Álgebra Lineal II

TEMA II- Espacios vectoriales euclídeos.

Capítulo 3. Transformaciones ortogonales.

Transformaciones ortogonales en el espacio.

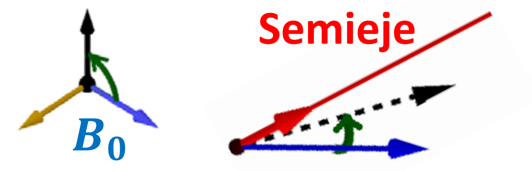
Giros y simetrías.

Luis Fuentes García (2022).

Construcción de un giro en el espacio.

Datos : a) Producto escalar y base de referencia B_0 que da la orientación positiva.

b) Semieje de giro generador por $\vec{u}_1$, ángulo de giro α.



1) Construir una <u>base ortogonal</u> tomando como <u>**primer vector el semieje $\vec{u}_1$**</u>. $B_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$

i) $\vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$

ii) $\vec{u}_3 \perp \vec{u}_1, \vec{u}_3 \perp \vec{u}_2$

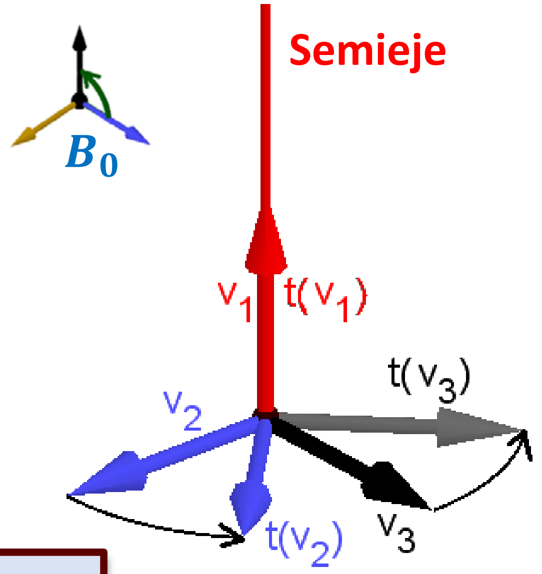
2) <u>**Comprobar la orientación**</u> de la base B_1 comparando con la base de referencia B_0

$det(M_{B_0B_1})$ → >0 ¡Orientación positiva! O.K.

→ <0 ¡Orientación negativa! Se corrige cambiando el signo del 2º o 3er vector.

3) <u>Base ORTONORMAL</u> $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ dividiendo cada vector de B_1 por su norma

$$\vec{v}_1=\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \qquad \vec{v}_2=\frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} \qquad \vec{v}_3=\frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}$$



4) En la **base** B la **matriz de giro** es:

$$T_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

Matriz de Giro en el **plano** $\perp$ a $\vec{u}_1$

5) Hacemos un **cambio de base**. $T_C=M_{CB}T_BM_{BC}=M_{CB}T_BM_{CB}^{-1}$

Si la base C de partida es ortonormal, M_{CB} es una <u>**matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales**</u>, la inversa coincide con la traspuesta: $M_{CB}^{-1}=M_{CB}^{t}$.
Típicamente esto ocurre **si trabajamos con el** producto escalar usual

Ejemplo 1. En R^3 con el **producto escalar usual** y con la **orientación positiva dada por la base canónica**, calcular la **matriz de giro** de **semieje** generado por $\vec{u}_1 = (0,1,1)$ y ángulo $\alpha = 90^o$.

1) Calculamos una **base ortogonal** $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

$$\vec{u}_2 = (x,y,z), \quad \vec{u}_2 \perp \vec{u}_1 \Rightarrow (x,y,z)\cdot(0,1,1) = 0 \Rightarrow y+z=0 \Rightarrow \vec{u}_2 = (0,1,-1)$$

$$\vec{u}_3 = (x,y,z) \quad \begin{cases} \vec{u}_3 \perp \vec{u}_1 \Rightarrow (x,y,z)\cdot(0,1,1) = 0 \Rightarrow y+z=0 \\ \vec{u}_3 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow (x,y,z)\cdot(0,1,-1) = 0 \Rightarrow y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_3 = (1,0,0)$$

2) Comprobamos la **orientación de la base**:

$$det(M_{CB_1}) = det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

ORIENTACIÓN NEGATIVA

Cambiamos el signo del segundo vector:

$$B_1 = \{(0,1,1), (0,-1,1), (1,0,0)\}$$

3) Construimos una **base ortonormal** dividiendo los **vectores por su norma**:

$$B = \left\{\frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|}, \frac{(0,-1,1)}{\|(0,-1,1)\|}, \frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|}\right\} = \left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1,0,0)\right\}$$

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

4) La **matriz de giro** en la **base B** sabemos que es

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^o) & -\sin(90^o) \\ 0 & \sin(90^o) & \cos(90^o) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Producto escalar usual} \Rightarrow \textbf{Base canónica } C \textbf{ ortonormal} \\ \textbf{Por construcción} \Rightarrow \text{Base } B \textbf{ ortonormal} \end{array}\right\} \Rightarrow M_{CB}^{-1} = M_{CB}^{t}$$

5) **Cambio de base**

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = M_{CB} T_B M_{CB}^{t} = \text{cuentas} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. En R^3 con el **producto escalar** dado por la **matriz de Gram** $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y con la **orientación positiva dada por la base canónica**, calcular la **matriz de giro** de **semieje** generado por $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$ y ángulo $\alpha = 90^o$

1) Calculamos una **base ortogonal** $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

$$\vec{u}_2 = (x, y, z), \qquad \vec{u}_2 \perp \vec{u}_1 \Rightarrow \boxed{(x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = 0 \Rightarrow (x, y, z) G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0} \Rightarrow \vec{u}_2 = (1, 0, 0)$$

$$\vec{u}_3 = (x, y, z) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_3 \perp \vec{u}_1 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0} \\ \vec{u}_3 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow (x, y, z) G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + z = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_3 = (1, -1, 0)$$

2) Comprobamos la **orientación de la base**:

$$\det(M_{CB_1}) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

ORIENTACIÓN POSTIVA

NO modificamos la base.

3) Construimos una **base ortonormal** dividiendo los **vectores por su norma**:

$$B = \left\{ \frac{(1, 0, -1)}{\|(1, 0, -1)\|}, \frac{(1, 0, 0)}{\|(1, 0, 0)\|}, \frac{(1, -1, 0)}{\|(1, -1, 0)\|} \right\}$$

$$\|(1, 0, -1)\| = \sqrt{(1 \quad 0 \quad -1) G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\|(1, 0, 0)\| = \sqrt{(1 \quad 0 \quad 0) G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\|(1, -1, 0)\| = \sqrt{(1 \quad -1 \quad 0) G_C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$

Ejemplo 2. En R^3 con el **producto escalar** dado por la **matriz de Gram** $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y con la **orientación positiva dada por la base canónica**, calcular la **matriz de giro** de **semieje** generado por $\vec{u}_1 = (1,0,-1)$ y ángulo $\alpha = 90^o$

3) Construimos una **base ortonormal** dividiendo los **vectores por su norma**:

$$B = \left\{ \frac{(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|}, \frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|}, \frac{(1,-1,0)}{\|(1,-1,0)\|} \right\} = \{\boxed{(1,0,-1)}, \boxed{(1,0,0)}, \boxed{(1,-1,0)}\}$$

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) La **matriz de giro** en la **base B** sabemos que es

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^o) & -\sin(90^o) \\ 0 & \sin(90^o) & \cos(90^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5) **Cambio de base**

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = \text{cuentas} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Producto escalar NO usual $\Rightarrow$ **Base canónica C NO ortonormal**

M_{CB} **NO** es una **matriz de cambio de base** entre bases **ortonormales**

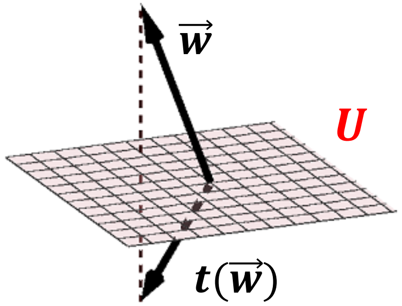
La **inversa** de M_{CB} **NO** coincide con su **traspuesta**.

Construcción de una simetría respecto a un plano en el espacio.

Datos :

a) Producto escalar.

b) Plano de simetría: $U = L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.



1) Construir una base B **añadiendo a los generadores del plano** un **vector ortogonal** a ellos.

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \qquad \vec{u}_3 \perp \vec{u}_1 \qquad \vec{u}_3 \perp \vec{u}_2$$

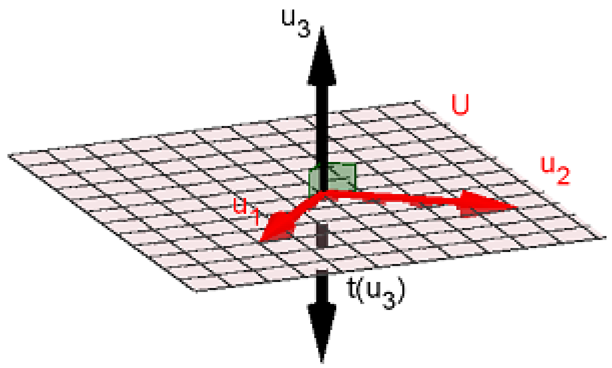
2) Calculamos la **base** B la **matriz de la simetría**:

$$t(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 = 1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3$$
$$t(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 = 0 \cdot \vec{u}_1 + 1 \cdot \vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3$$
$$t(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3 = 0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 - 1 \cdot \vec{u}_3$$

Plano de simetría.

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

Recta ortogonal al plano



3) Hacemos un **cambio de base**.

$$T_C = M_{CB} T_B M_{BC} = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$$

NO construimos B **ortonormal**

M_{CB} **NO** es una **matriz de cambio** entre bases **ortonormales** $\quad M_{CB}^{-1} \neq M_{CB}^{t}$

Ejemplo 3. En R^3 con el **producto escalar usual** y con la **orientación positiva dada por la base canónica**, calcular la **matriz de** una **simetría respecto al plano generador por** $\vec{u}_1 = (1,1,0)$ y $\vec{u}_2 = (1,0,1)$

1) Calculamos una **base** $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ añadiendo el vector $\vec{u}_3$ ortogonal al plano.

$$\vec{u}_3 = (x,y,z) \quad \begin{cases} \vec{u}_3 \perp \vec{u}_1 & \Rightarrow \quad (x,y,z)\cdot(1,1,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x+y=0 \\ \vec{u}_3 \perp \vec{u}_2 & \Rightarrow \quad (x,y,z)\cdot(1,0,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x+z=0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$\begin{matrix} y = -x \\ z = -x \end{matrix} \quad \underset{\boxed{x=1}}{\Rightarrow} \quad \vec{u}_3 = (1,-1,-1)$$

$$B = \{\underbrace{(1,1,0),(1,0,1)}_{\text{PLANO de SIMETRÍA}}, \underbrace{(1,-1,-1)}_{\text{RECTA ORTOGONAL}}\}$$

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) La **matriz de la simetría** en la base B sabemos que es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

Plano de simetría.

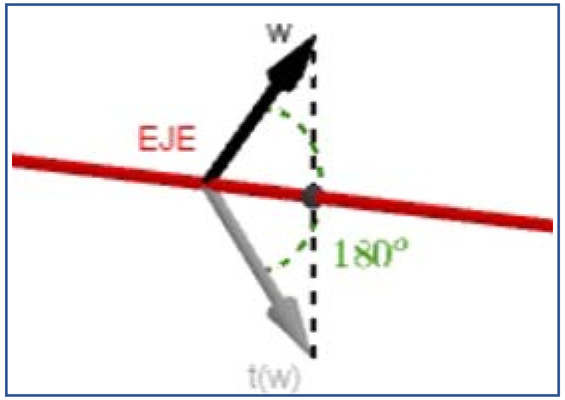
Recta ortogonal al plano

3) **Cambio de base**

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = \text{cuentas} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

Construcción de una simetría respecto a una recta en el espacio.

Observación: Una **simetría** respecto a una recta es un **giro de 180^o**



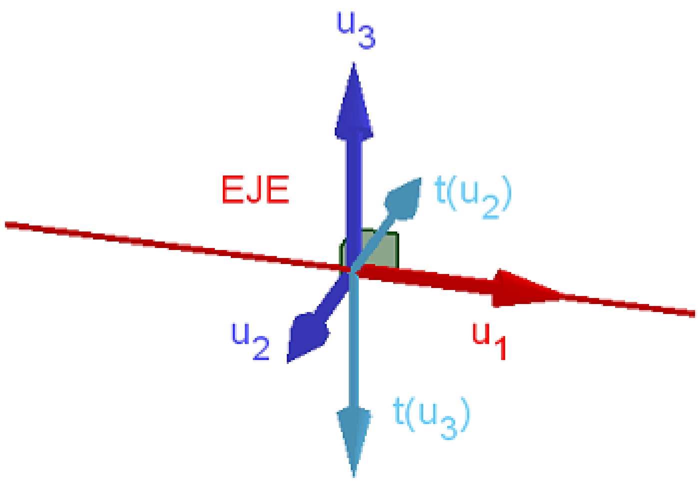
Datos :

a) **Producto escalar**.

b) **EJE** de simetría: $U = L\{\vec{u}_1\}$.

1) Construir una base B **añadiendo DOS vectores ortogonales al eje $\vec{u}_1$**

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \qquad \vec{u}_2 \perp \vec{u}_1 \qquad \vec{u}_3 \perp \vec{u}_1$$



2) Calculamos la **base B** la **matriz de la simetría**:

$$t(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 = 1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3$$

$$t(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2 = 0 \cdot \vec{u}_1 - 1 \cdot \vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3$$

$$t(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3 = 0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 - 1 \cdot \vec{u}_3$$

Eje de simetría.

$$T_B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Plano ortogonal al eje

3) Hacemos un **cambio de base**.

$$T_C = M_{CB} T_B M_{BC} = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$$

NO construimos B **ortonormal**

M_{CB} **NO** es una **matriz de cambio** entre bases **ortonormales** $\quad M_{CB}^{-1} \neq M_{CB}^{t}$

Ejemplo 4. En R^3 con el producto escalar usual y con la **orientación positiva dada por la base canónica**, calcular la **matriz de** una **simetría respecto a la recta generada por** $\vec{u}_1 = (1,1,0)$.

1) Calculamos una **base** $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ añadiendo dos vectores $\vec{u}_2, \vec{u}_3$ ortogonal al **eje** $\vec{u}_1$.

$$\vec{u} = (x,y,z), \qquad \vec{u} \perp \vec{u}_1 \qquad \Rightarrow \quad (x,y,z)\cdot(1,1,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ y = -a \\ z = b \end{cases}$$

Paramétricas.

$$B = \{\boxed{(1,1,0)}, \boxed{(1,-1,0)}, \boxed{(0,0,1)}\}$$

EJE SIMETRÍA

PLANO ORTOGONAL

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) La **matriz de la simetría** en la base B sabemos que es:

$$T_B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eje de simetría.

Plano ortogonal al plano

3) **Cambio de base**

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = \text{cuentas} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$