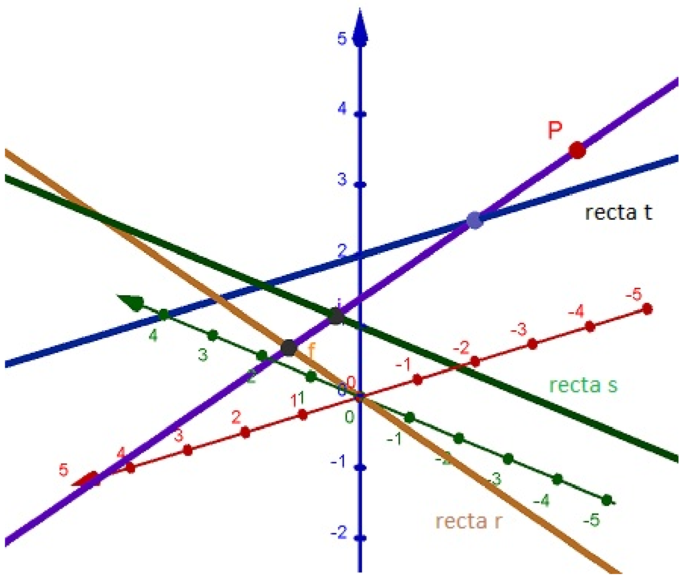
Algebra Lineal II. Curso 2020-2021. Geometría afín. Posbile solución a la práctica voluntaria.

Consideramos el espacio afín $\mathbb{R}^3$ *y trabajamos en coordenadas respecto a la referencia canónica.*

Sean las rectas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ y = z \end{array} \right. , \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 1 \end{array} \right. , \qquad t \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 2 \end{array} \right.$$

Sea S *el lugar geométrico de puntos* P *del espacio para los cuales existe un recta pasando por* P *y que corta simultáneamente a las tres rectas* r, s *y* t.



1. *Hallar* <u>*razonadamente*</u> *las ecuaciones paramétricas de* S.
2. *Hallar* <u>*razonadamente*</u> *las ecuaciones implícitas de* S.

Los puntos P del espacio para los cuales existe un recta pasando por ellos y que corta simultáneamente a las tres rectas r, s y t, corresponde al conjunto de puntos de las rectas que intersecan al mismo tiempo a las rectas dadas.

Veamos varios métodos para hallar tal conjunto de rectas.

Método I:

Dado un punto R de la recta r hallaremos la recta que pasa por R interseca a las otras dos, s y t. Para ello escribimos dos puntos genéricos S y T respectivamente de s y t. Que los tres puntos R, S, T estén en una misma recta equivale a que el vector que los une $\overrightarrow{SR}$ sea paralelo al vector $\overrightarrow{ST}$.

Resolviendo paramétricamente las ecuaciones implícitas que definen cada recta, hallamos paramétricas de cada una de ellas:

$$\begin{array}{lll} r \rightarrow & (x, y, z) = k(1, 1, 1) & \Rightarrow \quad R = (k, k, k) \\ s \rightarrow & (x, y, z) = (0, 0, 1) + a(0, 1, 0) & \Rightarrow \quad S = (0, a, 1) \\ t \rightarrow & (x, y, z) = (0, 0, 2) + b(1, 0, 0) & \Rightarrow \quad T = (b, 0, 2) \end{array}$$

Calculamos los vectores: $\overrightarrow{SR} = R - S = (k, k - a, k - 1)$ y $\overrightarrow{ST} = T - S = (b, -a, 1)$.

Imponemos que son dependientes, proporcionales:

$$\frac{k}{b} = \frac{k - a}{-a} = \frac{k - 1}{1}$$

Multiplicando en cruz y despejando a y b en función de k:

$$a = \frac{k}{2 - k}, \qquad b = \frac{k}{k - 1}.$$

Esto nos permite poner los puntos S y T en función del parámetro k. Es decir para cada punto R obtenemos dos puntos $S \in s$ y $T \in t$ colineales. A su vez los puntos de cada una de esas rectas podemos escribirlos paramétricamente. Es la recta que pasa por S y tiene vector director $\overrightarrow{ST}$:

$$(x, y, z) = (0, a, 1) + s(b, -a, 1) = \left(0, \frac{k}{2 - k}, 1\right) + s\left(\frac{k}{k - 1}, \frac{-k}{2 - k}, 1\right) = \left(\frac{sk}{k - 1}, \frac{k - sk}{2 - k}, 1 + s\right)$$

Es decir, separando cada coordenada obtenemos las paramétricas del lugar geométrico pedido:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{sk}{k-1} \\ y = \dfrac{k-sk}{2-k} \\ z = 1+s \end{array}}$$

Finalmente para obtener la ecuación implícita eliminamos parámetros. Despejando k en las dos primeras ecuaciones e igualando se tiene:

$$\frac{x}{x-s} = \frac{2y}{y-s+1}$$

De la última ecuación $s = z-1$. Susituyendo:

$$\frac{x}{x-z+1} = \frac{2y}{y-z+2}$$

Multiplicando en cruz y simplificando la ecuación implícita queda:

$$\boxed{xy + xz - 2yz - 2x + 2y = 0}$$

Método II:

La idea es la siguiente: sea una recta l que corte simultáneamente a las rectas r, s, t. La rectas l y r por ser secantes yacen en un plano que contiene a r, es decir, en un plano del haz de planos que contienen a r. Análogamente la recta l yace en un plano del haz de planos que contiene a s y en otro plano del haz de plano que contiene a t.

Entonces tomaremos un plano genérico de cada haz de planos e impondremos que tengan una recta en común.

El haz de planos que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$ es:

$$x - y + a(y-z) = 0, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

El haz de planos que contiene a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ es:

$$z - 1 + bx = 0, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

El haz de planos que contiene a la recta $t \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ es:

$$z - 2 + cy = 0, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

La intersección de los tres planos corresponde a la solución del sistema lineal que forman sus ecuaciones:

$$\begin{array}{l} x + (a-1)y - az = 0 \\ bx + z = 1 \\ cy + z = 2 \end{array}$$

Que la intersección sea una recta significa que el sistema es compatible determinado, con una solución de dimensión 1. Eso equivale a que los rangos de la matriz ampliada y de la matriz del sistema sean iguales a 2. Para analizar cuando se da escalonamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -a & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ 0 & c & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{21}(-b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -a & 0 \\ 0 & -ab+b & 1-ab & 1 \\ 0 & c & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Para que el rango sea 2 las dos últimas filas tienen que ser proporcionales:

$$\frac{-ab+b}{c} = \frac{1+ab}{1} = \frac{1}{2}$$

Quitando denominadores e igualando dos a dos obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2 + 2ab &= 1 \\ -2ab + 2b &= c \end{aligned}$$

Sumando queda $2 + 2b = c + 1$ de donde $c = 1 + 2b$ y en la primera ecuación $a = \dfrac{-1}{2b}$.

Es decir para cada valor de b que corresponde a un plano del haz de planos que contienen a s, obtenemos valores de a y c, es decir, planos de los otros dos haces de forma que los tres plano se cortan en una recta. Hallamos la ecuación paramétrica recta resolviendo el sistema en función de b y de un parámetro. Eso nos dará las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico buscado.

$$\begin{array}{lcr} bx + z = 1 & \Rightarrow & x = \dfrac{1-z}{b} \\ (1+2b)y + z = 2 & \Rightarrow & y = \dfrac{2-z}{1+2b} \end{array}$$

Llamamos $z = t$ y quedan las paramétricas:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{1-t}{b} \\ y = \dfrac{2-t}{1+2b} \\ z = t \end{array}}$$

Eliminando parámetros obtendremos la implícita. De la última ecuación $t = z$ y despejando b en las otras dos:

$$b = \frac{1-z}{x} = \frac{2-z-y}{2y}$$

Multiplicando en cruz y simplificando:

$$\boxed{xy + xz - 2yz - 2x + 2y = 0}$$

Método III:

Supongamos que el punto P que buscamos tiene coordenadas $P = (x, y, z)$. Sea l una recta por P que corta a las otras tres; supongamos que su vector director tiene coordenada $\vec{v} = (a, b, c)$. Vamos a imponer condiciones sobre x, y, z, a, b, c para que la recta l corte a las otras tres.

Que dos rectas se corte equivale a que sean coplanarias; a su vez esto corresponde a que sus vectores directores y el vector que une un punto de cada una de ellas sean dependientes, es decir, el determinante que forman las coordenadas de los tres sea nulo.

Usaremos esta idea para los pares de rectas l, r, l, s y l, t. Para ello resolvemos paramétricamente las ecuaciones implícitas que definen cada recta, para obtener asií un punto y el vector director de cada uno de ellas:

$$\begin{array}{rlcll} r \rightarrow & (x,y,z) = k(1,1,1) & \Rightarrow & R = (0,0,0) & \vec{u}_r = (1,1,1) \\ s \rightarrow & (x,y,z) = (0,0,1) + a(0,1,0) & \Rightarrow & S = (0,0,1) & \vec{u}_s = (0,1,0) \\ t \rightarrow & (x,y,z) = (0,0,2) + b(0,0,1) & \Rightarrow & T = (0,0,2) & \vec{u}_t = (0,0,1) \end{array}$$

Las rectas l, r deben de cortarse y por tanto los vectores $\vec{RP}$, $\vec{v}$, $\vec{u}_r$ son dependientes:

$$det \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff (b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = 0.$$

Las rectas l, s deben de cortarse y por tanto los vectores $\vec{SP}$, $\vec{v}$, $\vec{u}_s$ son dependientes:

$$det \begin{pmatrix} x & y & z-1 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff cx - a(z-1) = 0.$$

Las rectas l, t deben de cortarse y por tanto los vectores $\vec{TP}$, $\vec{v}$, $\vec{u}_t$ son dependientes:

$$det \begin{pmatrix} x & y & z-2 \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff cy - b(z-2) = 0.$$

Para obtener las implícitas, es decir, la condición que tiene que cumplir $P(x, y, z)$, intentamos eliminar de las ecuaciones anteriores los parámetros a, b, c. Para ello despejamos a y b en las dos últimas ecuaciones,

$$a = \frac{cx}{z-1}, \qquad b = \frac{cy}{z-2}$$

y sustituimos en la primera

$$\left(\frac{cy}{z-2} - c\right)x + \left(c - \frac{cx}{z-1}\right)y + \left(\frac{cx}{z-1} - \frac{cy}{z-2}\right)z = 0$$

Vemos que c es factor común a todos los términos. Podemos dividir por c. Quitamos además denominadores queda:

$$(y - z + 2)(z - 1)x + (z - 1 - x)(z - 2)y + (xz - 2x - yz + y)z = 0.$$

Desarrollando:

$$xyz - xy - z^2x + xz + 2xz - 2x + z^2y - 2yz - zy + 2y - xyz + 2xy + xz^2 - 2xz - yz^2 + yz = 0$$

Simplificando:

$$\boxed{xy + xz - 2yz - 2x + 2y = 0}$$

Para hallar las paramétricas tomamos dos de las variables como parámetros y despejamos la tercera. Por ejemplo $x = \alpha$, $y = \beta$,

$$z = \frac{2x - 2y - xy}{x - 2y} = \frac{2\alpha - 2\beta - \alpha\beta}{\alpha - 2\beta}$$

Las paramétricas quedan:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \dfrac{2\alpha - 2\beta - \alpha\beta}{\alpha - 2\beta} \end{array}}$$