin(\alpha + 90^o)) = (\sin(-\alpha)), \cos(-\alpha))$$

$$(b, d) = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

$$\cos(A) = \sin(90^o - A)$$
$$\sin(A) = \cos(90^o - A)$$

$$T_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

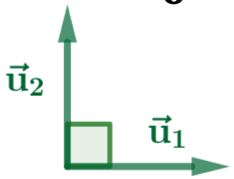
Matriz de giro de ángulo α

Clasificación de transformaciones ortogonales en el plano (IV).

Sea $\boldsymbol{t}: R^2 \to R^2$ una **transformación ortogonal del plano.** Existe una base **ortonormal B tal que**

Autovalores: $+1, +1$

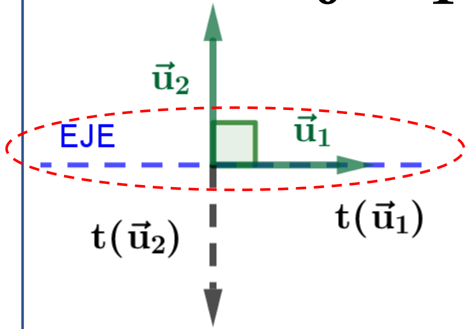
$$T_B = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$



GIRO de 0^o

Autovalores: $+1, -1$

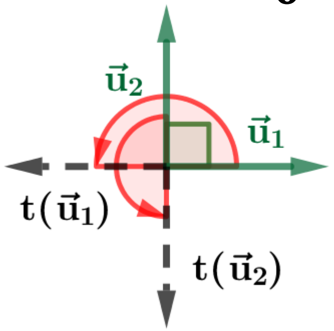
$$T_B = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



SIMETRÍA respecto RECTA

Autovalores: $-1, -1$

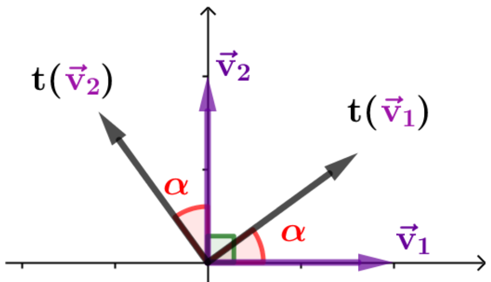
$$T_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



GIRO de 180^o

<u>NO</u> Autovalores reales

$$T_B = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$



GIRO de ángulo α

<u>Como **clasificar rápidamente** una **transformación ortogonal en el plano**</u>.

<u>Dato</u>: T_C

Usamos que: $T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$

$$det(T_B) = det(T_C)$$

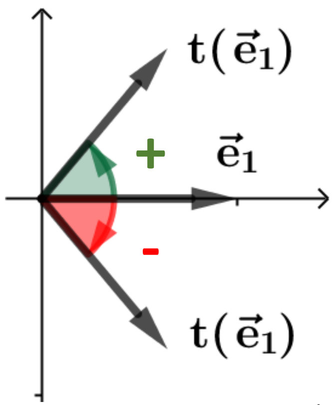
$$traza(T_B) = traza(T_C)$$

GIRO de ángulo α

$$det(T_B) = cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = +1$$

$$traza(T_B) = cos(\alpha) + cos(\alpha) = 2cos(\alpha)$$

DIRECTA $det(T_C) = +1$	**GIRO de ángulo α** $\alpha = \pm arccos(traza(T_C)/2)$ $D = \{\vec{e}_1, t(\vec{e}_1)\}$ $\quad t(\vec{e}_1) = T_C(\vec{e}_1)$ $signo(\alpha) = signo(\lvert M_{CD} \rvert)$
INVERSA $det(T_C) = -1$	**SIMETRÍA RESPECTO A UNA RECTA:** $L\{\vec{u}_1\}, \vec{u}_1$ **autovector** asociado a **+1**



Clasificación de transformaciones ortogonales en el plano. Ejemplo (I).

Condiciones usuales:
Producto escalar usual. **Orientación positiva**: **base canónica**.

Dada una **transformación ortogonal** $t: R^2 \to R^2$ de matriz asociada

$$T_C = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Clasificarla e **interpretarla geométricamente**.

DIRECTA $det(T_C) = +1$	**GIRO de ángulo α** $\alpha = \pm arccos(traza(T_C)/2)$ $D = \{\vec{e}_1, t(\vec{e}_1)\}$ $t(\vec{e}_1) = T_C(\vec{e}_1)$ $signo(\alpha) = signo(\lvert M_{CD}\rvert)$
INVERSA $det(T_C) = -1$	**SIMETRÍA RESPECTO A UNA RECTA:** $L\{\vec{u}_1\}, \vec{u}_1$ autovector asociado a **+1**

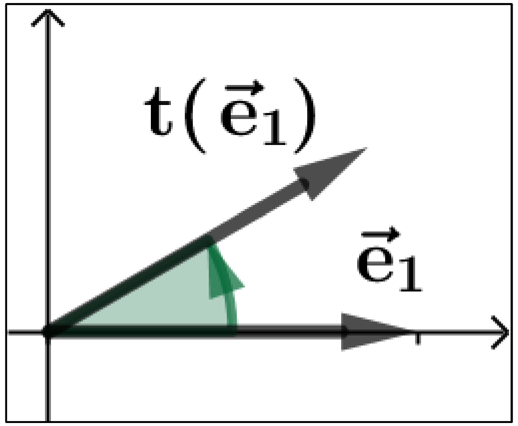
$$det(T_C) = det\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \left(\sqrt{3}/2\right)^2 + (1/2)^2 = +1 \quad \Rightarrow$$ **GIRO de ángulo α**

$$\alpha = \pm arccos(traza(T_C)/2) = \pm arccos\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)/2\right) = \pm arccos\left(\sqrt{3}/2\right) = \pm 30^o$$

$$D = \{\vec{e}_1, t(\vec{e}_1)\} \qquad \vec{e}_1 = (1,0) \qquad t(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$D = \left\{(1,0), \left(\sqrt{3}/2, 1/2\right)\right\}$$

$$signo(\alpha) = signo(\lvert M_{CD}\rvert) = signo\left|\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right| > 0$$



GIRO de ángulo $+30^o$

Clasificación de transformaciones ortogonales en el plano. Ejemplo (II).

Producto escalar: $\mathbf{G}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. **Orientación positiva**: **canónica**.

Dada una **transformación ortogonal** t: $R^2 \to R^2$ de matriz asociada

$$T_C = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & 28 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Clasificarla e **interpretarla geométricamente**.

DIRECTA $det(T_C) = +1$	**GIRO de ángulo α** $\alpha = \pm arccos(traza(T_C)/2)$ $D = \{\vec{e}_1, t(\vec{e}_1)\}$ $\quad t(\vec{e}_1) = T_C(\vec{e}_1)$ $signo(\alpha) = signo(\lvert M_{CD} \rvert)$
INVERSA $det(T_C) = -1$	**SIMETRÍA RESPECTO A UNA RECTA:** $L\{\vec{u}_1\}, \vec{u}_1$ **autovector** asociado a **+1**

$$det(T_C) = det\left(\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & 28 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{13^2} det\begin{pmatrix} -1 & 28 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13^2}\cdot(-169) = -1 \quad \Rightarrow$$

SIMETRÍA RESPECTO A UNA RECTA

<u>Eje de simetría:</u> $L\{\vec{u}_1\}, \vec{u}_1$ **autovector** asociado a **+1**

$$(T_C - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1-13 & 28 \\ 6 & 1-13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} -14x + 28y = 0 \\ 6x - 12y = 0 \end{cases}$$

¡Dependientes!

$$x - 2y = 0$$

$$x = 2y \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (2, 1)$$

$\boxed{y = 1}$

SIMETRÍA RESPECTO A LA RECTA $L\{(2,1)\}$