

El objetivo de este ejercicio es estudiar otras formas de calcular las matrices asociadas a la proyección ortogonal y a las simetrías. Trabajaremos en  $\mathbb{R}^n$ , respecto de la base canónica y con el producto escalar usual. Todo el desarrollo es igualmente válido en cualquier espacio vectorial euclideo  $n$ -dimensional trabajando respecto a una base ortonormal.

1. Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  una matriz de rango  $m$ . Demostrar que  $A^t A \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  es una matriz inversible.

*Sugerencia:* Probar que para todo vector columna  $v \in \mathbb{R}^m$  se cumple que  $A^t A v = 0$  si y sólo si  $v = 0$ , es decir, que la única solución del sistema  $A^t A x = 0$  es la trivial. Deducir de ahí que  $A^t A$  tiene rango máximo y es por tanto inversible.

2. Sea  $V \subset \mathbb{R}^n$  un subespacio vectorial generado por los vectores independientes  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ . Sea  $A$  la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de  $B$ . Demostrar que la matriz:

$$P = A(A^t A)^{-1} A^t$$

es la matriz asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre  $A$ .

*Sugerencia:* Basta probar que  $Pu = u$  si  $u$  es un vector de  $V$  y  $Pu = 0$  si  $u$  es un vector ortogonal a  $V$ .

3. Sea  $V \subset \mathbb{R}^n$  un subespacio vectorial generado por los vectores independientes  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ . Sea  $A$  la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de  $B$ . Demostrar que la matriz:

$$S = 2P - Id \text{ con } P = A(A^t A)^{-1} A^t$$

es la matriz asociada a la simetría respecto al subespacio  $V$ .

*Sugerencia:* Basta probar que  $Su = u$  si  $u$  es un vector de  $V$  y  $Su = -u$  si  $u$  es un vector ortogonal a  $V$ .

4. Usando lo anterior resolver los apartados (a) y (b) del ejercicio 1 de la práctica 2.3. de transformaciones ortogonales.

### **Normas:**

- La entrega de la práctica es voluntaria.
- La fecha límite de entrega es el Viernes 17 de Abril a las 12:30.
- Supondrá hasta un máximo de 0.5 puntos en la nota final de la materia, en la forma precisa explicada en la presentación de la asignatura.
- Sólo se recogerán las prácticas que sean entregadas dentro del plazo indicado.
- Se penalizará hasta el suspenso, cualquier indicio de copia o fraude en la autoría del trabajo presentado.
- En cada práctica debe de figurar el nombre y el DNI del alumno y mantener unos mínimos de calidad en la presentación.
- Los alumnos podrán ser requeridos para que expongan y expliquen oralmente la práctica entregada y muestren pleno conocimiento de lo que han escrito.