Dado un valor $d \in \mathbb{R}$ se considera en $\mathbb{R}^3$ la superficie S de ecuación:

$$z(x,y) = x^2 - 6dxy + y^2 + 1$$

1. *Demostrar que $z(x,y) = 1 + w(x,y)$ donde $w(x,y)$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$.*
   Igualando $x^2 - 6dxy + y^2 + 1 = 1 + w(x,y)$ queda $w(x,y) = x^2 - 6dxy + y^2$.
   Hay varias formas de justificar que $w(x,y) = x^2 - 6dxy + y^2$ es una forma cuadrática:

   (a) Por la caracterización vista en teoría hay que probar que:
   - $w(t(x,y)) = t^2 w(x,y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   - $f((x,y),(x',y')) = \frac{1}{2}(w((x,y)+(x',y')) - w(x,y) - w(x',y'))$ es una forma bilineal simétrica.

   Para la primera parte:

   $$w(t(x,y)) = w(tx,ty) = (tx)^2 - 6d(tx)(ty) + (ty)^2 = t^2x^2 - 6t^2dxy + t^2y^2 = t^2(x^2 - 6dxy + y^2) = t^2 w(x,y).$$

   Para la segunda parte:

   $$\begin{array}{l} w((x,y)+(x',y')) = w(x+x', y+y') = (x+x')^2 - 6d(x+x')(y+y') + (y+y')^2 \\ w(x,y) = x^2 - 6dxy + y^2 \\ w(x,y) = x'^2 - 6dx'y' + y'^2 \end{array}$$

   Operando y simplificando:

   $$\begin{aligned} f((x,y),(x',y')) &= \frac{1}{2}((x+x')^2 - 6d(x+x')(y+y') + (y+y')^2 - (x^2 - 6dxy + y^2) - (x'^2 - 6dx'y' + y'^2)) = \\ &= \ldots = \frac{1}{2}(2xx' - 6xy' - 6x'y + 2yy') = xx' - 3xy' - 3x'y + yy' \end{aligned}$$

   Ahora $f((x,y),(x',y'))$ es simétrica porque:

   $$f((x',y'),(x,y)) = x'x - 3x'y - 3xy' + y'y = xx' - 3xy' - 3x'y + yy' = f((x,y),(x',y'))$$

   Y por ser simétrica para la bilinealidad basta la linealidad en la primera componente. Pero:

   $$\begin{aligned} f(a(x,y)+b(x',y'),(x'',y'')) &= f((ax+bx', ay+by'),(x'',y'')) = \\ &= (ax+bx')x'' - 3(ax+bx')y'' - 3x''(ay+by') + (ay+by')y'' = \\ &= axx'' + bx'x'' - 3axy'' - 3bx'y'' - 3ax''y - 3bx''y' + ayy'' + by'y'' \end{aligned}$$

   y

   $$\begin{aligned} af((x,y),(x'',y'')) + bf((x',y'),(x'',y'')) &= a(xx'' - 3xy'' - 3x''y + yy'') + b(x'x'' - 3x'y'' - 3x''y' + y'y'') = \\ &= axx'' - 3axy'' - 3ax''y + ayy'' + bx'x'' - 3bx'y'' - 3bx''y' + by'y'' \end{aligned}$$

   y por tanto $f(a(x,y)+b(x',y'),(x'',y'')) = af((x,y),(x'',y'')) + bf((x',y'),(x'',y''))$.

   (b) Otra forma es tener en cuenta lo siguiente. Si suponemos que es una forma cuadrática sabemos trasladando coeficientes que su matriz asociada debería de ser:

   $$F = \begin{pmatrix} 1 & -3d \\ -3d & 1 \end{pmatrix}$$

   Vemos que se cumple entonces que:

   $$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3d \\ -3d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - 6dxy + y^2 = w(x,y).$$

   Y por tanto $w(x,y)$ es una forma cuadrática porque toda expresión de la forma $w(\vec{u}) = \vec{u}^t F \vec{u}$ con F matriz simétrica es una forma cuadrática.

   (c) También se podría decir que $w(x,y) = x^2 - 6dxy + y^2$ es una forma cuadrática porque es una expresión polinómica con todos los monomios de grado 2 (homogénea de grado 2) de las componentes del vector.

2. *Escribir la matriz asociada a w en la base canónica.*

   La forma cuadrática es $w(x,y) = x^2 - 6dxy + y^2$. Trasladando coeficientes de manera adecuada la matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & -3d \\ -3d & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Dar la expresión para $f((x,y),(x',y'))$ siendo f la forma bilineal simétrica asociada a w.*

   Dado que una forma cuadrática y su forma bilineal simétrica asociada (forma polar) tienen la misma matriz asociada. Entonces:

$$f((x,y),(x',y')) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3d \\ -3d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' - 3xy' - 3yx' + yy'.$$

4. *En función de d, clasificar la forma cuadrática obtenida dando además su rango y signatura.*

   Para clasificar la forma cuadrática diagonalizamos por congruencia su matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3d \\ -3d & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(3d)\mu_{21}(3d)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-9d^2 \end{pmatrix}$$

   El rango y las signatura depende de la anulación y el signo del término $1 - 9d^2$. Se tiene que:

$$1 - 9d^2 = 0 \iff d = \pm 1/3$$

   Entonces distinguimos:

   - Si $d < -1/3$ la signatura es $(1,1)$ y el rango 2. Es indefinida y no degenerada.
   - Si $d = -1/3$ la signatura es $(1,0)$ y el rango 1. Es semidefinida positiva y degenerada.
   - Si $-1/3 < d < 1/3$ la signatura es $(2,0)$ y el rango 2. Es definida positiva y no degenerada.
   - Si $d = 1/3$ la signatura es $(1,0)$ y el rango 1. Es semidefinida positiva y degenerada.
   - Si $d > 1/3$ la signatura es $(1,1)$ y el rango 2. Es indefinida y no degenerada.

   Hemos tenido en cuenta que la signatura es (p,q) donde p,q son respectivamente el número de signos positivos y negativos que aparecen en la diagonal en la forma diagonalizada.

   Además la forma es no degenerada si el rango es el máximo posible y degenerada en otro caso.

5. *En función de d dar una base de vectores conjugados.*

   Una base B de vectores conjugados equivale a una base en la cuál la matriz asociada F_B es diagonal. En el apartado anterior hemos obtenido esa forma diagonal mediante congruencia:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & -3d \\ -3d & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(3d)\mu_{21}(3d)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-9d^2 \end{pmatrix} = F_B$$

   Dado que la relación entre la matriz original y la diagonalizada es:

$$F_B = M_{CB}^t F_C M_{CB}$$

   La matrix M_{CB} representa las operaciones columnas hechas en el proceso anterior y se obtiene realizando tales operacioens sobre la identidad:

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(3d)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

   Por tanto la base B de vectores conjugados es la formada por las columnas de la matriz M_{CB}:

$$B = \{(1,0),(3d,1)\}.$$

6. *Para $d = 2$ calcular los vectores autoconjugados de w, expresándolos de la manera más sencilla posible.*

   Para $d = 2$ la forma cuadrática queda $w(x,y) = x^2 - 12xy + y^2$. Por definición los vectores autoconjugados son aquellos vectores (x,y) que cumplen $w(x,y) = 0$, es decir, en este caso:

$$autoconj(w) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 12xy + y^2 = 0\}$$

No obstante para simplificar esa ecuación podemos usar la teoría vista que relaciona el tipo de forma cuadrática con los autoconjugados. Segun vimos en el apartado (iv) para $d = 2 > 1/3$ la forma cuadrática es indefinida de rango 2. En este caso la teoría nos dices que los autoconjugados pueden descomponerse en unión de dos hiperplanos; un hiperplano es un subespacio de dimensión una menos que la total. En este caso como estamos en $\mathbb{R}^2$ un hiperplano es algo de dimensión $2 - 1 = 1$, es decir, una recta.

Entonces sabemos que podemos descomponer los autoconjugados en unión de dos rectas.

La forma más fácil de hacer la descomposición es trabajar en la base B en la cuál la forma cuadrática diagonaliza y por tanto su matriz asociada en dicha base es la matriz diagonal que obtuvimos en el apartado (iv):

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-9d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -35 \end{pmatrix}$$

Por tanto en tal base:

$$w((x', y')_B) = (\, x' \quad y' \,) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'^2 - 35y'^2 = (x' - \sqrt{35}y')(x' + \sqrt{35}y')$$

Entonces:

$$w((x', y')_B) = 0 \iff (x' - \sqrt{35}y')(x' + \sqrt{35}y') = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x' - \sqrt{35}y' = 0 \iff (x', y') \in \mathcal{L}\{(\sqrt{35}, 1)_B\} \\ \text{ó} \\ x' + \sqrt{35}y' = 0 \iff (x', y') \in \mathcal{L}\{(-\sqrt{35}, 1)_B\} \end{array} \right.$$

Por último pasamos los vectores generadores de las dos rectas a la base canónica multiplicando por la matriz de cambio de base $M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (calculada en (v)):

$$M_{CB} \begin{pmatrix} \sqrt{37} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + \sqrt{37} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{CB} \begin{pmatrix} -\sqrt{37} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - \sqrt{37} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En definitiva:

$$autoconj(w) = \mathcal{L}\{(6 + \sqrt{37}, 1)\} \cup \mathcal{L}\{(6 - \sqrt{37}, 1)\}$$

7. *Interpretando la clasificación del apartado anterior, responde razonadamente las siguientes cuestiones:*

Observamos que:

- Si $w(x, y)$ es definida positiva entonces $w(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq 0$ y por tanto
$z(x, y) = 1 + w(x, y) > 1 = z(0, 0)$ para todo (x, y),
y entonces hay un mínimo en $(0, 0)$.

- Si $w(x, y)$ es semidefinida positiva entonces $w(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \neq 0$ y por tanto
$z(x, y) = 1 + w(x, y) \geq 1 = z(0, 0)$ para todo (x, y),
y entonces hay un mínimo en $(0, 0)$ (no es un mínimo estricto pero en todo caso un mínimo).

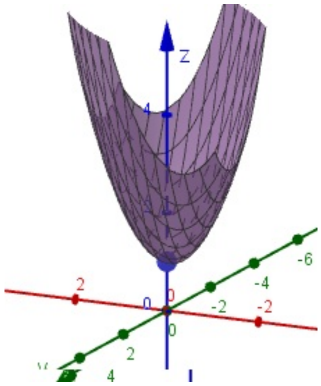
- Si $w(x, y)$ es definida negativa entonces $w(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \neq 0$ y por tanto
$z(x, y) = 1 + w(x, y) < 1 = z(0, 0)$ para todo (x, y)
y entonces hay un máximo en $(0, 0)$.

- Si $w(x, y)$ es semidefinida negativa entonces $w(x, y) \leq 0$ para todo $(x, y) \neq 0$ y por tanto
$z(x, y) = 1 + w(x, y) \leq 1 = z(0, 0)$ para todo (x, y)
y entonces hay un máximo en $(0, 0)$ (no es un máximo estricto pero en todo caso un máximo).

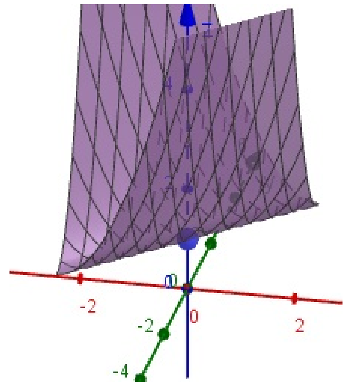
- Si $w(x, y)$ es indefinida hay vectores (x_1, y_1) para los cuales $w(x_1, y_1) > 0$ y otros (x_2, y_2) para los cuales $w(x_2, y_2) < 0$, por tanto $z(x_1, y_1) = 1 + w(x_1, y_1) > 1 = z(0, 0)$ pero $z(x_2, y_2) = 1 + w(x_2, y_2) < 1 = z(0, 0)$ y el $(0, 0)$ no es ni un máximo ni un mínimo.

(a) *¿Para qué valores de d la función $z(x, y) = 1 + w(x, y)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$?.*

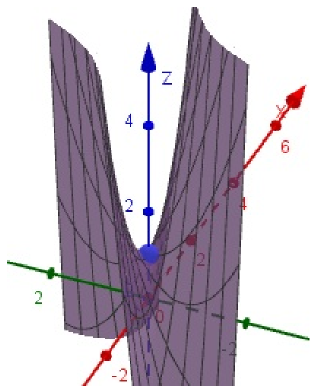
Por lo razonando antes, el mínimo se da cuando la w es definida positiva o semidefinida positiva. Según vimos en el apartado (iv), eso ocurre cuando $-1/3 \leq d \leq 1/3$.



Definida positiva. Mínimo (estricto).



Semidefinda positiva Mínimo (no estricto)



Indefinida Ni mínimo, ni máximo (punto de silla)

(b) *¿Para qué valores de d la función $z(x, y) = 1 + w(x, y)$ tiene un máximo en $(0, 0)$?.*

El máximo se da cuando la w es definida negativa o semidefinida negativa. Pero según el apartado (iv), la forma cuadrática nunca es de ninguno de esos dos tipos. Por tanto en ningún caso hay máximo.

(c) *¿Para qué valores de d la función $z(x, y) = 1+w(x, y)$ no tiene ni un máximo ni un mínimo en $(0, 0)$?.*

Hemos razonado que esto se da cuando es indefinida, lo cual ocurre para $d < -1/3$ ó $d > 1/3$.

8. *Para $d = 2$ dar, si es posible una dirección (p, q) de manera que en el origen la superficie crezca en esa dirección, es decir, se cumpla:*

$$z(0,0) < z((0,0) + t(p,q)) \text{ para todo } t > 0$$

y otra en la que decrezca, es decir, cumpla:

$$z(0,0) > z((0,0) + t(p,q)) \text{ para todo } t > 0$$

Hemos visto en (iv) que para $d = 2$ la forma cuadrática $w(x, y)$ es definida positiva. Eso quieres decir que existen vectores $\vec{u}_1 = (p_1, q_1)$ y $\vec{u}_2 = (p_2, q_2)$ tales que $w(p_1, q_1) > 0$ y $w(p_2, q_2) < 0$. Para tales vectores:

$z((0, 0) + t(p_1, q_1)) = 1 + w(t(p_1, q_1)) = 1 + t^2 w(p_1, q_1) > 1 = z(0, 0)$ para $t > 0$ (y de hecho crece en t, porque la función $t^2 \cdot cte$ es creciente si $cte = w(p_1, q_1) > 0$).

$z((0, 0) + t(p_2, q_2)) = 1 + w(t(p_2, q_2)) = 1 + t^2 w(p_2, q_2) < 1 = z(0, 0)$ para $t > 0$ (y de hecho crece en t, porque la función $t^2 \cdot cte$ es decreciente si $cte = w(p_2, q_2) < 0$).

Así que la cuestión es como localizar esas direcciones (p_i, q_i) cumpliendo cada una de las dos condiciones $w(p_1, q_1) > 0$ y $w(p_2, q_2) < 0$.

Podría hacerse "a ojo", es decir, teniendo en cuenta que:

$$w(p, q) = p^2 - 12pq + q^2$$

intentar elegir (p,q) para que ese valor sea positivo o negativo. Sin embargo hay una forma más sistemática de hacer esto.

Por ser indefinida sabemos que existe una base $B=\{u_1,u_2\}$ tal que la matriz asociada $F_B=\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ es diagonal y en la diagonal aparece un término positivo $d_1>0$ y otro negativo $d_2<0$. Por definición, la matriz asociada es aquella que en la posición i,j tiene la imagen por la forma bilineal asociada del vector u_i con el u_j; en concreto en la diagonal $(i=j)$aparecen los términos $f(u_i,u_i)=w(u_i)$ y por tanto $w(u_i)=d_i$.

En definitiva basta escoger como (p_1,q_1) el vector de la base B tal que en la correspondiente posición de la matriz diagonalizada aparezca un término $d_1>0$ (positivo); y (p_2,q_2) el vector de la base B tal que en la correspondiente posición de la matriz diagonalizada aparezca un término $d_1<0$ (negativo).

Las cuentas las tenemos hechas en el apartado (v) o (vi). Para $d=2$ la forma diagonal y la base en la que se obtiene nos queda:

$$F_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -35 \end{pmatrix}, \quad M_{CB}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\{(1,0),(6,1)\}$$

Por tanto $w(1,0)=1>0$ y $w(6,1)=-35<0$ y son las dos direcciones que buscamos.

Podemos comprobarlo explícitamente:

$z(0,0+t(1,0))=z(t,0)=1+w(t,0)=1+t^2-12\cdot t\cdot 0+0^2=1+t^2=z(0,0)+t^2>z(0,0)$ para $t>0$.

$z(0,0+t(6,1))=z(6t,t)=1+w(6t,t)=1+36t^2-12\cdot(6t)\cdot t+t^2=1-35t^2=z(0,0)-35t^2<z(0,0)$ para $t>0$.