

Sean $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 c_8$ las ocho cifras de tu DNI⁽¹⁾. Por ejemplo si el DNI es 32478910, entonces $c_1 = 3, c_2 = 2, c_3 = 4, c_4 = 7, c_5 = 8, c_6 = 9, c_7 = 1, c_8 = 0$.

Para cada i , con $1 \leq i \leq 8$ llamamos a_i al resto de c_i módulo 5, es decir, el resto que se obtiene al dividir c_i por 5. En el ejemplo anterior $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 4, a_7 = 1, a_8 = 0$.

Para cada $k \in \mathbb{R}$ se considera en $\mathbb{R}^3$ la superficie S de ecuación implícita:

$$x^2 + 2kxy + (a_5 + 1)y^2 - z = 0.$$

Con el DNI puesto de ejemplo queda:

$$x^2 + 2kxy + 16y^2 - z = 0.$$

1. Escribir la ecuación de S como $z = w(x, y)$ donde $w(x, y)$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$.

Despejando z en $x^2 + 2kxy + 16y^2 - z = 0$ queda:

$$z = x^2 + 2kxy + 16y^2$$

es decir

$$z = w(x, y)$$

donde w es la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ definida como $w(x, y) = x^2 + 2kxy + 16y^2$.

2. Escribir la matriz asociada a w en la base canónica.

Escribimos la matriz asociada trasladando coeficientes. En la diagonal los coeficientes de x^2 y y^2 y fuera de la diagonal el coeficiente de xy dividido entre dos:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 16 \end{pmatrix}.$$

3. Dar la expresión para $f((x, y), (x', y'))$ siendo f la forma bilineal simétrica asociada a w .

La matriz asociada a la forma bilineal f asociada a w es la misma que la matriz asociada a w . Por tanto:

$$f((x, y), (x', y')) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + kxy' + kx'y + 16yy'$$

4. Demostrar que $f((x, y), (x', y'))$ es lineal en la primera componente.

Tenemos que demostrar que:

$$f(a(x, y) + b(x', y'), (x'', y'')) = af((x, y), (x'', y'')) + bf((x', y'), (x'', y'')).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f(a(x, y) + b(x', y'), (x'', y'')) &= f((ax + bx', ay + by'), (x'', y'')) = \\ &= (ax + bx')x'' + k(ax + bx')y'' + kx''(ay + by') + 16(ay + by')y'' = \\ &= axx'' + bx'x'' + akxy'' + bkx'y'' + akx''y + bky''y' + 16ayy'' + 16by'y'' \end{aligned}$$

y por otra parte:

$$\begin{aligned} af((x, y), (x'', y'')) + bf((x', y'), (x'', y'')) &= a(xx'' + kxy'' + kx''y + 16yy'') + \\ &\quad + b(bx'x'' + kbx'y'' + kbx''y' + 16by'y'') = \\ &= axx'' + akxy'' + akx''y + 16ayy'' + bx'x'' + \\ &\quad + bkx'y'' + bkx''y' + 16by'y'' \end{aligned}$$

Vemos que coinciden.

5. En función de k , clasificar la forma cuadrática obtenida dando además su rango y signatura.

Para clasificar la forma cuadrática diagonalizamos por congruencia su matriz asociada:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-k)} \xrightarrow{\mu_{21}(-k)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 - k^2 \end{pmatrix} = F_B$$

La signatura depende de los signos de la forma diagonal. Para estudiar para que valores de k se producen cambios de signo, analizamos cuando se anula $16 - k^2$:

$$16 - k^2 = 0 \iff k^2 = 16 \iff k = \pm 4.$$

Distinguimos los casos:

	Signatura	Rango	Clasificación
$k < -4$	(1, 1)	2	NO degenerada e Indefinida
$k = -4$	(1, 0)	2	Degenerada y Semidefinida positiva
$-4 < k < 4$	(2, 0)	2	NO degenerada y Definida positiva
$k = 4$	(1, 0)	1	Degenerada y Semidefinida positiva
$k > 4$	(1, 1)	2	NO degenerada e Indefinida

6. En función de k dar una base de vectores conjugados.

Una base B es de vectores conjugados si y sólo si la matriz asociada en la misma es diagonal. Dado que hemos diagonalizado F_C en el apartado anterior y esto equivale a un cambio de base, basta hallar la matriz M_{CB} que corresponde a las operaciones columna hechas en el proceso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-k)} \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Por tanto la base de vectores conjugados es:

$$B = \{(1, 0), (-k, 1)\}.$$

7. Para $k = 6$ calcular los vectores autoconjugados de w , expresándolos de la manera más sencilla posible.

Para $k = 6$ vimos en el apartado (5) que la forma cuadrática es indefinida y de rango 2. Por tanto los autoconjugados pueden expresarse como la unión de dos rectas.

Si trabajamos en la base $B = \{(1, 0), (-6, 1)\}$ obtenida anteriormente, la matriz de la forma cuadrática es

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}. \text{ Entonces:}$$

$$\begin{aligned} \text{autoconj}(w) &= \{(x', y')_B | (x', y')^t F_B (x', y') = 0\} = \{(x', y')_B | x'^2 - 20y'^2 = 0\} = \\ &= \{(x', y')_B | (x' - \sqrt{20}y')(x' + \sqrt{20}y') = 0\} = \{(x', y')_B | x' - \sqrt{20}y' = 0\} \cup \{(x', y')_B | x' + \sqrt{20}y' = 0\} \\ &= \mathcal{L}\{(\sqrt{20}, 1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(\sqrt{20}, -1)_B\} \end{aligned}$$

Cambiamos de base los vectores generadores de ambas rectas a la base canónica:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{20} - 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{20} + 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\text{autoconj}(w) = \mathcal{L}\{(\sqrt{20} - 6, 1)\} \cup \mathcal{L}\{(\sqrt{20} + 6, -1)\}$$

8. Interpretando la clasificación del apartado anterior, responde razonadamente las siguientes cuestiones:

(a) ¿Para qué valores de k la función $z = w(x, y)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$?

En el punto $(0, 0)$ la función vale $z = w(0, 0) = 0$. Tiene un mínimo en $(0, 0)$ si en cualquier otro punto (x, y) cumple:

$$0 = w(0, 0) \leq w(x, y)$$

Esto ocurre precisamente si la forma cuadrática w es semidefinida positiva o definida positiva. Según lo analizado en el apartado (5) cuando $-4 \leq k \leq 4$.

(b) ¿Para qué valores de k la función $z = w(x, y)$ tiene un máximo en $(0, 0)$?

Análogamente a lo indicado en el apartado anterior, la función tiene un máximo en $(0, 0)$ si en cualquier otro punto (x, y) cumple:

$$0 = w(0, 0) \geq w(x, y)$$

es decir, si la forma cuadrática w es semidefinida negativa o definida negativa. Según lo analizado en el apartado (5) no se da para ningún valor de k .

(c) ¿Para qué valores de k la función $z = w(x, y)$ no tiene ni un máximo ni un mínimo en $(0, 0)$?

Esto ocurre cuando para diferentes puntos (x, y) se obtiene que en unos $w(x, y) > w(0, 0)$ y en otros $w(x, y) < w(0, 0)$, es decir, cuando la forma cuadrática es indefinida. Por lo analizado en el apartado (5), para $k < -4$ ó $k > 4$.

9. Para los valores de k tales que w es semidefinida, dar la ecuación de una recta que pase por el origen contenida en la superficie S .

Una recta que pase por el origen y esté generada por el vector (a, b, c) tiene por ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = t(a, b, c) = (at, bt, ct)$$

para algún (a, b, c) no nulo. Para que esté contenida en la superficie tiene que cumplirse que los puntos cumplan la ecuación de la misma, es decir, $z = w(x, y)$. Por tanto:

$$ct = w(at, bt) = t^2 w(a, b) \Rightarrow c = tw(a, b)$$

Como c es constante tiene que ocurrir que $c = tw(a, b)$ sea constante, es decir, que no dependa de t . Necesariamente esto ocurre sólo si $w(a, b) = 0$.

Se trata entonces de encontrar un vector (a, b) no nulo tal que $w(a, b) = 0$. Eso es un vector autoconjugado. Como la forma es indefinida estos coinciden con los vectores del núcleo.

La forma cuadrática era indefinida para $k = -4$ y $k = 4$.

Para $k = -4$ el núcleo es:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - 4y = 0.$$

Entonces tomamos un vector cumpliendo esa ecuación: $(a, b) = (4, 1)$. La recta contenida en la superficie es la generada por $(4, 1, 0)$:

$$(x, y, z) = t(4, 1, 0) = (4t, t, 0)$$

Para $k = 4$ el núcleo es:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + 4y = 0.$$

Entonces tomamos un vector cumpliendo esa ecuación: $(a, b) = (4, -1)$. La recta contenida en la superficie es la generada por $(4, -1, 0)$:

$$(x, y, z) = t(4, -1, 0) = (4t, -t, 0)$$

10. Si tomamos $(x, y) = t(a, b)$ con (a, b) fijo, entonces $\alpha(t) = (at, bt, w(at, bt))$ es la ecuación paramétrica de una curva contenida dentro de la superficie.

Teniendo en cuenta esto, para $k = 6$ dar la ecuación paramétrica de dos curvas contenidas dentro de ella; una que tome valores siempre por encima del plano XY y otra que sólo tome valores por debajo.

Tenemos en cuenta que:

$$\alpha(t) = (at, bt, w(at, bt)) = (at, bt, t^2 w(a, b))$$

Por tanto que la curva esté por encima o por debajo del plano XY , es decir, que la coordenada z de la curva sea positiva o negativa, depende del signo de $w(a, b)$.

Para que la curva esté por encima del plano XY tenemos que encontrar un vector (a, b) tal que $w(a, b) > 0$. Para que esté por debajo un vector (a', b') tal que $w(a', b') < 0$.

Como hemos visto que para $k = 6$ la forma es indefinida ambos vectores existen. La forma cuadrática es:

$$w(x, y) = x^2 + 12xy + 16y^2$$

Podríamos encontrar dos vectores, uno con valor positivo y otro negativo a ojo. Pero es más fácil si trabajamos con la forma diagonalizada en la base B . En ese caso vimos que:

$$w((x', y')_B) = x'^2 - 20y'^2$$

Por tanto podemos tomar $(a, b) = (1, 0)_B$ para valores positivos y $(a', b') = (0, 1)_B$ para negativos. Los cambiamos a la base canónica:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La curva por encima del plano XY queda:

$$\alpha(t) = (t, 0, w(t, 0)) = (t, 0, t^2)$$

y la curva por debajo:

$$\alpha(t) = (-6t, t, t^2 w(-6, 1)) = (-6t, t, -20t^2)$$