Álgebra Lineal II

TEMA III- Espacios afines.

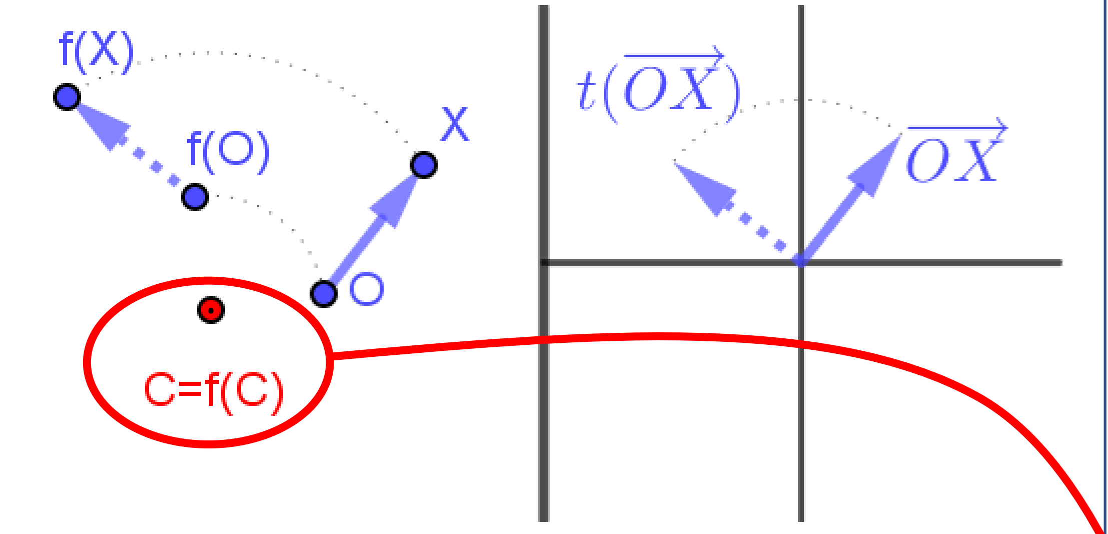
Capítulo 1. El espacio afín.

Transformaciones afines.

Luis Fuentes García (2022).

Transformaciones afines.

Espacio afín euclídeo E **Espacio vectorial V**



$f: \boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{E}$ **afín** $t: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$ **lineal**

Una aplicación $f: \boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{E}$ se llama <u>**transformación afín**</u> si existe un **automorfismo**(*) $t: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$ cumpliendo:

$$\forall \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{E}, \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Q})} = \boldsymbol{t}(\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}})$$

Fijado $\boldsymbol{O}$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{O})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})} = \boldsymbol{t}(\overrightarrow{\boldsymbol{OX}}) \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{O}) = \boldsymbol{t}(\overrightarrow{\boldsymbol{OX}})$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{O}) + \boldsymbol{t}(\overrightarrow{\boldsymbol{OX}})}$$

En el **plano afín $\boldsymbol{R}^2$** fijada una referencia:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\text{AFÍN}} + \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}^{t}}_{\text{VECTORIAL}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En el **espacio afín $\boldsymbol{R}^3$** fijada una referencia:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}_{\text{AFÍN}} + \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}^{t}}_{\text{VECTORIAL}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

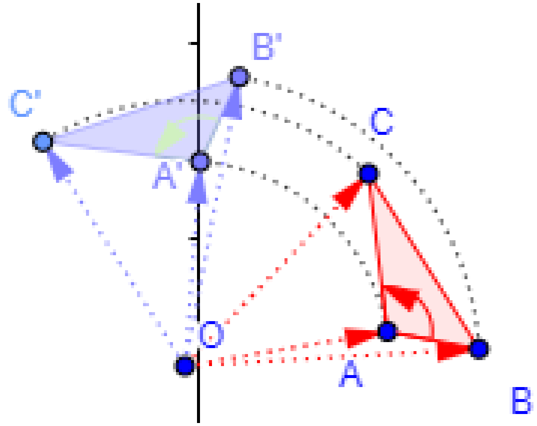
$f(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$ $\quad$ $\boldsymbol{C}$ <u>**punto fijo**</u> o <u>**doble**</u>

(*) **automorfismo** = **Aplicación lineal** de $\boldsymbol{V}$ **en** $\boldsymbol{V}$ que es **biyectiva**.

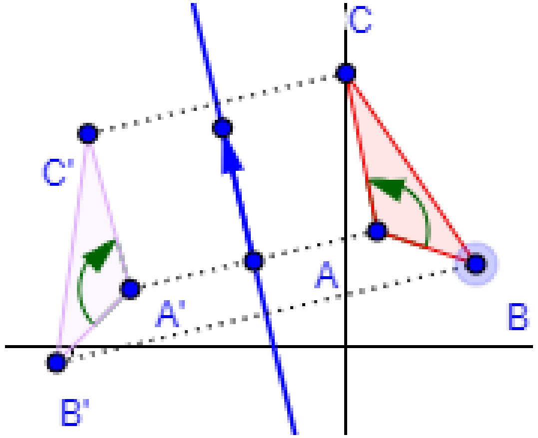
Tipos de transformaciones afines.

ISOMETRÍAS. Son **transformaciones afines** que **conservan la distancia**.

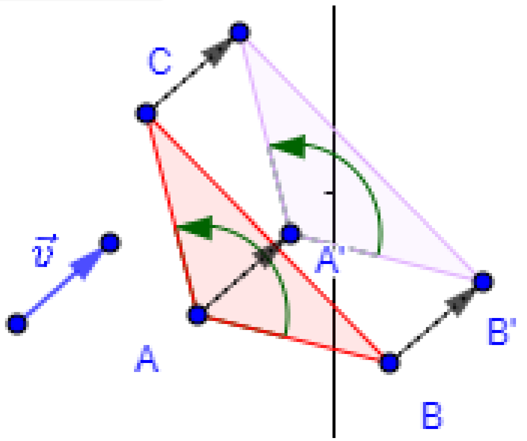
GIROS.



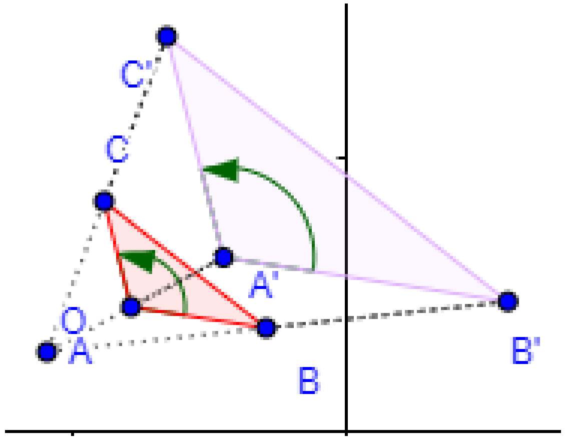
SIMETRÍAS.



TRASLACIONES.



HOMOTECIAS. Son **transformaciones afines** que **“escalan” los objetos.**

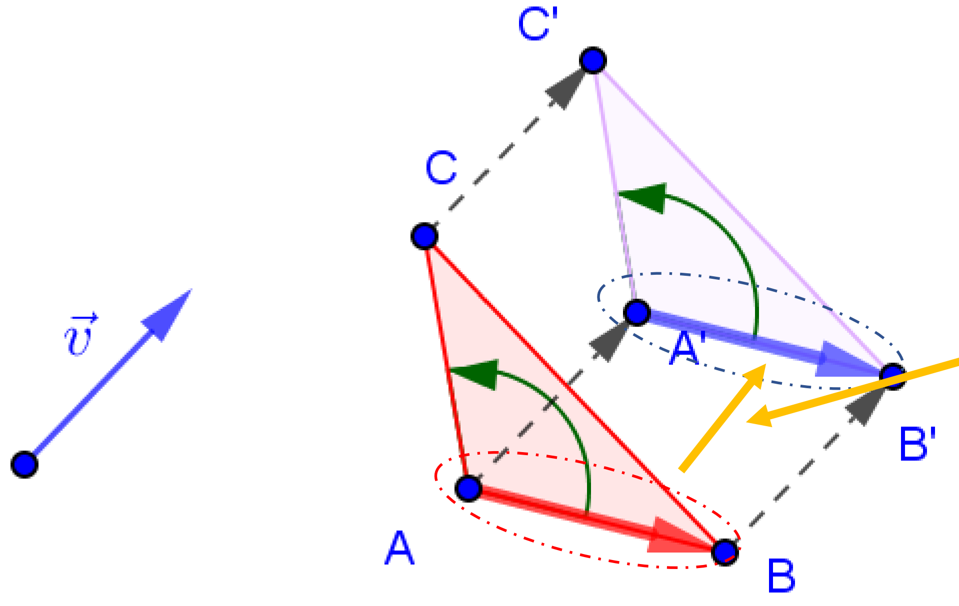


- **Conservan ángulos**.
- **NO necesariamente conservan distancias**.

Traslaciones.

E **espacio afín euclídeo** asociado a **espacio vectorial** V.

Datos: $\vec{v} \in V$ **vector de traslación.**



$$\boxed{f(A) = A + \vec{v}}$$

Fijada una referencia en R^2, si $\vec{v} = (v_1, v_2)$:

$$f(x,y) = (x,y) + (v_1, v_2)$$

Fijada una referencia en R^3, si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$f(x,y,z) = (x,y,z) + (v_1, v_2, v_3)$$

Expresión matricial:

En R^2, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

VECTORIAL = Id

En R^3, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Es una **ISOMETRÍA** (*conserva distancias*)

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, **NO** tiene **puntos fijos.**

Ejemplo: En R^2, en las ***condiciones usuales***, una ***traslación*** respecto al vector $\vec{v} = (2, -3)$.

$$f(x,y) = (x,y) + (2,-3)$$

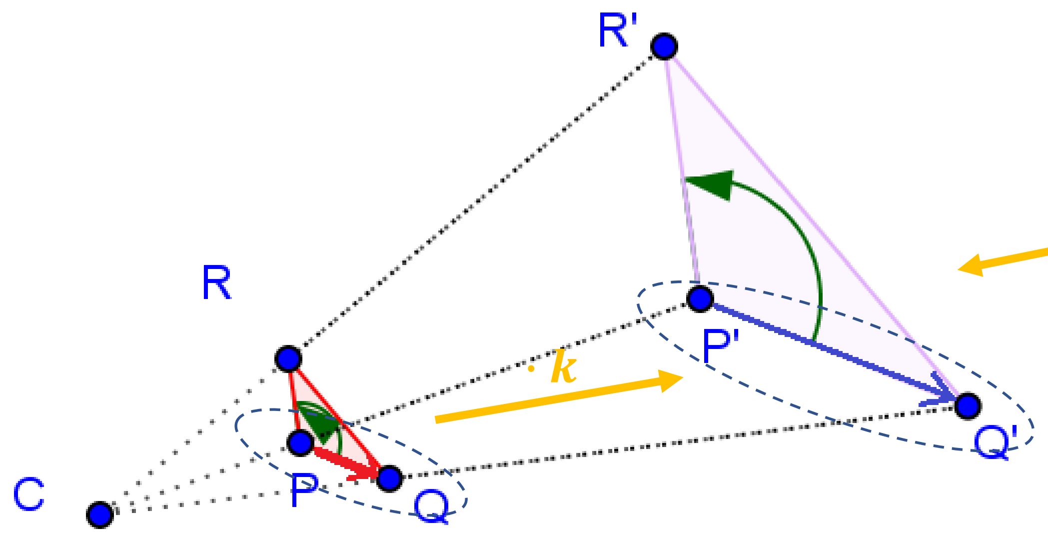
$$\boxed{f(x,y) = (x+2, y-3)}$$

Homotecias.

E **espacio afín euclídeo** asociado a **espacio vectorial** V.

Datos: $C \in E$ **centro** de la **homotecia**.

$k \in R, k \neq 0, 1$ **razón** de la **homotecia**.



$$f(P) = C + k\overrightarrow{CP}$$

$$\boxed{f(P) = C + k(P - C)}$$

Fijada una referencia en R^2, si $C = (x_0, y_0)$:

$$\boxed{f(x,y) = (x_0, y_0) + k((x,y) - (x_0, y_0))}$$

Fijada una referencia en R^3, si $C = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\boxed{f(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + k((x,y,z) - (x_0, y_0, z_0))}$$

Expresión matricial:

$$f(P) = C + k(P - C)$$

En R^2, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

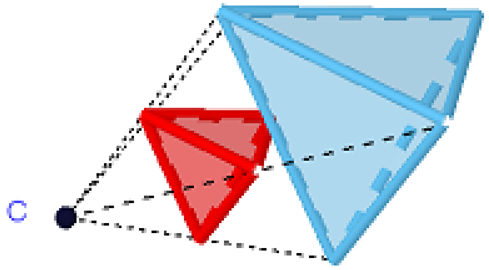
VECTORIAL = $k \cdot$Id

En R^3, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{1} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Multiplica **longitudes** por $|k|$.

Multiplica **áreas** por $|k|^2$.

Multiplica **volúmenes** por $|k|^3$.



Si $k \neq 1$, el único **punto fijo** es el **centro** C.

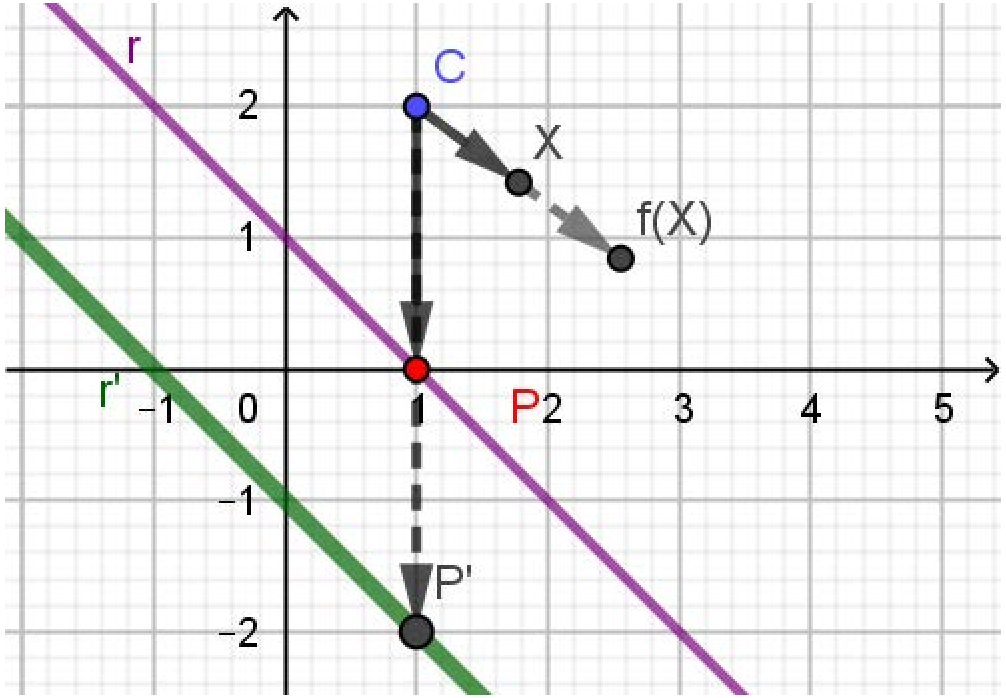
Prueba: $f(P) = P \Rightarrow C + k(P - C) = P \Rightarrow$

$(\cancel{k-1})P = (\cancel{k-1})C \Rightarrow \boxed{P = C}$

$k - 1 \neq 0$

Homotecias. Ejemplo.

Ejemplo: En R^2 con las condiciones usuales dar las ecuaciones de la ***homotecia*** de **centro** $(1,2)$ y **razón** 2. Aplicar la **homotecia** a la recta $r \equiv x + y - 1 = 0$.



$$f(X) = C + k(X - C)$$

$$f(x,y) = (1,2) + 2((x,y) - (1,2))$$

$$\boxed{f(x,y) = (2x-1, 2y-2)}$$

La **homotecia** lleva la **recta** r en una **paralela** r':

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv x + y - 1 = 0 \\ r' \text{ paralela a } r \end{array}\right\} \Rightarrow r' \equiv x + y + c = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} P = (x,y) \in r \equiv x + y - 1 = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = 1 - 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P = (1,0)}$$

$$P' = f(1,0) = (2 \cdot 1 - 1, 2 \cdot 0 - 2) = (1,-2)$$

$$P' = (1,-2) \in r' \Rightarrow 1 - 2 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 1} \Rightarrow \boxed{r' \equiv x + y + 1 = 0}$$

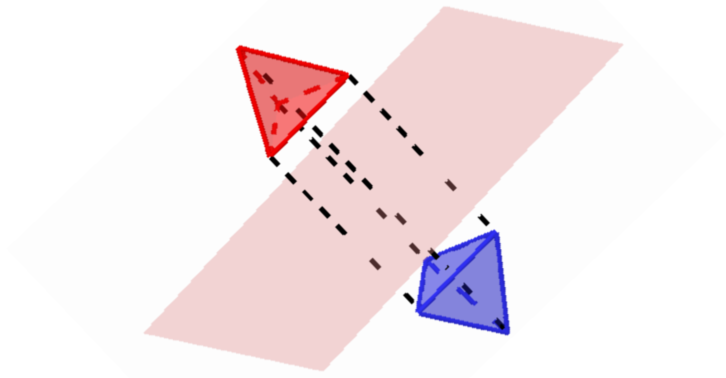
$$\boxed{r' \equiv x + y + c = 0}$$

Isometrías.

E espacio afín euclídeo asociado a espacio vectorial V.

Definición. Una **isometría** es una **transformación afín** que **conserva las distancias.**

Ejemplo: Simetría R^3 **en respecto a un plano.**



Observación: Toda **t. afín** se escribe de la forma:

$$f(X) = f(O) + t(\overrightarrow{OX})$$

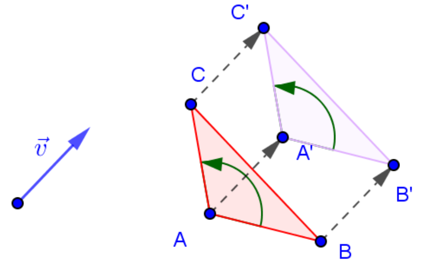
Traslación — Aplicación lineal $\Rightarrow$ T- ortogonal $\begin{cases} \text{Giros} \\ \text{Simetrías} \end{cases}$

f conserva **distancias** $\Rightarrow$ t conserva **normas**

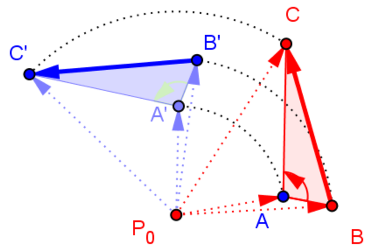
Teorema: Una **isometría** es **composición** de **giros**, **simetrías** y/o **traslaciones**.

En el plano R^2

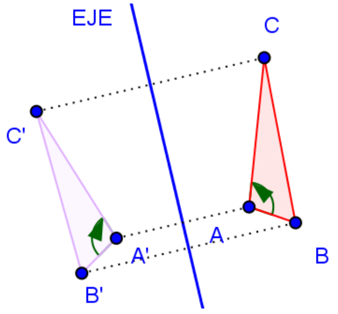
Traslaciones



Giros

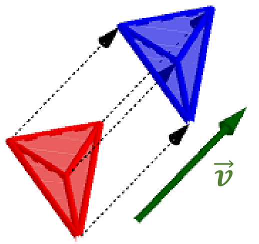


Simetría respecto recta

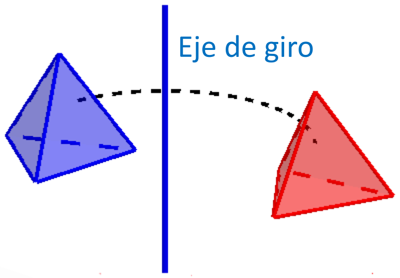


En el espacio R^3

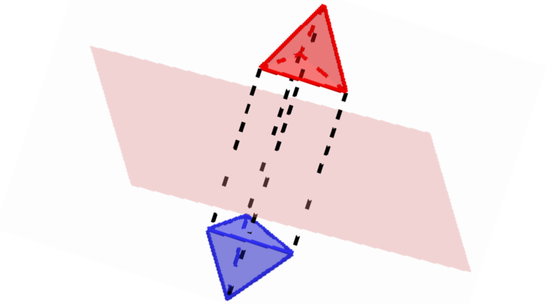
Traslaciones



Giros



Simetría respecto plano

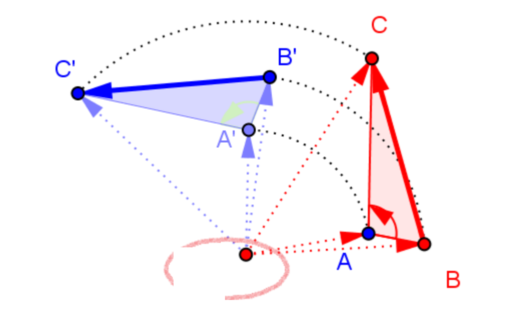


Construcción de una isometría: giros y simetrías.

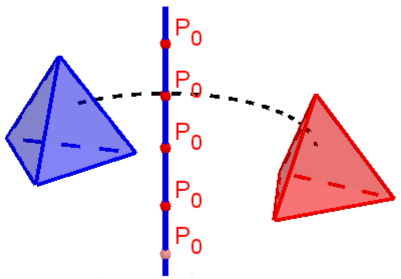
Pasos para construir una isometría.

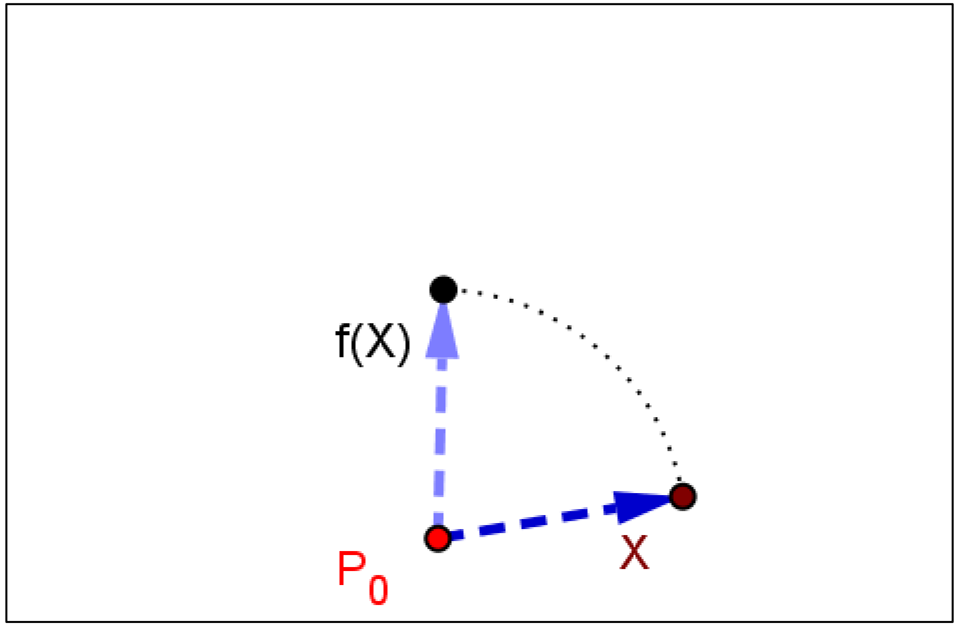
1) Se elige un punto $\boldsymbol{P_0}$ **fijo** de la transformación.

Giro en R^2

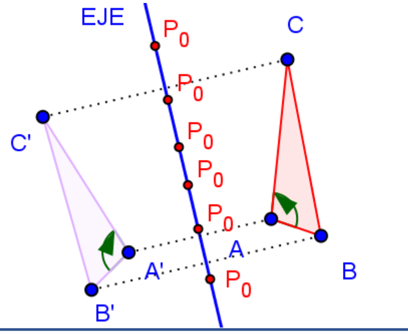


Giro en R^3

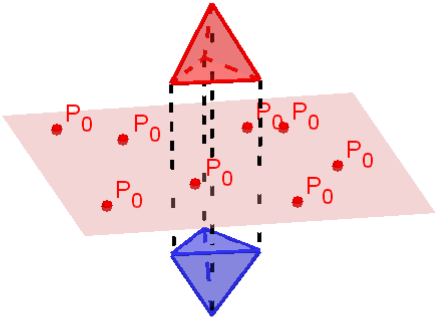




Simetría en R^2



Simetría en R^3



$$\text{En } \mathbf{R}^2, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + T_C\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Matriz de Transformación Ortogonal

$$\text{En } \mathbf{R}^3, f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + T_C\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

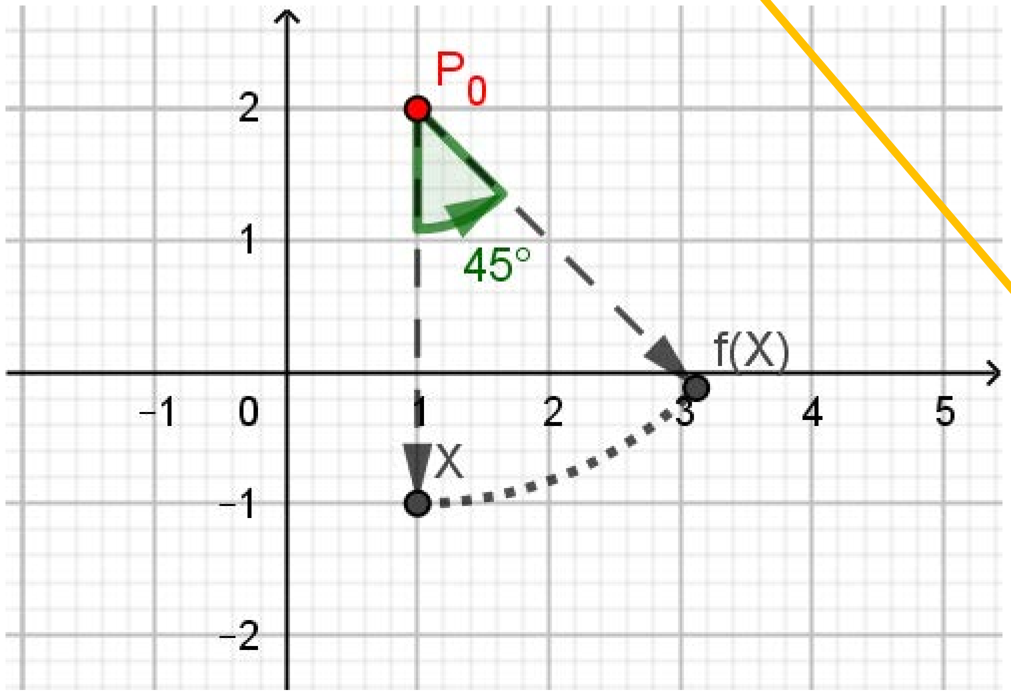
2)

$$f(X) = P_0 + t(X - P_0)$$

Transformación Ortogonal

Isometrías. Ejemplo I.

Ejemplo: En R^2 con las condiciones usuales dar las ecuaciones de un **giro** de **centro** $(1,2)$ y **ángulo** 45^o.



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

(x_0, y_0) = **punto fijo del giro**

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

Matriz de Giro de **ángulo** 45^o.

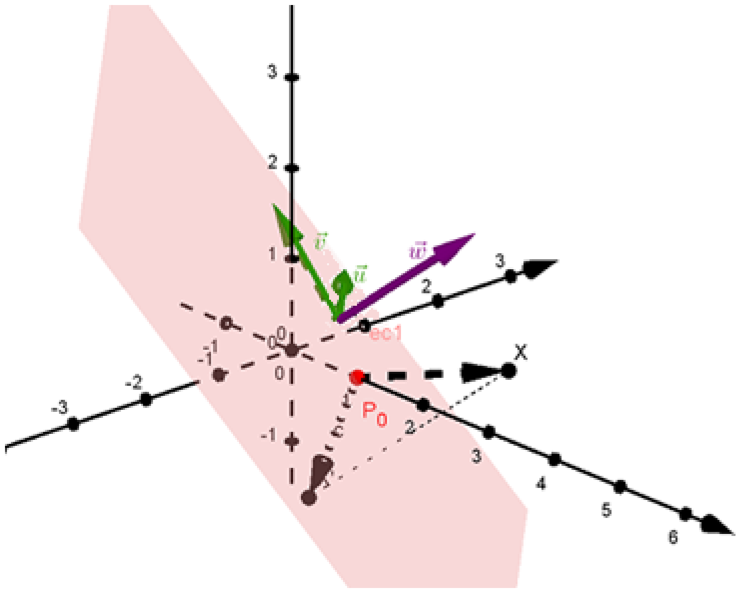
Condiciones usuales
- **Producto escalar usual**
- **Referencia canónica**
- **Orientación positiva: base canónica**

$$T_C = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(45^o) & -\sin(45^o) \\ \sin(45^o) & \cos(45^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}}$$

Isometrías. Ejemplo II.

Ejemplo: En R^3 con las condiciones usuales dar las ecuaciones de una **simetría** respecto al **plano** $\mathbf{x+y+z-1=0}$.



$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+T_C\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}$$

$(x_0,y_0,z_0)=$ **punto fijo** $=$ **Cualquiera del plano de simetría**

T_C = **Matriz simetría** respecto a la **dirección del plano**

Implíctas a paramétricas:

$$\mathbf{x+y+z-1=0}\;\Rightarrow\; x=1-y-z\;\Rightarrow\;\begin{cases}x=1-\alpha-\beta\\ y=\alpha\\ z=\beta\end{cases}$$

$P_0=(1,0,0)$

$\vec{u}=(-1,1,0)$

$\vec{v}=(-1,0,1)$

1) **Base** $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, $\begin{cases}L\{\vec{u},\vec{v}\}\ \textbf{plano de simetría}\\ \vec{w}\ \textbf{ortogonal al plano}=\vec{n}=(1,1,1)\end{cases}$

2) $T_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\end{array}\\ M_{CB}= & \begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\end{array}$$

3) $T_C=M_{CB}T_BM_{CB}^{-1}=\cdots=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$

$$\boxed{f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-0\end{pmatrix}}$$