

El objetivo de este ejercicio es estudiar otras formas de calcular las matrices asociadas a la proyección ortogonal y a las simetrías. Trabajaremos en $\mathbb{R}^n$, respecto de la base canónica y con el producto escalar usual. Todo el desarrollo es igualmente válido en cualquier espacio vectorial euclideo n -dimensional trabajando respecto a una base ortonormal.

1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ una matriz de rango m . Demostrar que $A^t A \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ es una matriz inversible.

Sugerencia: Probar que para todo vector columna $v \in \mathbb{R}^m$ se cumple que $A^t A v = 0$ si y sólo si $v = 0$, es decir, que la única solución del sistema $A^t A x = 0$ es la trivial. Deducir de ahí que $A^t A$ tiene rango máximo y es por tanto inversible.

La matriz $B = A^t A$ es una matriz cuadrada $m \times m$. Si probamos que $A^t A v = 0$ si y sólo si $v = 0$, estaremos demostrando que el sistema de ecuaciones homogéneo que matricialmente se expresa como $Bx = 0$ tiene solución única. Por tanto, la matriz del sistema tiene rango máximo y así $\text{rango}(B) = m$ y por tanto $B = A^t A$ es inversible.

Veamos entonces que, $A^t A v = 0$ si y sólo si $v = 0$.

- Si $v = 0$ es inmediato que $A^t A v = 0$.

- Supongamos que $A^t A v = 0$. Entonces:

$$0 = v^t A^t A v = (Av)^t (Av)$$

Observamos que Av es un vector columna. $(Av)^t (Av)$ es por tanto el producto escalar del vector Av por sí mismo y así:

$$0 = v^t A^t A v = (Av)^t (Av) = \|Av\|^2 \quad \Rightarrow \quad Av = 0$$

ya que el único vector de norma cero es el nulo.

Finalmente como $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ y $\text{rango}(A) = m$ el sistema lineal homogéneo $Ax = 0$ tiene como solución única la trivial y así si $Av = 0$ entonces $v = 0$.

2. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial generado por los vectores independientes $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Sea A la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B . Demostrar que la matriz:

$$P = A(A^t A)^{-1} A^t$$

es la matriz asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre A .

Sugerencia: Basta probar que $Pu = u$ si u es un vector de V y $Pu = 0$ si u es un vector ortogonal a V .

Observamos que la matriz P definida como $P = A(A^t A)^{-1} A^t$ existe porque hemos visto en el apartado anterior que $A^t A$ es inversible (la matriz A tiene rango m porque sus columnas son m vectores independientes).

La proyección sobre el subespacio V es un endomorfismo que se caracteriza por mantener constantes los vectores de V y llevar al cero los ortogonales al mismo. Además, dado que se puede formar una base de todo el espacio uniendo una de V y otra de su ortogonal y un endomorfismo queda inequívocamente

determinado si se define como actúa sobre una base, para demostrar que P es la matriz de la proyección es suficiente demostrar lo que indica la sugerencia: $Pu = u$ si u es un vector de V y $Pu = 0$ si u es un vector ortogonal a V

- Sea $u \in V$; por ser $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ base de V se tiene que:

$$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_m u_m.$$

Matricialmente lo anterior puede escribirse como:

$$u = Ab \text{ donde } b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t$$

y A es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B .

Entonces:

$$Pu = A(A^t A)^{-1} A^t u = A(A^t A)^{-1} A^t Ab = A(A^t A)^{-1} (A^t A)b = Ab = u.$$

- Sea $u \in V^\perp$. Significa que u es ortogonal a todos los vectores de V . En particular es ortogonal a todos los de la base B , es decir, $u_i \cdot u = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Esto equivale matricialmente a que el producto de todos los vectores fila u_i por el vector columna u (como vectores de $\mathbb{R}^n$) es nulo, es decir, a que $A^t u = 0$. Entonces:

$$Pu = A(A^t A)^{-1} A u = A(A^t A)^{-1} 0 = 0.$$

3. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial generado por los vectores independientes $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Sea A la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B . Demostrar que la matriz:

$$S = 2P - Id \text{ con } P = A(A^t A)^{-1} A^t$$

es la matriz asociada a la simetría respecto al subespacio V .

Sugerencia: Basta probar que $Su = u$ si u es un vector de V y $Su = -u$ si u es un vector ortogonal a V .

De manera análoga a lo que detallamos en el apartado anterior para la proyección, se justifica que la simetría respecto de V está caracterizada de manera inequívoca por conservar los vectores de V y cambiar de signos los perpendiculares al mismo. Por eso es suficiente probar lo indicado en la sugerencia: $Su = u$ si u es un vector de V y $Su = -u$ si u es un vector ortogonal a V .

Veamos que es consecuencia de lo demostrado en el apartado anterior:

- Si $u \in V$ hemos visto en (2) que $Pu = u$. Entonces:

$$Su = (2P - Id)u = 2Pu - u = 2u - u = u.$$

- Si $u \in V^\perp$ hemos visto en (2) que $Pu = 0$. Entonces:

$$Su = (2P - Id)u = 2Pu - u = 0 - u = -u.$$

4. Usando lo anterior resolver los apartados (a) y (b) del ejercicio 1 de la práctica de transformaciones ortogonales.

Apartado (a) Se trata de calcular de la simetría respecto al subespacio $V = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$.

Aplicamos la fórmula $S = 2P - Id$ donde $P = A(A^t A)^{-1} A^t$ y A es la matriz cuyas columnas son los vectores de los generadores de V :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

y

$$P = A(A^t A)^{-1} A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$S = 2P - Id = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Apartado (b) Se trata ahora de calcular de la simetría respecto al subespacio $V = \mathcal{L}\{(1, 1, 1), (2, 0, 1)\}$.

Como antes, aplicamos la fórmula $S = 2P - Id$ donde $P = A(A^t A)^{-1} A^t$ y A es la matriz cuyas columnas son los vectores de los generadores de V :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

y

$$\begin{aligned} P &= A(A^t A)^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$S = 2P - Id = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$