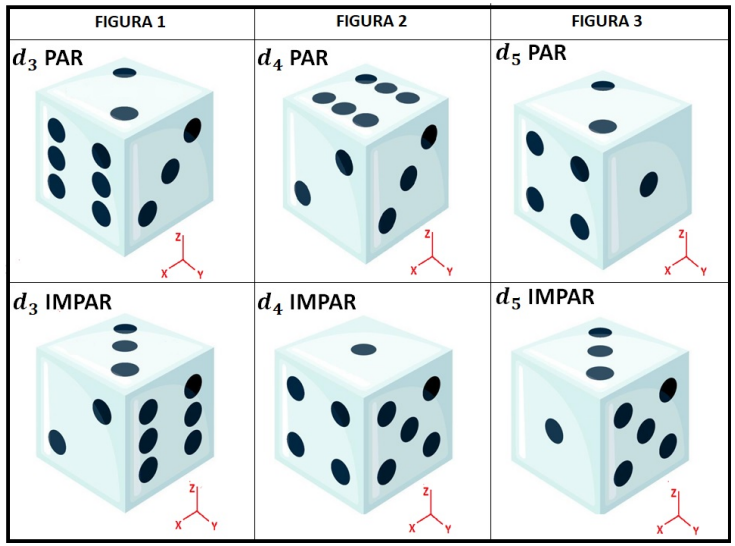
Sean $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8$ las ocho cifras de tu DNI[(1)]. Por ejemplo si el DNI es 32478910, entonces $d_1 = 3$,$d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 7$, $d_5 = 8$, $d_6 = 9$, $d_7 = 1$, $d_8 = 0$.

Consideramos el espacio $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar usual y con la base canónica determinando la orientación positiva.

En los siguientes tres pares de figuras, de cada columna se considerará la superior o la inferior según la cifra indicada del DNI sea par o impar. Todas ellas son dados cúbicos de dos unidades de arista y centrados en el origen de coordenadas. Como es usual en la construcción de los dados las caras opuestas suman siete. Debe de considerarse que lo que diferencia una figura de otra es el número que está en cada cara.



1. *Hallar (si existen) las matrices A_1, A_2 respecto de la base canónica de dos transformaciones ortogonales que lleven respectivamente la figura 1 en la figura 2 y la figura 2 en la figura 3.*

   Para saber la transformación que lleva un dado en otro, consideramos a que caras señalan los vectores de la canónica en el dado inicial y como se han transformado en el dado imagen.

   Por ejemplo en el dado par de la figura 1:

   - El vector $(1,0,0)$ apunta a la cara 6.
   - El vector $(0,1,0)$ apunta a la cara 3.
   - El vector $(0,0,1)$ apunta a la cara 2.

   Vemos en que posición quedan estas caras en el dado par de la figura 2. Tenemos en cuenta que caras opuestas siempre suman 7:

   - La cara 6 es apuntada ahora por el vector $(0,0,1)$.
   - La cara 3 corresponde al vector $(0,1,0)$.
   - La cara 2 corresponde al vector $(1,0,0)$.

   Por tanto la transformación t_1 que lleva el dado PAR de la figura 1 en el PAR de la figura 2 debe de cumplir:

   $t_1(1,0,0) = (0,0,1), \quad t_1(0,1,0) = (0,1,0), \quad t_1(0,0,1) = (1,0,0)$

   La matriz asociada en la base canónica está formada precisamente estos vectores puestos en columna (la imagen de los vectores de la canónica):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Análogamente estudiamos el paso del dado PAR de la figura 2 al dado PAR de la figura 3. En el primero:

   - El vector $(1,0,0)$ apunta a la cara 2.
   - El vector $(0,1,0)$ apunta a la cara 3.
   - El vector $(0,0,1)$ apunta a la cara 6.

   En el segundo:

   - La cara 2 corresponde al vector $(0,0,1)$.
   - La cara 3 (opuesta de la 4, porque $3+4=7$) corresponde al vector $(-1,0,0)$.
   - La cara 6 (opuesta de la 1, porque $1+6=7$) corresponde al vector $(0,-1,0)$.

   Por tanto la segunda transformación t_2 cumple:

   $t_2(1,0,0) = (0,0,1), \quad t_2(0,1,0) = (-1,0,0), \quad t_2(0,0,1) = (0,-1,0)$

   y su matriz asociada es:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Clasificar las transformaciones ortogonales del apartado anterior detallando toda la información geométrica relevante de cada una de ellas.*

   Para clasificarlas basta calcular el determinante de cada una de ellas:

   - Determinante 1 corresponde a un giro.
   - Determinante -1 corresponde a un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

   Para la primera, $det(A_1) = -1$, y por tanto se trata de un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro. El ángulo α de giro cumple:

$$2cos(\alpha) - 1 = traza(A_1) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm arcos\frac{1+traza(A_1)}{2} = \pm arcos\frac{1+1}{2} = 0.$$

   El giro es de cero grados, y en realidad es simplemente una simetría repecto a un plano. El plano de simetría está formado por los autovectores asociados al 1 (son los vectores que quedan fijos en la transformación):

$$(A_1 - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - z = 0.$$

En definitiva la transformación t_1 es una simetría respecto al plano $x - z = 0$.

Para la primera, $det(A_2) = 1$, y por tanto se trata de un giro. El ángulo α de giro cumple:

$$2cos(\alpha) + 1 = tr(A_2) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm arcos\frac{-1 + tr(A_2)}{2} = \pm arcos\frac{-1}{2} = \pm 120^o.$$

Calculamos el semieje de giro que está generado por un autovector asociado al 1:

$$(A_2 - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ -y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Eliminando ecuaciones dependientes queda y resolviendo queda $x = z$, $y = -z$ y así tomando $z = 1$ podemos considerar el semieje generado por $(1, -1, 1)$.

Finalmente para saber el signo del ángulo usamos que éste corresponde con la orientación de una base formada por el semieje $((1, -1, 1))$, un vector cualquiera (por ejemplo $(1, 0, 0)$) y el vector girado ($t_2(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$). La orientación es el signo del determinante formado por los tres vectores:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

Conclusión: la transformación t_2 es un giro de semieje generado por $(1, -1, 1)$ y ángulo 120^o.

3. *¿Pueden las tres figuras corresponder a distintas vistas de un mismo dado? Razona la respuesta. En caso negativo cuáles de las tres figuras si corresponden a un mismo objeto.*

   Si la transformación es directa, es decir, un giro corresponde a una transformación que puede hacerse en la realidad sin hacer intervenir una reflexión en un espejo. Si es inversa, no.

   Por tanto como t_1 es una simetría respecto a un plano los dos primeros dados NO son el mismo objeto; no hay manera de moviendo uno, obtener las vistas del segundo.

   Como t_2 es un giro, los dados segundo y tercero si corresponden al mismo objeto.

4. *Al primer dado se le aplica una transformación ortogonal cuya matriz asociada en la base canónica cumple $|F_C| = 1$, $traza(F_C) = 0$ y tiene al vector $(1, 1, -1)$ por autovector asociado al 1. ¿Está inequívocamente determinada la transformación?. Dibujar la nueva posición (o posibles posiciones si hubiese varias) del dado.*

   Identificamos que transformación se está realizando. Como $|F_C| = 1$ se trata de un giro. Como $traza(F_C) = 0$ el ángulo de giro es:

   $$2cos(\alpha) + 1 = tr(F_C) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm arcos\frac{-1 + tr(F_C)}{2} = \pm arcos\frac{-1}{2} = \pm 120^o.$$

   Finalmente como $(1, 1, -1)$ es un autovector asociado al 1 corresponde al eje de giro.

   Con los datos dados no hay manera de distinguir el sentido de giro y por tanto hay dos posibles transformaciones en esas condiciones con ángulo de 120^o o -120^o.

   Para saber como se transforma el dado con cada una de ellas, calcularemos sus matrices asociadas y aplicaremos la misma idea que en el apartado (1) viendo la imagen de los vectores de la base canónica y por tanto la nueva posición de las caras a las que apuntan.

   Primero, hay que construir una base ortogonal $\{u_1, u_2, u_3\}$ donde el primer vector es el semieje $u_1 = (1, 1, -1)$. Escogemos un segundo vector (x, y, z) perpendicular a él, es decir, cumpliendo:

   $$(x, y, z) \cdot (1, 1, -1) = 0 \iff x + y - z = 0$$

   Por ejemplo $u_2 = (0, 1, 1)$.

   Como tercer vector podemos tomar el producto vectoral de ambos (eso nos garantiza que es perpendicular a ellos y además que la base que forman los tres tiene orientación positiva):

   $$(1, 1, -1) \times (0, 1, 1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + e_3 = (2, -1, 1)$$

   Tenemos la base ortogonal $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (2, -1, 1)\}$; la normalizamos dividiendo cada vector por su norma.

   $$\begin{array}{l} \frac{(1,1,-1)}{\|(1,1,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \\ \frac{(0,1,1)}{\|(0,1,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \\ \frac{(2,-1,1)}{\|(2,-1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1) \end{array}$$

   Tomando la base obtenida $B = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)\}$, la matriz de giro en dicha base es:

   $$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\pm 120^o) & -sin(\pm 120^o) \\ 0 & sin(\pm 120^o) & cos(\pm 120^o) \end{pmatrix}$$

   donde tenemos dos opciones según el signo del ángulo.

   Finalmente cambiamos de base y tendremos en cuenta que por ser B y C ortonormales, $M_{CB}^{-1} = M_{CB}^t$:

   $$T_C = M_{CB}T_BM_{CB}^{-1} = M_{CB}T_BM_{CB}^t, \quad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Si hacemos las cuentas, para el ángulo de $+120^o$ queda:

$$T_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y para -120^o:

$$T'_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos ambas transformaciones al dado PAR de la figura 1. Recordemos que en este dado:

- El vector $(1,0,0)$ apunta a la cara 6.
- El vector $(0,1,0)$ apunta a la cara 3.
- El vector $(0,0,1)$ apunta a la cara 2.

Las columnas de la matriz asociada nos indican la nueva posición de cada cara.

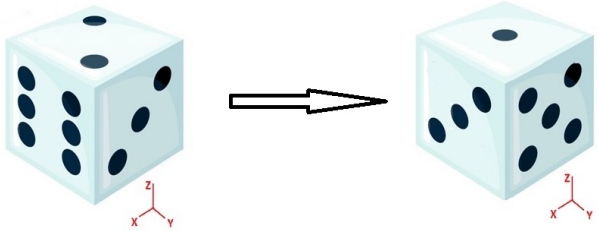
Para el giro de 120^o:

$$t(1,0,0) = (0,0,-1), \quad t(0,1,0) = (1,0,0), \quad t(0,0,1) = (0,-1,0)$$

Por tanto:

- el 6 queda en la posición $(0,0,-1)$; o equivalentemente el 1 $(1+6=7)$ en la $(0,0,1)$.
- el 3 queda en la posición $(1,0,0)$.
- el 2 queda en la posición $(0,-1,0)$; o equivalentemente el 5 $(2+5=7)$ en la $(0,1,0)$.

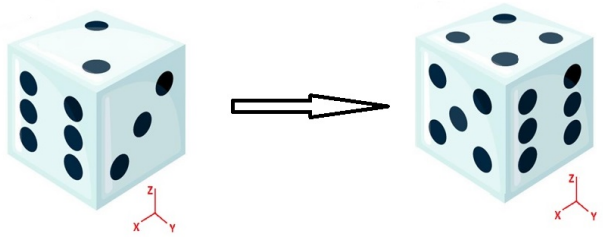
La nueva posición del dado sería:



Para el giro de -120^o:

$$t(1,0,0) = (0,0,-1), \quad t(0,1,0) = (0,0,-1), \quad t(0,0,1) = (-1,0,0)$$

Por tanto:

- el 6 queda en la posición $(0,1,0)$.
- el 3 queda en la posición $(0,0,-1)$; o equivalentemente el 4 $(3+4=7)$ en la $(0,0,1)$.
- el 2 queda en la posición $(-1,0,0)$; o equivalentemente el 5 $(2+5=7)$ en la $(1,0,0)$.

La nueva posición del dado sería: