Part IV

Cónicas y Cuádricas.

1. Cónicas.

En todo este capítulo trabajaremos en el plano afín euclídeo E_2 con respecto a una referencia rectangular $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Denotaremos por (x, y) las coordenadas respecto a esta referencia y por (x, y, t) las coordenadas homogéneas.

1 Definición y ecuaciones.

Definición 1.1 *Una* **cónica** *es una curva plana determinada, en coordenadas, por una ecuación de segundo grado.*

De esta forma la **ecuación general de una cónica será**:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$$

con $(a_{11}, a_{22}, a_{12}) \neq (0, 0, 0)$ (para garantizar que la ecuación es de segundo grado).

Otras expresiones equivalentes de la ecuación de una cónica son:

1. En función de la **matriz A asociada a la cónica** (toda matriz simétrica determina una cónica):

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

2. En función de la **matriz T de términos cuadráticos**:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0, \qquad \text{con } T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \neq \Omega.$$

3. En coordenadas homogéneas:

$$\begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

De la última ecuación deducimos que, en coordenadas homogénas, los puntos de la cónica son los vectores autoconjugados de la forma cuadrática que determina la matriz asociada A.

Definición 1.2 *Diremos que una cónica es* **degenerada** *cuando está formada por dos rectas (iguales o distintas, reales o imaginarias).*

Veremos más adelante que **una cónica es degenerada cuando su matriz asociada A tiene determinante nulo**.

2 Intersección de una recta y una cónica.

Consideramos una cónica dada por una matriz simétrica A. Sean $P = (p)$ y $Q = (q)$ dos puntos cualesquiera. Calculemos en coordenadas homogéneas la intersección de la recta que los une y la cónica:

$$\begin{array}{rcl} \text{recta } PQ & \equiv & (x) = \alpha(p) + \beta(q). \\ \text{cónica} & \equiv & (x)^t A(x) = 0. \end{array}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda queda:

$$(\alpha(p) + \beta(q))^t A(\alpha(p) + \beta(q)) = 0 \iff \alpha^2(p)^t A(p) + 2\alpha\beta(p)^t A(q) + \beta^2(q)^t A(q) = 0.$$

- Si $(p)^t A(p) = (p)^t A(q) = (q)^t A(q) = 0$ la ecuación se cumple para cualquier par (α, β) luego la recta está contenida en la cónica.

- En otro caso, obtenemos una ecuación de segundo grado de discriminante:

$$\frac{1}{4}\Delta = [(p)^t A(q)]^2 - [(p)^t A(p)][(q)^t A(q)].$$

Hay tres posibilidades:

1. $\Delta > 0$**: Recta secante.** Hay dos soluciones reales distintas, luego la recta corta a la cónica en dos puntos distintos.
2. $\Delta = 0$**: Recta tangente.** Hay una solución doble, luego la recta corta a la cónica en un punto doble.
3. $\Delta < 0$**: Recta exterior.** No hay soluciones reales. La recta no corta a la cónica.

Podemos aplicar esto a dos situaciones:

1. **Recta tangente a la cónica en un punto P de la misma.** Si P está en la cónica entonces $(p)^t A(p) = 0$. Por tanto la recta tangente tendrá por ecuación:

$$\boxed{(p)^t A(x) = 0}$$

2. **Rectas tangentes a la cónica desde un punto P exterior.** Si P es un punto exterior a la cónica, las rectas tangentes a la misma se obtendrán mediante la ecuación:

$$\boxed{[(p)^t A(x)]^2 - [(p)^t A(p)][(x)^t A(x)] = 0}$$

teniendo en cuenta que dicha ecuación se descompondrá como producto de dos ecuaciones lineales.

En la siguiente sección veremos como la **polaridad** nos proporcionará otro método para calcular estas rectas.

3 Polaridad.

Trabajamos con una cónica de matriz asociada A.

Definición 3.1 *Dado un punto P de coordenadas homogéneas (p^1, p^2, p^3) y una cónica determinada por una matriz A, se llama* **recta polar de P respecto a la cónica** *y se denota por r_P, a la recta de ecuación:*

$$(\,p^1 \quad p^2 \quad p^3\,)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0.$$

P se dice el **polo** *de la recta.*

Observación 3.2 *Los conceptos de polo y recta polar son duales. Supongamos que la cónica definida por A es no degenerada. Dados un polo P y su recta polar r_p* **la famila de rectas pasando por** *P se corresponde con* **las rectas polares de los puntos de** *r_P. Para comprobar esto simplemente tenemos en cuenta lo siguiente. Sean (p) las coordenadas de P. Si B y C son dos puntos de r_P, con coordenadas (b) y (c) respectivamente, se tiene que:*

$$\begin{array}{lcl} (p)^t A(b) = 0 & \Rightarrow & P \in \text{ recta polar de } B \\ (p)^t A(c) = 0 & \Rightarrow & P \in \text{ recta polar de } C \end{array}$$

Por tanto el haz de rectas que pasa por P será:

$$\begin{array}{rl} \text{rectas pasando por } P & \Longleftrightarrow \ \alpha(b)^t A(x) + \beta(c)^t A(x) = 0 \ \Longleftrightarrow \\ & \Longleftrightarrow \ (\alpha(b) + \beta(c))^t A(x) = 0 \ \Longleftrightarrow \\ & \Longleftrightarrow \ \text{rectas polares de los puntos } \alpha(b) + \beta(c) \ \Longleftrightarrow \\ & \Longleftrightarrow \ \text{rectas polares de los puntos de } r_P \end{array}$$

Veamos la interpretación geométrica de la recta polar. Sea C la cónica (no degenerada) definida por A, P el polo y r_P la correspondiente recta polar:

1. *Si P no está en la cónica y la recta polar interseca a la cónica, entonces los puntos de intersección de la recta polar y la cónica son los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la cónica pasando por P.*

   Prueba: Sea $X \in C \cap r_p$. Entonces se verifican las ecuaciones:

   $$\begin{array}{rcl} X \in C & \Longleftrightarrow & (x)^t A(x) = 0 \\ X \in r_p & \Longleftrightarrow & (p)^t A(x) = 0 \\ \text{recta uniendo } X \text{ y } P & \Longleftrightarrow & \alpha(p) + \beta(x) = 0 \end{array}$$

   Veamos que la recta que une P y X es tangente a C. Intersecamos dicha recta con la cónica y obtenemos:

   $$\alpha^2(p)^t A(p) + 2\alpha\beta(p)^t A(x) + \beta^2(x)^t A(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2(p)^t A(p) = 0$$

   es decir hay una única solución y por tanto la recta PX es tangente a la cónica en X.

   Observación: Como consecuencia de esto, para calcular las **tangentes a una cónica desde un punto exterior** P, basta calcular la recta polar de P e intersecarla con la cónica. Las rectas pedidas son las que unen estos puntos con P.

2. *Si P está en la cónica, entonces la recta polar es la recta* **tangente a la cónica en el punto P.**

   Prueba: Es un caso particular de la situación anterior.

3. *Si P no está en la cónica y la recta polar no interseca a la cónica, entonces la recta polar r_P se obtiene de la siguiente forma: se toma una recta pasando por P y se interseca con la cónica. Las correspondientes tangentes a la cónica por esos puntos se intersecan en un punto de la recta polar r_p.*

   Prueba: Es consecuencia de las observaciones anteriores.

4 Puntos y rectas notables asociados a una cónica.

En lo que sigue trabajaremos sobre una cónica cuya matriz asociada respecto a un determinado sistema de referencia es A.

4.1 Puntos singulares.

Definición 4.1 *Un* **punto singular** *de una curva es un punto de no diferenciabilidad de la misma.*

Equivalentemente, un **punto singular** *de una curva es un punto con más de una dirección de tangencia.*

Equivalentemente, si toda recta pasando por un punto P de una curva corta a la curva con multiplicidad >1 en P, entonces P es un **punto singular.**

Veamos cuando aparecen puntos singulares en una cónica. Sea $P=(p)$ un punto de la cónica. Tomamos una recta cualquiera pasando por P. Para ello elegimos un punto cualquiera $Q=(q)$ que no esté en la cónica y lo unimos con P. Su ecuación en coordenadas homogéneas es:

$$(x)=\alpha(p)+\beta(q)$$

Si intersecamos con la cónica, nos queda la ecuación:

$$2\alpha\beta(p)^tA(q)+\beta^2(q)^tA(q)=0$$

El punto P es singular si la única solución de esta ecuación es $\beta=0$ con multiplicidad 2, para cualquier punto (q), es decir si:

$$(p)^tA(q)^t=0 \text{ para cualquier } (q).$$

Esto se cumple cuando:

$$(p)^tA=\bar{0} \iff A(p)=0$$

Concluimos lo siguiente:

Teorema 4.2 *Una cónica dada por una matriz A tiene puntos singulares si y sólo si $det(A)=0$. En ese caso la cónica se dice* **degenerada** *y los puntos singulares (afines) son los que verifican la ecuación:*

$$\boxed{A\begin{pmatrix} x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\bar{0}}$$

4.2 Centro.

Definición 4.3 *El* **centro de una cónica** *es un punto afín centro de simetría de la misma.*

Llamemos $(a,b,1)$ a las coordenadas homogéneas del centro. Veamos como calcularlo:

- Consideramos la ecuación de una recta que pasa por el centro y tiene un determinado vector director (p,q):

$$(x,y,t)=(a,b,1)+\lambda(p,q,0).$$

- Sustituimos en la ecuación de la cónica y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} p & q & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} \lambda^2 + 2 \begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- Para que $(a,b,1)$ sea centro las soluciones de λ han de ser valores opuestos para cualquier dirección $(p,q)\neq(0,0)$. Esto significa que:

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ para cualquier } (p,q)\neq(0,0).$$

- Deducimos que la **ecuación del centro** es:

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix} A = (0,0,h)$$

o equivalentemente:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}}$$

4.3 Direcciones asintóticas y asíntotas.

Definición 4.4 *Las* **direcciones asintóticas** *son los puntos del infinito que pertenecen a la cónica.*

Las **asíntotas** *son las rectas que pasan por el centro y tienen una dirección asintótica.*

De la definición es claro que las direcciones asintóticas $(p,q,0)$ se obtienen resolviendo la ecuación:

$$\boxed{\begin{pmatrix} p & q & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad (p,q)\neq(0,0)}$$

Si desarrollamos esa ecuación, obtenemos:

$$a_{11}p^2+2a_{12}pq+a_{22}q^2=0$$

Vemos que es una ecuación de segundo grado cuyo discriminante es $-|T|$. Por tanto:

- Si $|T|>0$, entonces no hay direcciones asintóticas (cónica de tipo **elíptico**).

- Si $|T|=0$, hay una dirección asintótica (cónica de tipo **parabólico**).

- Si $|T|<0$, hay dos direcciones asintóticas (cónica de tipo **hiperbólico**).

4.4 Diámetros.

Definición 4.5 *Un* **diámetro** *de una cónica es la recta polar (afín) de un punto del infinito. Al punto del infinito se le llama* **dirección conjugada con el diámetro**.

Observación 4.6 *Cualquier diámetro pasa por el centro (o centros) de la cónica.*

Prueba: Supongamos que A es la matriz de la cónica y $(a, b, 1)$ es un centro. Un diamétro tiene por ecuación:

$$(\, u^1 \quad u^2 \quad 0 \,)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

donde (u^1, u^2) es la dirección conjugada. Por otra parte vimos que si $(a, b, 1)$ es el centro verifica:

$$(\, a \quad b \quad 1 \,)\, A = (\, 0 \quad 0 \quad h \,) \iff A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

Deducimos que:

$$(\, u^1 \quad u^2 \quad 0 \,)\, A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

y por tanto el diámetro contiene al centro. ■

4.5 Ejes.

Definición 4.7 *Se llaman* **ejes** *a los diámetros perpendiculares a su dirección conjugada.*

Observación 4.8 *Las direcciones conjugadas de los ejes son los autovectores de T asociados a autovalores no nulos.*

Prueba: Sea $(u^1, u^2, 0)$ un punto del infinito y

$$(\, u^1 \quad u^2 \quad 0 \,)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

la ecuación del correspondiente diaḿetro. Operando, obtenemos que el vector normal de la recta es:

$$(\, u^1 \quad u^2 \,)\, T$$

Como esta recta debe de ser perpendicular a la dirección conjugada, este vector normal ha de ser paralelo a (u^1, u^2) y por tanto:

$$(\, u^1 \quad u^2 \,)\, T = \lambda\, (\, u^1 \quad u^2 \,)$$

Deducimos que (u^1, u^2) es un autovector de T, asociado al autovalor λ. Finalmente tenemos en cuenta que si $\lambda = 0$, entonces la recta anterior sería la recta del infinito, y por tanto no es un eje. ■

4.6 Vértices.

Definición 4.9 *Se llaman* **vértices** *a los puntos intersección de los ejes con la cónica.*

4.7 Focos, directrices y excentricidad.

Definiremos estos tres conceptos para cónicas no degeneradas, es decir, cuya matriz asociada A es no singular.

Definición 4.10 *Un* **foco** *de una cónica es un punto F que verifica la siguiente condición: el cociente entre las distancias de cualquier punto de la cónica a F y a su recta polar d es constante:*

$$\frac{d(X,F)}{d(X,d)} = e, \qquad \textit{para cualquier punto } X \textit{ en la cónica.}$$

A la recta polar de un foco se le denomina **directriz***.*

A la constante e se le denomina **excentricidad**.

5 Descripción de las cónicas no degeneradas.

5.1 La elipse real.

La ecuación reducida de una elipse es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b \neq 0}$$

(supondremos $a \geq b$, de manera que el radio mayor de la elipse este colocado sobre el eje OX).

Cuando $a = b$ se trata de una **circunferencia** de radio a. Sus puntos y rectas notable son:

1. **Centro:** $(0, 0)$.
2. **Direcciones asintóticas:** No tiene.
3. **Asíntotas:** No tiene.
4. **Diámetros:** Cualquier recta pasando por el centro.
5. **Ejes:** Si $a \neq b$ los ejes son $x = 0$ e $y = 0$. Si $a = b$ cualquier diámetro es un eje.
6. **Vértices:** Si $a \neq b$ los vértices son $(-a, 0), (a, 0), (0, -b)$ y $(0, b)$. Si $a = b$ cualquier punto de la cónica es un vértice.
7. **Focos:** $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ con $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$.
8. **Directrices:** $x = \frac{a^2}{c}$ y $x = -\frac{a^2}{c}$.
9. **Excentricidad:** $e = \frac{c}{a} < 1$ (vale 0 si se trata de una circunferencia.)

Todos estos valores se obtienen directamente utilizando que, en este caso, la matriz asociada a la cónica es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

y aplicando las definiciones vistas para cada uno de los conceptos anteriores. Nos fijamos en particular en los focos, directrices y excentricidad.

Si consideramos el punto $(c,0)$ con $a^2=b^2+c^2$, su recta polar será:

$$(c,0,1)A(x,y,1)^t=0 \iff \frac{c}{a^2}x-1=0 \iff x=\frac{a^2}{c}.$$

Ahora dado un punto $X=(x,y)$ cualquiera de la cónica veamos cual es el cociente entre las distancias de dicho punto al foco y la directriz. En primer lugar teniendo en cuenta que (x,y) verifica la ecuación de la cónica y que $a^2=b^2+c^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} d(F,X) &= \sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+c^2-2cx+\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}}= \\ &= \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2}-2xc+a^2}=a-\frac{cx}{a}=\frac{a^2-cx}{a}. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$d(directriz,X)=\frac{a^2}{c}-x=\frac{a^2-cx}{c}.$$

Por tanto:

$$\frac{d(F,X)}{d(d,X)}=\frac{\frac{a^2-cx}{a}}{\frac{a^2-cx}{c}}=\frac{c}{a}$$

Deducimos que efectivamente $(c,0)$ es un foco y la excentricidad es $\frac{c}{a}$. Análogamente se puede ver que $(-c,0)$ es el otro foco de la cónica.

5.1.1 La elipse como lugar geométrico.

Definición 5.1 *La* **elipse** *también puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los focos es constante.*

Veamos que esta definición es coherente con la ecuación y focos dados previamente. Dado un punto (x,y) de la cónica vimos que:

$$d(F_1,X)=\frac{a^2-cx}{a}; \qquad d(F_2,X)=\frac{a^2+cx}{a}.$$

Por tanto:

$$d(F_1,X)+d(F_2,X)=\frac{a^2-cx}{a}+\frac{a^2+cx}{a}=2a.$$

5.2 La hipérbola.

La ecuación reducida de una hipérbola es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,b\neq 0}.$$

Sus puntos y rectas notable son:

1. **Centro:** $(0,0)$.

2. **Direcciones asintóticas:** $(a, b, 0)$ y $(a, -b, 0)$.
3. **Asíntotas:** $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$.
4. **Diámetros:** Cualquier recta pasando por el centro.
5. **Ejes:** $x = 0$ e $y = 0$.
6. **Vértices:** $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.
7. **Focos:** $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ con $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$.
8. **Directrices:** $x = \frac{a^2}{c}$ y $x = -\frac{a^2}{c}$.
9. **Excentricidad:** $e = \frac{c}{a} > 1$.

Todos estos valores se obtienen directamente utilizando que, ahora, la matriz asociada a la cónica es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos los focos, directrices y excentricidad.

Si consideramos el punto $(c, 0)$ con $c^2 = a^2 + b^2$, su recta polar será:

$$(c, 0, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \iff \frac{c}{a^2}x - 1 = 0 \iff x = \frac{a^2}{c}$$

Ahora dado un punto $X = (x, y)$ cualquiera de la cónica veamos cual es el cociente entre las distancias del punto al foco y la directriz. En primer lugar teniendo en cuenta que (x, y) verifica la ecuación de la cónica y que $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} d(F, X) &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + c^2 - 2cx + \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} - 2xc + a^2} = \left|\frac{cx}{a} - a\right| = \frac{|cx - a^2|}{a}. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$d(d, X) = x - \frac{a^2}{c} = \frac{|cx - a^2|}{c}.$$

Por tanto:

$$\frac{d(F, X)}{d(d, X)} = \left|\frac{\frac{cx-a^2}{a}}{\frac{cx-a^2}{c}}\right| = \frac{c}{a}$$

Deducimos que efectivamente $(c, 0)$ es un foco y la excentricidad es $\frac{c}{a}$. Análogamente se puede ver que $(-c, 0)$ es el otro foco de la cónica.

5.2.1 La hipérbola como lugar geométrico.

Definición 5.2 *La* **hipérbola** *también puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los focos en valor absoluto es constante.*

Veamos que esta definición es coherente con la ecuación y focos dados previamente. Dado un punto (x, y) de la cónica vimos que:

$$d(F_1, X) = \frac{|cx - a^2|}{a}; \qquad d(F_2, X) = \frac{|cx + a^2|}{a}.$$

Por tanto, si $x \geq a$

$$d(F_1, X) - d(F_2, X) = \frac{cx - a^2}{a} - \frac{cx + a^2}{a} = -2a.$$

y si $x \leq -a$:

$$d(F_1, X) - d(F_2, X) = \frac{a^2 - cx}{a} - \frac{-cx - a^2}{a} = 2a.$$

5.3 La parábola.

La ecuación reducida de una parábola es:

$$\boxed{x^2 = 2py, \qquad p \neq 0}.$$

(supondremos $p > 0$ para que la parábola esté situada en el semiplano positivo.)

Sus puntos y rectas notable son:

1. **Centro:** No tiene (tiene un centro "impropio" $(0, 1, 0)$).
2. **Direcciones asintóticas:** $(0, 1)$.
3. **Asíntotas:** No tiene.
4. **Diámetros:** Rectas paralelas al eje OY.
5. **Ejes:** $x = 0$.
6. **Vértices:** $(0, 0)$.
7. **Foco:** $(0, \frac{p}{2})$.
8. **Directrices:** $y = -\frac{p}{2}$.
9. **Excentricidad:** $e = 1$.

De nuevo, todos estos valores se obtienen directamente utilizando que en este caso la matriz asociada a la cónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos una vez más los focos, directrices y excentricidad.

Si consideramos el punto $F = (0, \frac{p}{2})$ su recta polar será:

$$(0, \frac{p}{2}, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \iff -py - \frac{p^2}{2} = 0 \iff y + \frac{p}{2} = 0$$

Ahora dado un punto $X = (x, y)$ cualquiera de la cónica veamos cual es el cociente entre las distancias del punto al foco y la directriz. En primer lugar teniendo en cuenta que (x, y) verifica la ecuación de la cónica:

$$d(F, X) = \sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = \sqrt{2py + y^2 + \frac{p^2}{4} - py} = \sqrt{y^2 + py + \frac{p^2}{4}} = y + \frac{p}{2}$$

Por otra parte:

$$d(d, X) = y + \frac{p}{2}$$

Deducimos que efectivamente $(0, \frac{p}{2})$ es un foco y la excentricidad es 1.

5.3.1 La parábola como lugar geométrico.

Definición 5.3 *La* **parábola** *también puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al foco es la misma que la distancia a la directriz.*

Esto es consecuencia inmediata de que la excentricidad es 1.

6 Cambio de sistema de referencia.

Sean dos sistemas de referencia $R_1 = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ y $R_2 = \{Q; \bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$. Denotamos por (x, y) e (x', y') respectivamente a las coordenadas en cada una de las referencias. Supongamos que

- el punto Q con respecto a la primera referencia tiene por coordenadas (q^1, q^2).

- $(e') = (e)C$, donde $C = M_{BB'}$.

Entonces sabemos que la fórmula de cambio de referencia es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{C} & q^1 \\ & & q^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix}.$$

Supongamos que tenemos la ecuación de la cónica dada por una matriz A (y la correspondiente T de términos cuadráticos) con respecto a la referencia R_1:

$$\begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0.$$

Si hacemos el cambio de referencia en coordenadas homogéneas obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & t' \end{pmatrix} B^t A B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix} = 0 \text{ con } B = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{C} & q^1 \\ & & q^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Deducimos que la matriz de la cónica en la nueva referencia es:

$$A' = B^t A B$$

y por tanto:

Teorema 6.1 *Las matrices A, A' de una cónica con respecto a dos refencias R_1, R_2 distintas, son matrices congruentes*

$$A' = B^t AB$$

siendo B la matriz de cambio de referencia de R_2 a R_1, en coordenadas homogéneas.

Si hacemos el cambio de referencia en coordenadas afines obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^t TC \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \{\text{términos de grado} \leq 1\} = 0$$

Por tanto deducimos que:

Teorema 6.2 *Las matrices de términos cuadráticos T, T' de una cónica con respecto a dos refencias R_1, R_2 distintas son matrices congruentes*

$$T' = CTC^t$$

siendo C la matriz de cambio de la base de R_2 a la de R_1.

7 Clasificación de cónicas y ecuación reducida.

Dada una cónica definida por una matriz simétrica A, encontrar su ecuación reducida consiste en hacer una cambio de referencia de manera que la ecuación de la cónica con respecto a esa nueva referencia sea lo más sencilla posible. En concreto realizamos:

1. **Un giro.** Nos permite colocar el eje o ejes de la cónica paralelos a los ejes de coordenadas de la nueva referencia. La matriz de términos cuadráticos en la nueva referencia será diagonal.
2. **Una traslación.** Que nos permite colocar el/los centro/s (si existe/n) de la cónica en el origen de coordenadas (en otro caso llevaremos un vértice al eje de coordenadas).

Antes de comenzar el desarrollo, hacemos la siguiente **observación importante**:

Supondremos que al menos un término de la diagonal de la matriz T de términos cuadráticos es no negativo.

Si esta propiedad no se cumple, basta trabajar con la matriz $-A$ en lugar de con A. De esta forma aseguramos que T siempre tiene al menos un autovalor positivo.

7.1 Paso I: Reducción de términos cuadráticos (el giro).

Dado que la matriz T de términos cuadráticos es simétrica tiene dos autovalores reales λ_1 y λ_2, con $\lambda_1 \neq 0$. Supondremos $\lambda_1 > 0$. Además sabemos que existe una base ortonormal de autovectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ de manera que:

$$T' = C^t TC \text{ con } (\bar{u}) = (\bar{e})C \text{ y } T' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

La ecuación de cambio de coordenadas es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

de forma que en la nueva base la ecuación de la cónica es:

$$(\, x' \quad y' \,)\, C^t T C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2\,(\, a_{13} \quad a_{23} \,)\, C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

Operando queda:

$$\boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + b_{33} = 0}$$

7.2 Paso II: Reducción de términos lineales (la traslación).

Ahora a partir de la ecuación anterior completamos las expresiones de x' e y' al cuadrado de un binomio, sumando y restando los términos adecuados. En concreto:

- Para x':

$$\lambda_1 x'^2 + 2b_{13}x' = \lambda_1(x'^2 + 2\frac{b_{13}}{\lambda_1}x' + \frac{b_{13}^2}{\lambda_1^2}) - \frac{b_{13}^2}{\lambda_1} = \lambda_1(x' + \frac{b_{13}}{\lambda_1})^2 - \frac{b_{13}^2}{\lambda_1}$$

- Para y':

- Si $\lambda_2 \neq 0$:

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_{23}y' = \lambda_2(y'^2 + 2\frac{b_{23}}{\lambda_2}y' + \frac{b_{23}^2}{\lambda_2^2}) - \frac{b_{23}^2}{\lambda_2} = \lambda_2(y' + \frac{b_{23}}{\lambda_2})^2 - \frac{b_{23}^2}{\lambda_2}$$

- Si $\lambda_2 = 0$ y $b_{23} \neq 0$:

$$2b_{23}y' + b_{33} = 2b_{23}(y' + \frac{b_{33}}{2b_{23}})$$

Hacemos en cada caso la traslación correspondiente y obtenemos las siguientes formas reducidas:

Si $\lambda_2 \neq 0$	Si $\lambda_2 = 0$ y $b_{23} \neq 0$	Si $\lambda_2 = b_{23} = 0$
Cambio de Coordenadas: $x'' = x' + \frac{b_{13}}{\lambda_1}$ $y'' = y' + \frac{b_{23}}{\lambda_2}$	Cambio de Coordenadas: $x'' = x' + \frac{b_{13}}{\lambda_1}$ $y'' = y' + \frac{b_{33}}{2b_{23}}$	Cambio de Coordenadas: $x'' = x' + \frac{b_{13}}{\lambda_1}$
Ecuación reducida: $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c_{33} = 0}$	Ecuación reducida: $\boxed{\lambda_1 x''^2 + 2c_{23}y'' = 0}$	Ecuación reducida: $\boxed{\lambda_1 x''^2 + c_{33} = 0}$

Es decir nos queda una ecuación reducida de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2c_{23}y'' + c_{33} = 0$$

con las siguientes posibilidades para los valores de λ_2, c_{23} y c_{33}:

1. Si $\lambda_2 > 0$, entonces $c_{23} = 0$ y si:

(a) $c_{33} > 0$, entonces la ecuación reducida es:

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c_{33} = 0}$ Elipse imaginaria.

(b) $c_{33} = 0$, entonces la ecuación reducida es:

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0}$ Rectas imaginarias cortándose en un punto.

(c) $c_{33} < 0$, entonces la ecuación reducida es:

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c_{33} = 0}$ Elipse real.

2. Si $\lambda_2 = 0$ y

(a) $c_{23} \neq 0$, entonces $c_{33} = 0$ y la ecuación reducida es:

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + 2c_{23} y'' = 0}$ Parábola.

(b) $c_{23} = 0$ y $c_{33} > 0$

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + c_{33} = 0}$ Rectas paralelas imaginarias.

(c) $c_{23} = 0$ y $c_{33} = 0$

$\boxed{\lambda_1 x''^2 = 0}$ Recta doble real.

(d) $c_{23} = 0$ y $c_{33} < 0$

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + c_{33} = 0}$ Rectas paralelas reales.

3. Si $\lambda_2 < 0$, entonces $c_{23} = 0$ y si:

(a) $c_{33} \neq 0$, entonces la ecuación reducida es:

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c_{33} = 0}$ Hipérbola.

(b) $c_{33} = 0$, entonces la ecuación reducida es:

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0}$ Rectas reales cortándose en un punto.

7.3 Clasificación y ecuación reducida en función de $|T|$ y $|A|$.

Teniendo en cuenta que los determinantes de T y A se conservan por giros y traslaciones, podemos reescribir la clasificación anterior en función de $|T|$ y $|A|$. De nuevo suponemos **algún término de T positivo**:

	$\|A\| > 0$	$\|A\| = 0$	$\|A\| < 0$
$\|T\| > 0$	Elipse imaginaria	Rectas imaginarias cortándose	Elipse real
$\|T\| = 0$	Parábola	$rg(A) = 2$: Rectas paralelas imag. / Rectas paralelas reales; $rg(A) = 1$: Recta doble	Parábola
$\|T\| < 0$	Hipérbola	Rectas reales cortándose	Hipérbola

Además cuando la cónica es no degenerada podemos calcular la ecuación reducida, a partir de los autovalores (alguno positivo) λ_1, λ_2 de T y de $|A|$:

1. Si $|T| \neq 0$, entonces queda:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0, \quad \text{con} \quad c = \frac{|A|}{|T|}$$

   En el caso de que $|T| > 0$, es decir, para una elipse, para garantizar que el radio mayor esta sobre el nuevo eje OX hay que tomar como λ_1 el menor de los dos autovalores.

   En el caso de que $|T| < 0$, es decir, para una hipérbola, para garantizar que los vértices estén sobre el nuevo eje OX hay que tomar como λ_1 el autovalor que tenga el mismo signo que $det(A)$.

2. Si $|T| = 0$, entonces queda:

$$\lambda_1 x''^2 - 2cy'' = 0, \quad \text{con} \quad c = \sqrt{-\frac{|A|}{\lambda_1}}$$

   con $\lambda_1 \neq 0$.

Podemos incluso dar la referencia en que se obtienen estas formas reducidas:

1. En el caso de $|T| \neq 0$ (elipse o hipérbola), la base de la nueva referencia está formada por los autovectores de T normalizados y el nuevo origen situado en el centro de la cónica. Simplemente hay que tener cuidado de ordenar los autovectores de manera coherente a como se ordenan los autovalores:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{centro} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} autovec_1 & autovec_2 \end{pmatrix}}_{\substack{autovect\, de\, T \\ normalizados}} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

2. En el caso de $|T| = 0$ (parábola), la base de la nueva referencia está formada por los autovectores de T normalizados y el nuevo origen en el vértice. Ahora además de ordenar correctamente los autovectores, hay que comprobar si se ha escogido correctamente el signo del autovector asociado al autovalor nulo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rotatebox{90}{\text{vértice}} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \rotatebox{90}{$autovec_1$} & \rotatebox{90}{$autovec_2$} \end{pmatrix}}_{\substack{autovect\,de\,T \\ normalizados}} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Para que la elección de los autovectores sea coherente con la forma reducida de la parábola hay que orientar el autovector asociado al 0 de forma que:

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rotatebox{90}{$autovec_2$} \end{pmatrix} < 0.$$

7.4 Clasificación mediante diagonalización por congruencia.

Otra forma de clasificar una cónica dada por una matriz A es diagonalizar esta matriz por congruencia, pero con la siguiente restricción:

La última fila no puede ser ni sumada a las demás ni multiplicada por un escalar ni cambiada de posición.

Una operación "prohibida" con esta fila significaría que la transformación que hacemos lleva puntos propios en puntos del infinito y viceversa.

Con esté método llegaremos a una forma diagonal (excepto si se trata de un parábola) que nos permitirá clasificar fácilmente la cónica.

Observación 7.1 *Hay que tener en cuenta que la forma diagonal que obtenemos de esta forma,* **NO** *se corresponde necesariamente con la* **ecuación reducida** *de la cónica. Es decir, este método nos permite clasificar la cónica, pero NO dar su ecuación reducida.*

7.5 Obtención de las rectas que forman las cónicas degeneradas.

Una vez clasificada la cónica y comprobado que es degenerada, la forma más cómoda de calcular las rectas que la forman es la siguiente:

1. Si se trata de rectas paralelas (reales o imaginarias) o de una recta doble, se calcula la recta de centros. Si es una recta doble hemos terminado. En otro caso intersecamos la cónica con una recta cualquiera (lo más sencilla posible) y obtenemos dos puntos (reales o imaginarios). Las rectas buscadas son las paralelas a la recta de centros pasando por dichos puntos.

2. Si se trata de rectas que se cortan (reales o imaginarias), se calcula el centro. Luego intersecamos la cónica con una recta cualquiera (lo más sencilla posible) que no pase por el centro y obtenemos dos puntos (reales o imaginarios). Las rectas buscadas son las que unen el centro con dichos puntos.

8 Haces de cónicas

Definición 8.1 *Dadas dos cónicas C_1 y C_2 de ecuaciones:*

$$(x)^t A_1(x) = 0 \quad y \quad (x)^t A_2(x) = 0$$

el **haz de cónicas** *generado por ellas corresponde a la familia de cónicas de ecuaciones:*

$$\{\alpha[(x)^t A_1(x)] + \beta[(x)^t A_2(x)] = 0; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \neq (0,0)\}$$

o equivalentemente:

$$\{[(x)^t A_1(x)] + \mu[(x)^t A_2(x)] = 0; \quad \mu \in \mathbb{R})\} \cup \{(x)^t A_2(x) = 0\}$$

Las cónicas de un haz heredan propiedades comunes de las cónicas que lo generan. Por ejemplo:

- Si P es un **punto común** de C_1 y C_2, entonces P pertenece a todas las cónicas del haz.

- Si r es una **tangente** a C_1 y C_2 en un punto P, entonces r también es tangente en P a todas las cónicas del haz.

- Si r es una **asíntota** común a C_1 y C_2, entonces r también es asíntota de todas las cónicas del haz.

- Si P es un **punto singular** de C_1 y C_2, entonces P es un punto singular de todas las cónicas del haz.

- Si P es el **centro** de C_1 y C_2, entonces P es el centro de todas las cónicas del haz.

Teniendo en cuenta este hecho, veamos como construir las familias de cónicas que cumplen algunas de estas condiciones.

1. *Haz de cónicas por cuatro puntos no alineados.*

   Supongamos que A, B, C, D son cuatro puntos no alineados. Consideramos las rectas
   $$r_1 \equiv AB, \quad r_2 \equiv CD; \qquad s_1 \equiv AC; \quad s_2 \equiv BD.$$
   El correspondiente haz es:
   $$\boxed{\alpha(r_1 \cdot r_2) + \beta(s_1 \cdot s_2) = 0}$$

2. *Haz de cónicas por tres puntos no alineados y la tangente en uno de ellos.*

   Supongamos que A, B, C son tres puntos no alineados y tg_A es la tangente en A. Consideramos las rectas
   $$r_1 \equiv AB, \quad r_2 \equiv AC; \qquad s \equiv BC.$$
   El correspondiente haz es:
   $$\boxed{\alpha(r_1 \cdot r_2) + \beta(s \cdot tg_A) = 0}$$

2'. *Haz de cónicas por dos puntos y una asíntota.*

Es un caso particular del anterior, si pensamos que la asíntota es una recta tangente en el punto del infinito. Supongamos que B, C son los puntos y $asint$ es la asíntota. Consideramos las rectas

$$\begin{array}{l} r_1 \equiv \{\text{recta pasando por } B \text{ y paralela a } asint\} \\ r_2 \equiv \{\text{recta pasando por } C \text{ y paralela a } asint\} \end{array} \qquad s \equiv BC.$$

El correspondiente haz es:

$$\boxed{\alpha(r_1 \cdot r_2) + \beta(s \cdot asint) = 0}$$

3. *Haz de cónicas por dos puntos y la tangente en ellos.*

Supongamos que A, B son dos puntos y tg_A, tg_B las correspondientes tangentes. Consideramos la recta

$$r \equiv AB.$$

El correspondiente haz es:

$$\boxed{\alpha(r)^2 + \beta(tg_A \cdot tg_B) = 0}$$

3'. *Haz de cónicas por un punto, conocida la tangente en él y una asíntota.*

De nuevo es un caso particular del anterior. Supongamos que A es el punto y tg_A la correspondiente tangente. Sea $asint$ la asíntota. Consideramos la recta

$$r \equiv \{\text{recta pasando por } A \text{ y paralela a } asint\}$$

El correspondiente haz es:

$$\boxed{\alpha(r)^2 + \beta(tg_A \cdot asint) = 0}$$

3". *Haz de cónicas conocidas dos asíntotas.*

De nuevo es un caso particular del anterior. Supongamos que $asint_1$ y $asint_2$ son las dos asíntotas. Consideramos la recta:

$$r \equiv \{\text{recta del infinito}\}$$

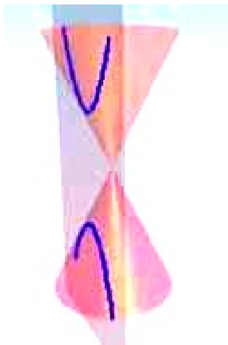
cuya ecuación homogénea es $t = 0$ y afín es $1 = 0$ (!?). El correspondiente haz es:

$$\boxed{\alpha(1)^2 + \beta(asint_1 \cdot asint_2) = 0}$$

9 Apéndice: secciones planas de un cono.

Cónicas no degeneradas.

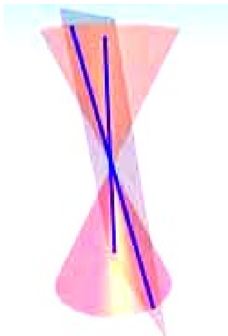

Elipse.

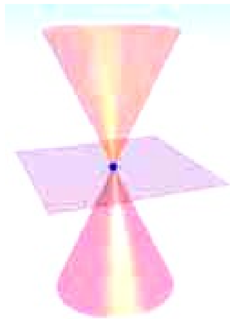

Hipérbola.


Parábola.

Cónicas degeneradas.


Recta doble.


Dos rectas.


Un punto.