Se consideran en $\mathbb{R}^3$ *cuatro superficies de ecuaciones implícitas:*

a) $3xy - y^2 - z = 0$, *b)* $x^2 - 2xy + y^2 - z = 0$, *c)* $xy - x^2 - 2y^2 - z = 0$, *d)* $x^2 - xy + 3y^2 - z = 0$,

1. *Escribir cada una de ellas de la forma* $z = w(x, y)$ *donde* $w(x, y)$ *es una forma cuadrática en* $\mathbb{R}^2$.

   Basta despejar en cada ecuación la variable z. Obtenemos:

   a) $z = w(x, y)$ con $w(x, y) = 3xy - y^2$.

   b) $z = w(x, y)$ con $w(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$.

   c) $z = w(x, y)$ con $w(x, y) = xy - x^2 - 2y^2$.

   d) $z = w(x, y)$ con $w(x, y) = x^2 - xy + 3y^2$.

2. *Para cada una de las cuatro formas cuadráticas del apartado anterior escribir su matriz asociada en la base canónica.*

   En cada caso construimos la matriz asociada en la base canónica trasladando los coeficientes. En las posiciones $1, 1$ y $2, 2$ los coeficientes de x^2 e y^2 respectivamente; y en las posiciones $1, 2$ y $2, 1$ la mitad del coeficiente de xy.

   a) $F_C = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}$.

   b) $F_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   c) $F_C = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}$.

   d) $F_C = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. *Clasificar las formas cuadráticas obtenidas en función de su rango y signatura.*

   Para clasificar las formas cuadráticas las diagonalizamos por congruencia y así calculamos su rango y signatura:

   a) $\begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(3/2)} \xrightarrow{\mu_{21}(3/2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9/4 \end{pmatrix}$.

   La signatura es $(1, -1)$ y el rango 2. Es por tanto indefinida y no degenerada.

   b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1)} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   La signatura es $(1, 0)$ y el rango 1. Es por tanto semidefinida positiva y degenerada.

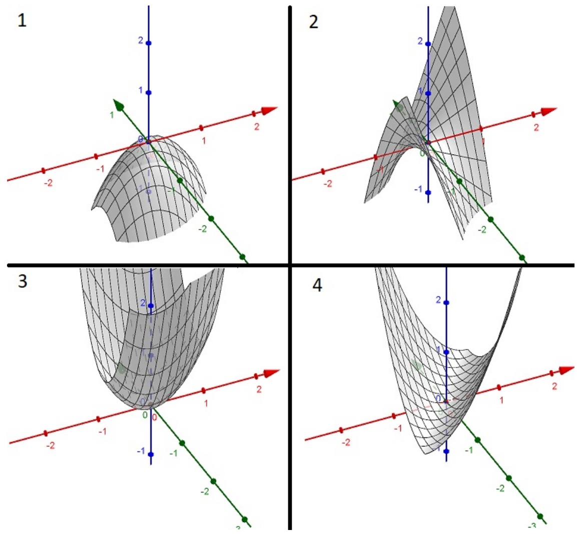
   c) $\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1/2)} \xrightarrow{\mu_{21}(1/2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7/4 \end{pmatrix}$.

   La signatura es $(0, 2)$ y el rango 2. Es por tanto definida negativa y no degenerada.

   d) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1/2)} \xrightarrow{\mu_{21}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11/4 \end{pmatrix}$.

   La signatura es $(2, 0)$ y el rango 2. Es por tanto definida positiva y no degenerada.

4. Interpretando la clasificación del apartado anterior, decidir razonadamente a cuál de las ecuaciones dadas corresponde cada una de las cuatro gráficas que se muestran a continuación:



En la primera gráfica nos fijamos que toda la superficie está en el semiespacio con la coordenada $z \leq 0$. Por tanto corresponde a una superficie $z = w(x, y)$ donde $w(x, y)$ no puede tomar valores positivos. Esto ocurre cuando la forma cuadrática es definida negativa o semidefinida negativa; de las cuatro formas cuadráticas dadas esto sólo lo cumple la c).

La segunda gráfica toma valores positivos y negativos en el eje OZ. Corresponde a una ecuacíon $z = w(x, y)$ con $w(x, y)$ indefinida. Es la superficie a).

La tercera sólo alcanza valores no negativos y por tanto la correspondiente forma cuadrática es definida positiva o semidefinida positiva. Esto lo cumplen los caos b) y d). Sin embargo si fuese semidefinida el núcleo es no nulo, o en otras palabras, sobre al menos una recta tendría que aclanzar el valor cero. Pero eso no ocurre para la gráfica del dibujo némero tres: sólo toma el valor nulo en el origen. Se trata entonces de superficie con forma cuadrática definida positiva, es decir, la ecuación d).

Finalmente la última gráfica toma valores no negativos y es nula sobre una recta. Corresponde a $z = w(x, y)$ con $w(x, y)$ semidefinida positiva: es la ecuación b).

5. *Si en cualquiera de las cuatro superficies expresadas como $z = w(x, y)$ tomamos $(x, y) = t(a, b)$ con (a, b) fijo, entonces $\alpha(t) = (at, bt, w(at, bt))$ es la ecuación paramétrica de una curva contenida dentro de la superficie.*

   Teniendo en cuenta esto, para la superficie de la gráfica 2 dar la ecuación paramétrica de dos curvas contenidas dentro de ella; una que tome valores siempre por encima del plano XY y otra que sólo tome valores por debajo.

   Dado que una forma cuadrática cumple $w(t\vec{v}) = t^2 w(\vec{v})$, una curva como la indicada queda:

$$\alpha(t) = (at, bt, w(at, bt)) = (at, bt, t^2 w(a, b))$$

   Por tanto que la curva tome valores positivos o negativos en el eje OZ depende del signo de $w(a, b)$, ya que está multiplicado por t^2 que nunca es negativo.

   Entonces para encontrar una curva que tome valores siempre por encima del plano XY y otra que sólo tome valores por debajo, necesitamos encontrar un vector (a_1, b_1) tal que $w(a_1, b_1) > 0$ y otro (a_2, b_2) tal que $w(a_2, b_2) < 0$, siendo $w(x, y) = 3xy - y^2$.

   Para ello utilizamos que hemos diagonalizado la forma cuadrática; eso significa que en una determinada base B tiene por matriz asociada la diagonal que hemos obtenido:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix} \overset{H_{12}}{\longrightarrow} \overset{\mu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(3/2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(3/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9/4 \end{pmatrix}.$$

   Los vectores $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de esa base son respectivamente en los que la forma cuadrática vale -1 y $9/4$. Por tanto cumplen el papel que pedíamos a (a_2, b_2) y (a_1, b_1) respectivamente. Para hallarlos realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que en el proceso anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(3/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = M_{CB}.$$

Obtenemos $(a_1, b_1) = \vec{v}_2 = (1, 3/2)$ y $(a_2, b_2) = \vec{v}_1 = (0, 1)$
La curva que toma valores positivos sobre la diagonal es (en azul en el dibujo):

$$\alpha_2(t) = (1 \cdot t, (3/2) \cdot t, w(1 \cdot t, (3/2) \cdot t)) = (t, 3t/2, w(t, 3t/2)) = (t, 3t/2, 9t^2/4)$$

y la que toma valores negativos (en rojo en el dibujo):

$$\alpha_1(t) = (0 \cdot t, 1 \cdot t, w(0 \cdot t, 1 \cdot t)) = (0, t, w(0, t)) = (0, t, -t^2)$$