Figura 1: Interior de la terminal 4 del Aeropuerto de Madrid-Barajas-Adolfo Suárez, donde se observan los elementos verticales que sirven de inspiración a la estructura a diseñar.

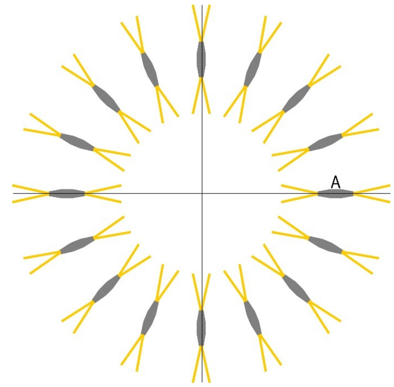


Figura 2: Esquema de la planta de la estructura a diseñar indicando la posición de los elementos verticales imitando el diseño de la terminal 4.

Por tanto, tu labor consiste en definir estas matrices para completar el diseño de la estructura. **Para ello, se pide hallar y describir geométricamente el mínimo número de transformaciones geométricas que es necesario realizar para definir la posición de todos los elementos verticales de la estructura a partir del elemento de referencia. Utiliza exactamente $k^{(*)}$ transformaciones directas y las que consideres necesarias inversas.**

Supondremos en esta solución $k = 2$, es decir que debemos de utilizar exactamente dos transformaciones directas.

Recordemos que en el plano las transformaciones directas son giros y las inversa simetrías respecto a una recta. Como trabajamos respecto de la base canónica y respecto a una base ortonormal las matrices de giro serán directamente:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

siendo α el ángulo de giro.

Las simetrías tendrán por matriz asociada (según el procedimiento visto en teoría):

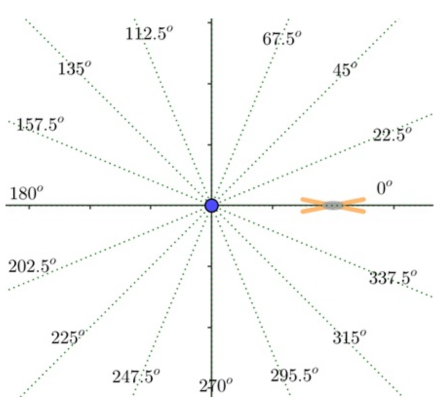
$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$$

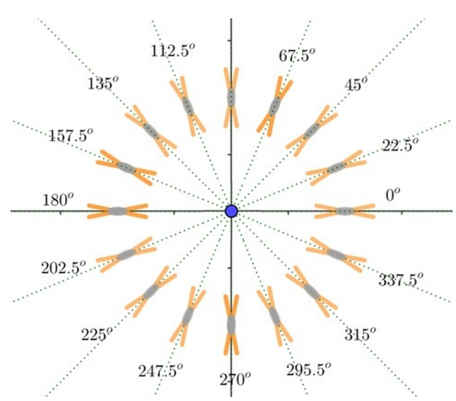
donde

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y M_{CB} es la matriz de cambio de base de una base auxiliar B a la canónica. Tal base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ está formada por $\vec{u}_1$ el vector director del eje de simetría y $\vec{u}_2$ un vector ortogonal a él.

En estas dos imágenes vemos el punto de partida y la disposición final a la que queremos llegar:



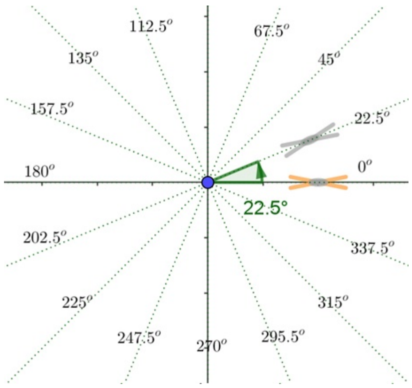


Las 16 columnas finales están equidistribuidas a lo largo de los 360^o de la circunferencia, por lo que forman un ángulo entre ellas de $360/16 = 22.5$ grados.

En cada transformación, en el mejor de los casos, eligiendo adecuadamente el ángulo de giro duplicaremos las columnas que ya están dibujadas. Por tanto necesitamos al menos 4 *transformaciones para conseguir las* 16 *columnas finales:* $1, 2, 4, 8$ *hasta* 16.

Si lo conseguimos en exactamente 4 *ese será el número mínimo. Como* $k = 2$ *tenemos que hacer exactamente dos giros y las otras dos serán simetrías.*

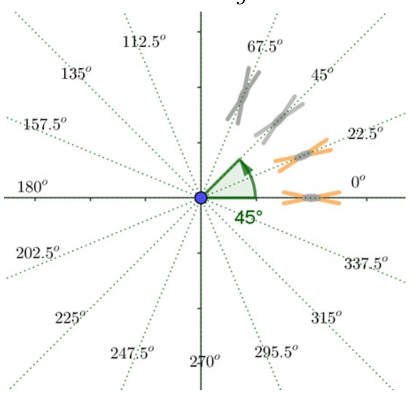
1. *Comenzamos duplicando la primera columna con un giro de* 22.5^o*:*



La matriz de giro es:

$$T_{22.5^o} = \begin{pmatrix} cos(22.5^o) & -sin(22.5^o) \\ sin(22.5^o) & cos(22.5^o) \end{pmatrix}$$

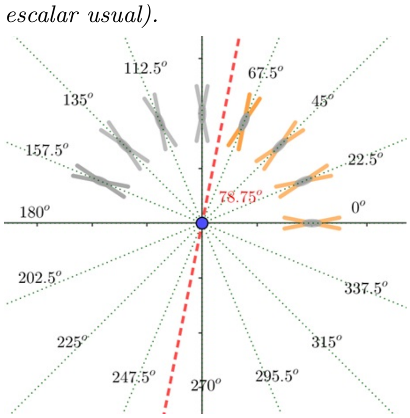
2. *Continuamos con un giro de* 45^o*:*



La matriz de giro es:

$$T_{45^o} = \begin{pmatrix} cos(45^o) & -sin(45^o) \\ sin(45^o) & cos(45^o) \end{pmatrix}$$

3. *Ahora hacemos una simetría para duplicar en el segundo cuadrante. El eje de simetría es la bisectriz entre la recta que pasa por el origen y contiene a la última columna dibujada y el eje* OY*. Tal bisectriz forma un ángulo de* $\frac{90^o+67.5^o}{2} = 78.75^o$*. Su vector director es* $\vec{u}_1 = (cos(78.75^o), sin(78.75^o))$ *y un vector ortogonal a él* $\vec{u}_2 = (-sin(78.75^o), cos(78.75^o))$ *(en general, en el plano,* $(-b, a)$ *es ortogonal a* (a, b) *con el producto escalar usual).*



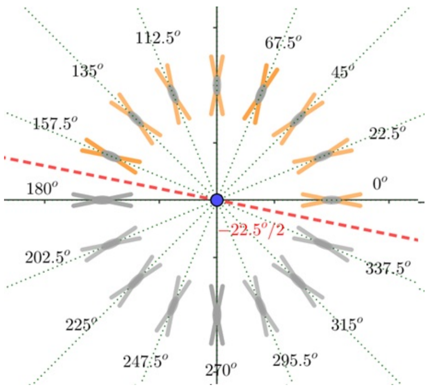
Por tanto

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} cos(78.75^o) & -sin(78.75^o) \\ sin(78.75^o) & cos(78.75^o) \end{pmatrix}$$

y la matriz de la simetría:

$$T_C = M_{CB} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M_{CB}^{-1}.$$

4. *Finalmente hacemos una simetría para duplicar el primer y segundo cuadrante en tercero y cuarto. El eje de simetría es la bisectriz entre la recta que pasa por el origen y contiene a la última columna dibujada y el eje OX. Tal bisectriz forma un ángulo de $\frac{0^o-22.5^o}{2} = -11.25^o$ con el eje OX. Su vector director es $\vec{u}_1 = (cos(-11.25^o), sin(-11.25^o))$ y un vector ortogonal a él $\vec{u}_2 = (-sin(-11.25^o), cos(-11.25^o))$.*



Por tanto

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} cos(-11.25^o) & -sin(-11.25^o) \\ sin(-11.25^o) & cos(-11.25^o) \end{pmatrix}$$

y la matriz de la simetría:

$$T_C = M_{CB} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M_{CB}^{-1}.$$