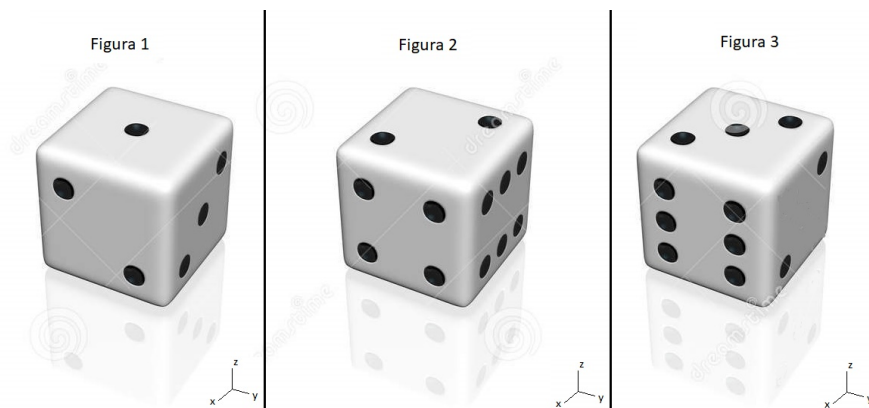


Consideramos el espacio $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar usual y con la base canónica determinando la orientación positiva.

Las siguientes figuras corresponden a dados cúbicos de dos unidades de arista y centrados en el origen de coordenadas. Como es usual en la construcción de los dados las caras opuestas suman siete.



1. Hallar (si existen) las matrices A_1, A_2, A_3 respecto de la base canónica de tres transformaciones ortogonales que lleven respectivamente la figura 1 en la figura 2, la figura 2 en la figura 3 y la figura 3 en la figura 1.

Denotamos a los dados de las tres figuras respectivamente por P, Q, R . Denotaremos a su vez para cada uno de ellos por p_i, q_i, r_i los vectores que unen el centro del cubo con la cara con i puntos. Así:

$$p_1 = (0, 0, 1), p_2 = (1, 0, 0), p_3 = (0, 1, 0) \\ p_4 = (0, -1, 0), p_5 = (-1, 0, 0), p_6 = (0, 0, -1)$$

$$q_1 = (0, -1, 0), q_2 = (0, 0, 1), q_3 = (-1, 0, 0) \\ q_4 = (1, 0, 0), q_5 = (0, 0, -1), q_6 = (0, 1, 0)$$

$$r_1 = (-1, 0, 0), r_2 = (0, 1, 0), r_3 = (0, 0, 1) \\ r_4 = (0, 0, -1), r_5 = (0, -1, 0), r_6 = (1, 0, 0)$$

Usaremos que una aplicación lineal queda inequívocamente determinada si conocemos la imagen de los vectores de una base.

La transformación f_1 de la figura 1 en la figura 2 lleva los vectores p_i respectivamente en los q_i . En particular:

$$f_1(p_2) = q_2 \iff f(1, 0, 0) = (0, 0, 1) \\ f_1(p_3) = q_3 \iff f(0, 1, 0) = (-1, 0, 0) \\ f_1(p_1) = q_1 \iff f(0, 0, 1) = (0, -1, 0)$$

Por tanto la matriz asociada en la base canónica es:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La transformación f_2 de la figura 2 en la figura 3 lleva los vectores q_i respectivamente en los r_i . En particular:

$$f_2(q_4) = r_4 \iff f(1, 0, 0) = (0, 0, -1) \\ f_2(q_6) = r_6 \iff f(0, 1, 0) = (1, 0, 0) \\ f_2(q_2) = r_2 \iff f(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$$

Por tanto la matriz asociada en la base canónica es:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La transformación f_3 de la figura 3 en la figura 1 lleva los vectores r_i respectivamente en los p_i . En particular:

$$f_3(r_6) = p_6 \iff f(1, 0, 0) = (0, 0, -1) \\ f_3(r_2) = p_2 \iff f(0, 1, 0) = (1, 0, 0) \\ f_3(r_3) = p_3 \iff f(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$$

Por tanto la matriz asociada en la base canónica es:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta última también podría haberse obtenido componiendo la inversa de la transformación que va de la figura 2 a la 3 con la inversa de la que va de la 3 a la 1.

2. Clasificar las transformaciones ortogonales del apartado anterior detallando toda la información geométrica relevante de cada una de ellas.

Para cada una de ellas calculamos su determinante. Si es 1 será un giro. Si es -1 será un giro compuesta con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

Transformación de la figura 1 en 2.

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1. \text{ Se trata de un giro.}$$

Calculamos el semieje de giro como la semirecta generada por un autovector asociado al 1:

$$(A_1 - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x - y = 0, \quad -y - z = 0 \iff x - z = 0.$$

Tomamos como generador del semieje $u_1 = (1, -1, 1)$.

Si α_1 es el ángulo de giro se tiene que:

$$1 + 2\cos(\alpha_1) = \text{traza}(A_3) = 0 \iff \cos(\alpha) = -\frac{1}{2} \iff \alpha = \pm \frac{2\pi}{3}$$

Para saber el signo del giro tomamos una base formada por el semieje $(1, -1, 1)$, un vector arbitrario independiente del primero $(1, 0, 0)$ y ese mismo vector girado $A_1(1, 0, 0)^t$. El signo de giro coincide con la orientación de tal base:

$$B = \{(1, -1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}, \quad \det(M_{CB}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Se trata de un giro de ángulo $2\pi/3$ respecto del semieje generado por $(1, -1, 1)$.

Transformación de la figura 2 en 3.

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1. \text{ Se trata de un giro compuesta con una}$$

simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

Calculamos el semieje de giro como la semirecta generada por un autovector asociado al -1 :

$$(A_2 + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0, \quad y + z = 0 \iff -x + z = 0.$$

Tomamos como generador del semieje $u_2 = (1, -1, 1)$.

Si α_2 es el ángulo de giro se tiene que:

$$-1 + 2\cos(\alpha_2) = \text{traza}(A_1) = 0 \iff \cos(\alpha_1) = 1/2 \iff \alpha_1 = \pm \frac{\pi}{3}$$

Para saber el signo del giro tomamos una base formada por el semieje $(1, -1, 1)$, un vector arbitrario independiente del primero $(1, 0, 0)$ y ese mismo vector girado $A_2(1, 0, 0)^t$. El signo de giro coincide con la orientación de tal base:

$$B = \{(1, -1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, -1)\}, \quad \det(M_{CB}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Finalmente el plano de simetría es perpendicular al semieje de giro:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) \cdot (1, -1, 1) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}.$$

Se trata de una simetría respecto al plano $x - y + z = 0$ compuesto con un giro de ángulo $-\pi/3$ respecto del semieje generado por $(1, -1, 1)$.

Transformación de la figura 3 en 3.

Es la misma que la transformación de la 2 a la 3.

3. *¿Pueden las tres figuras corresponder a distintas vistas de un mismo dado? Razona la respuesta. En caso negativo indica que pares de figuras si corresponden a un mismo objeto.*

Existen dos tipos de transformaciones ortogonales: directas e inversas. Las primeras conservan la orientación y por tanto corresponden a movimientos reales de un sólido; las segundas invierten la orientación y por tanto NO corresponden a movimientos reales de un objeto (salvo que se refleje en un espejo). Hay que tener en cuenta que el cambio de orientación supondría que al relizar la transformación sobre un reloj éste giraría después en el sentido opuesto al que lo hacía al principio.

Las transformaciones directas son las que tienen determinante 1 y las inversas -1 . En nuestro caso las transformaciones de la figura 2 a la 3 y la 3 a la 1 son inversas. Por tanto los dados 1 y 2 son diferentes al dado 3.

Por el contrario la transformación del dado 1 al 2 es directa y así corresponden a distintas vistas de un mismo dado.

4. *Al primer dado se le aplica una transformación ortogonal cuya matriz asociada en la base canónica cumple $|F_C| = -1$, $\text{traza}(F_C) = 0$ y tiene al vector $(1, 1, -1)$ por autovector asociado al -1 . ¿Está inequívocamente determinada la transformación?. Dibujar la nueva posición (o posibles posiciones si hubiese varias) del dado.*

Con los datos dados podemos clasificar la transformación que se le aplica.

Dado que $|F_C| = -1$ se trata de un giro compuesto con una simetría respecto del plano perpendicular al eje de giro.

El semieje de giro corresponde a un autovector asociado al -1 , es decir, está generado por $(1, 1, -1)$.

Para hallar el ángulo α usamos que:

$$0 = \text{traza}(F_C) = -1 + 2\cos(\alpha)$$

de donde:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm \arccos(1/2) = \pm \pi/3.$$

Con los datos dados no tenemos información para saber el sentido del giro, por tanto la transformación no está inequívocamente determinanda.

En cualquier caso sabemos que se trata de un giro de semieje generado por $(1, 1, -1)$ y ángulo $\pm \pi/3$ compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al semieje. Con esos datos y barajando las dos opciones para el signo del ángulo podemos hallar las dos posibles matrices asociadas a la transformación.

Para ello construimos primero una base ortogonal con el primer vector el semieje $u_1 = (1, -1, 1)$. Un vector (x, y, z) perpendicular a él cumple:

$$(x, y, z) \cdot (1, 1, -1) = 0 \iff x + y - z = 0$$

Tomamos por ejemplo $u_2 = (1, -1, 0)$. Un tercer vector perpendicular a ambos cumple:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \cdot (1, 1, -1) &= 0 \iff x + y - z = 0 \\ (x, y, z) \cdot (1, -1, 0) &= 0 \iff x - y = 0 \end{aligned}$$

Tomamos por ejemplo $u_3 = (1, 1, 2)$.

Verificamos la orientación de la base $(1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 1, 2)$ comprobando el signo del determinante de la matriz de cambio de base a la base canónica:

$$|M_{CB}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 < 0$$

Cambiamos de signo el segundo vector: $(1, 1, -1), (-1, 1, 0), (1, 1, 2)$

Normalizamos la base dividiendo cada vector por su norma y queda:

$$B = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$$

En esa base la matriz asociada a la transformación es:

$$T_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pm\pi/3) & -\sin(\pm\pi/3) \\ 0 & \sin(\pm\pi/3) & \cos(\pm\pi/3) \end{pmatrix}.$$

Finalmente hacemos el cambio de base a la canónica:

$$T_C = M_{CB}T_B M_{CB}^{-1} = M_{CB}T_B M_{CB}^t$$

donde la inversa de la matriz de cambio de base coincide con la traspuesta por ser la matriz de cambio de base entre bases ortonormales.

Operando y dependiendo del signo del ángulo obtenemos dos posibles matrices:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ó

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para dibujar como queda el dado observamos que las columnas de las matrices asociadas indican las imágenes de los vectores de la base canónica.

En el primer dado vimos que $p_2 = (1, 0, 0)$, $p_3 = (0, 1, 0)$ y $p_1 = (0, 0, 1)$. Al aplicar la matriz T_1 los vectores se transforman respectivamente en $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$. Eso nos indica en que posición han quedado las caras 2, 3, 1 al aplicar la transformación (y sus opuestas). El dado queda:



y análogamente para el segundo las caras 2, 3, 1 quedan en las posiciones $(0, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, 1, 0)$ respectivamente. Por tanto el dado queda:

