

Consideramos el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica.

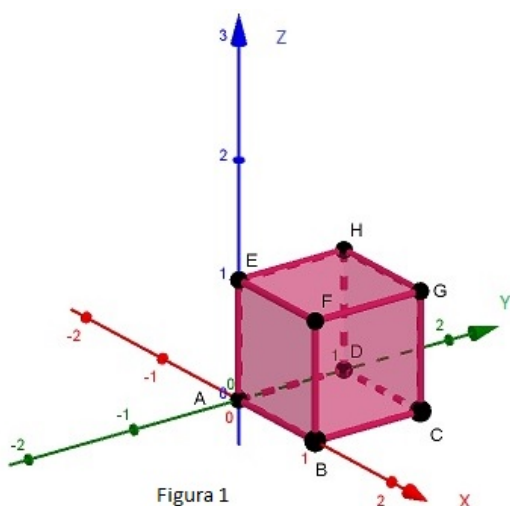


Figura 1

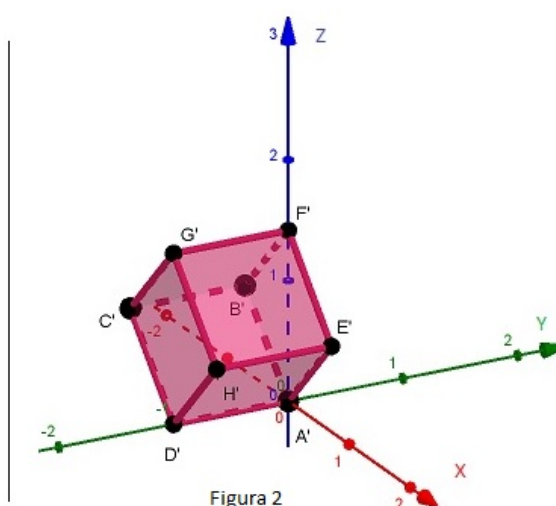


Figura 2

Sea t la transformación ortogonal que lleva el cubo de la figura (1) en el cubo de la figura (2), de manera que los vértices A, B, C, D, E, F, G, H se transforman respectivamente en los vértices $A', B', C', D', E', F', G', H'$.

Las coordenadas de los vértices del primer cubo se pueden obtener fácilmente a partir del dibujo. Se tiene que $F' = (0, 0, \sqrt{2})$, $D' = (0, -1, 0)$ y $E' = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$.

Responder detallada y **razonadamente** a las siguientes cuestiones:

1. Dar la matriz asociada a t en la base canónica.

La transformación tiene que llevar los puntos A, D, E, F en A', D', E', F' , y por tanto los vectores $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$ respectivamente en $\overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{A'E'}, \overrightarrow{A'F'}$.

Del la figura inicial es inmediato que $D = (0, 1, 0)$, $E = (0, 0, 1)$ y $F = (1, 0, 1)$. Por tanto la transformación debe de llevar la base $B = \{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\} = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$ en $\{(0, -1, 0), (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2), (0, 0, \sqrt{2})\}$. Es decir:

$$\begin{aligned} t(0, 1, 0) &= (0, -1, 0) \\ t(0, 0, 1) &= (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) \\ t(1, 0, 1) &= (0, 0, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Deducimos que la matriz asociada respecto de la base B en el espacio de partida y la canónica en la de llegada es:

$$T_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente cambiamos la matriz a la base canónica:

$$T_C = T_{CC} = T_{CB}M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

2. Comprobar que t es una transformación ortogonal.

Dado que estamos trabajando con el producto escalar usual, la base canónica es ortonormal. Por tanto la condición para que t sea ortogonal es que $T^t T = Id$. Efectivamente:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Clasificar y describir geoméricamente la transformación ortogonal t . ¿Es directa o inversa? ¿Qué interpretación tiene?.

Para clasificarla analizamos primero el determinante de la matriz asociada:

- Si $\det(T_C) = 1$ es un giro.

- Si $\det(T_C) = -1$ es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

En este caso vemos que $\det(T_C) = 1$ y por tanto se trata de un giro.

Para calcular el ángulo α de giro usamos que:

$$\alpha = \pm \arccos \left(\frac{\text{traza}(T_C) - 1}{2} \right) = \pm \arccos \left(\frac{-1 - 1}{2} \right) = \pm \arccos(-1) = \pm \pi.$$

Dado que el giro es de 180° el signo del ángulo es indiferente.

El semieje de giro está generado por el autovector asociado al 1:

$$(T_C - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 - 1 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} (-\sqrt{2}/2 - 1)x + \sqrt{2}/2z &= 0 \\ -2y &= 0 \\ \sqrt{2}/2x + (\sqrt{2}/2 - 1)z &= 0 \end{aligned}$$

Simplificando queda:

$$\begin{aligned} x + (1 - \sqrt{2})z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

y resolviendo obtenemos una parametrización de la solución:

$$x = (\sqrt{2} - 1)\lambda, \quad y = 0, \quad z = \lambda$$

de donde el semieje de giro es $\mathcal{L}\{(\sqrt{2} - 1, 0, 1)\}$.

Resumiendo:

- Se trata de un giro de 180° respecto al semieje $\mathcal{L}\{(\sqrt{2} - 1, 0, 1)\}$,
- O equivalentemente, una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(\sqrt{2} - 1, 0, 1)\}$.

Al ser un giro se trata de una transformación directa. Esto significa que conserva la orientación; de manera más coloquial es un movimiento que puede hacerse en la realidad sin hacer intervenir una reflexión en un espejo.

4. Calcular las coordenadas de todos los vértices del cubo de la figura (2).

Basta aplicar la transformación a los vértices del cubo original. D', E', F' están dados en el enunciado. Calculamos los restantes:

$$\begin{aligned} A = (0, 0, 0) &\rightarrow A' = t(A) \rightarrow A' = T_C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ B = (1, 0, 0) &\rightarrow B' = t(B) \rightarrow B' = T_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \\ C = (1, 1, 0) &\rightarrow C' = t(C) \rightarrow C' = T_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \\ G = (1, 1, 1) &\rightarrow G' = t(G) \rightarrow G' = T_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ H = (0, 1, 1) &\rightarrow H' = t(H) \rightarrow H' = T_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$