2. El espacio afín ampliado.

1 Introducción.

El objetivo de esta sección es describir algunas herramientas algebraicas que nos permitirán trabajar con los puntos del infinito de espacios y variedades afines. De esta forma el **espacio afín ampliado** es el espacio afín al que se le añaden los **puntos del infinito**. Definiremos unas nuevas coordenadas que nos permitirán manejar dichos puntos.

Aunque esta construcción puede resultar chocante en un principio, la principal ventaja será que ahora, situaciones que eran tratadas como casos particulares en el espacio afín, pueden ser tratadas en un contexto general en el espacio afín ampliado. Por ejemplo mientras que el el plano afín dos rectas distintas o se cortan en un punto o son paralelas, **el plano afín ampliado dos rectas distintas siempre se cortan en un punto.**

Aunque la construcción puede realizarse en espacios de dimensión arbitraria nosotros trabajaremos en E_2 y en E_3. En concreto, y mientras no se indique lo contrario, desarrollaremos la teoría en E_3 (las construcciones se particularizan para E_2 de manera evidente eliminando una coordenada).

Finalmente, señalamos que aquí tan sólo daremos un esbozo no demasiado riguroso de estas ideas, como herramienta para trabajar con los puntos del infinito. Toda esta teoría se desarrolla de manera natural en la llamada **Geometría Proyectiva.**

1.1 Coordenadas homogéneas y espacio afín ampliado.

Supongamos que tenemos un sistema de referencia $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ en E_3.

Definición 1.1 *Si* (x^1, x^2, x^3) *son las coordenadas afines de un punto* $X \in E$*, las* **coordenadas homogéneas** *de* X *son* (tx^1, tx^2, tx^3, t) *donde* t *es un número real no nulo.*

Según esta definición la correspondencia entre coordenadas afines y homogéneas es la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \text{Afines} & \longrightarrow & \text{Homogéneas} \\ (x^1, x^2, x^3) & & (y^1, y^2, y^3, t) \\ & & \text{con} \\ & & y^1 = tx^1 \\ & & y^2 = tx^2 \\ & & y^3 = tx^3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Homogéneas} & \longrightarrow & \text{Afines} \\ (y^1, y^2, y^3, t) & & (x^1, x^2, x^3) \\ & & \text{con} \\ & & x^1 = y^1/t \\ & & x^2 = y^2/t \\ & & x^3 = y^3/t \end{array}$$

Es importante observar lo siguiente:

Las coordenadas homogéneas de un punto NO son únicas.

De hecho, (y^1, y^2, y^3, t) y (z^1, z^2, z^3, t') son las coordenadas homogéneas de un mismo punto X cuando son proporcionales, es decir, cuando existe un $\lambda \neq 0$ tal que:

$$(y^1, y^2, y^3, t) = \lambda(z^1, z^2, z^3, t').$$

Teniendo en cuenta esto podemos definir el espacio afín ampliado como:

Definición 1.2 *Si $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es una referencia de E_3 definimos* **el espacio afín ampliado** *como el conjunto determinado por los puntos de coordenadas homogéneas $(y^1, y^2, y^3, t) \neq (0, 0, 0, 0)$, de manera que coordenadas propocionales definen el mismo punto.*

El espacio afín ampliado de un espacio afín E lo denotaremos por $\overline{E}$.

Hemos visto que cuando $t \neq 0$ estos puntos se corresponden con puntos del espacio afín usual. Sin embargo en el espacio afín ampliado incluimos también aquellos con coordenada $t = 0$. En la siguiente sección veremos como se interpretan.

1.2 Puntos impropios o puntos del infinito.

1.2.1 Motivación: porqué los puntos con coordenada $t = 0$ representan puntos del infinito.

De momento hemos visto como representar un punto del espacio afín con unas nuevas coordenadas que hemos llamado homogénas. Veamos como estas nuevas coordenadas nos van a permitir trabajar con los puntos del infinito. Para motivar lo que haremos pensamos en lo siguiente.

Supongamos que tenemos una recta que pasa por el punto $P = (p^1, p^2, p^3)$ y con vector director $\bar{u} = (u^1, u^2, u^3)$. Su ecuación paramétrica, en coordenadas afines es:

$$(x^1, x^2, x^3) = (p^1, p^2, p^3) + \alpha(u^1, u^2, u^3) = (p^1 + \alpha u^1, p^2 + \alpha u^2, p^3 + \alpha u^3)$$

Intuitivamente el punto del infinito de la recta aparecerá cuando α tiende a ∞. Sin embargo con estas coordenadas no tenemos manera de formalizar esto.

Escribamos esta ecuación en coordenadas homogéneas (y^1, y^2, y^3, t)

$$(y^1, y^2, y^3, t) = (t(p^1 + \alpha u^1), t(p^2 + \alpha u^2), t(p^3 + \alpha u^3), t)$$

Dado que coordenadas homogéneas proporcionales se siguien refieriendo a los mismos puntos, cuando $\alpha \neq 0$ podemos escribir la ecuación como:

$$(y^1, y^2, y^3, t) = \frac{1}{\alpha}((p^1 + \alpha u^1), (p^2 + \alpha u^2), (p^3 + \alpha u^3), 1)$$

Ahora si hacemos $\alpha = \infty$ (o más estrictamente, tomamos límites cuando $\alpha \to \infty$) la expresión anterior queda:

$$(y^1, y^2, y^3, t) = (u^1, u^2, u^3, 0).$$

Es decir el punto del infinito de la recta inicial es el que tiene por coordenadas homogéneas $(u^1, u^2, u^3, 0)$. Nos fijamos que estas coordenadas sólo dependen del vector director de la recta, no del punto (p^1, p^2, p^3). Por tanto está claro que otra recta paralela a la primera tendría el mismo punto del infinito.

1.2.2 Definición de puntos impropios o del infinito.

Despues de la discusión anterior, es lógico hacer la siguiente definición:

Definición 1.3 *Fijada una referencia $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Si X tiene por coordenadas homogéneas (y^1, y^2, y^3, t), X se dice un* **punto impropio** *o un* **punto del infinito** *si*

$t=0$. *En particular si* $\bar{u}=(u^1,u^2,u^3)$ *son las coordenadas de un vector de* V*, el punto del infinito en la dirección de* $\bar{u}$ *tiene por coordenadas homogéneas*

$$(\lambda u^1,\lambda u^2,\lambda u^3,0),\ \textit{para cualquier}\ \lambda\neq 0.$$

Por tanto cuando trabajemos en coordenadas homogéneas y queramos hallar los puntos impropios (o del infinito) de un determinado objeto geométrico, tendremos que intersecar las ecuaciones de dicho objeto con la ecuación $t=0$.

En particular:

- En el plano afín ampliado $\overline{E_2}$, $t=0$ es la ecuación de la **recta de puntos del infinito.**

- El el espacio afín ampliado $\overline{E_3}$, $t=0$ es la ecuación del **plano de puntos del infinito.**

1.3 Cambio de sistema de referencia en coordenadas homogéneas.

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia $\{O;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ y $\{P;\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\bar{e}'_3\}$. Fijamos la siguiente notación para coordenadas afines y homogéneas con respecto a cada una de las referencias:

Referencia.	Coordenadas afines.	Coordenadas homogéneas.
$\{O;\underbrace{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3}_{B}\}$	(x^1,x^2,x^3)	(y^1,y^2,y^3,t)
$\{P;\underbrace{\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\bar{e}'_3}_{B'}\}$	(x'^1,x'^2,x'^3)	(y'^1,y'^2,y'^3,t')

Además supongamos que:

$$(e')=(e)M_{BB'}\ \text{y}\ P=(p^1,p^2,p^3)\ \text{en coordenadas afines respecto}\ \{O;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}.$$

Entonces sabemos cual es la relación entre las coordenadas afines con respecto a una y a otra referencia:

$$(x)=(p)+M_{BB'}(x') \iff \begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^1\\ p^2\\ p^3\end{pmatrix}+M_{BB'}\begin{pmatrix} x'^1\\ x'^2\\ x'^3\end{pmatrix}$$

Veamos cual es la relación entre las coordenadas homogéneas. Nos fijamos que matricialmente la fórmula anterior también puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ x^3\\ 1\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & p^1\\ & M_{BB'} & & p^2\\ & & & p^3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix} x'^1\\ x'^2\\ x'^3\\ 1\end{pmatrix}$$

Pero dado que coordenadas homogéneas proporcionales se refieren al mismo punto, $(x^1,x^2,x^3,1)$ e (y^1,y^2,y^3,t) denotan el mismo punto; y análogamente ocurre con $(x'^1,x'^2,x'^3,1)$ e (y'^1,y'^2,y'^3,t'). Por tanto la fórmula queda:

$$\begin{pmatrix} y^1\\ y^2\\ y^3\\ t\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & p^1\\ & M_{BB'} & & p^2\\ & & & p^3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix} y'^1\\ y'^2\\ y'^3\\ t'\end{pmatrix}$$

1.4 Ecuaciones cartesianas de variedades afines en coordenadas homogéneas.

Utilizando las fórmulas que relacionan las coordenadas afines y homogéneas de un punto, veremos como pasar de las ecuaciones cartesianas de una variedad afín en coordenadas afines a coordenadas homogéneas. Recordemos que fijada una referencia, las coordenadas homogéneas (y^1, y^2, y^3, t) se corresponden con las afines

$$(x^1, x^2, x^3) = (y^1/t, y^2/t, y^3/t).$$

1.4.1 Rectas en $\bar{E}_2$.

Supongamos que tenemos la ecuación cartesiana de una recta:

$$a_1x^1 + a_2x^2 + a_3 = 0$$

Cambiando estas coordenadas a homogéneas queda:

$$a_1\frac{y^1}{t} + a_2\frac{y_2}{t} + a_3 = 0 \iff \boxed{a_1y^1 + a_2y^2 + a_3t = 0}$$

Si queremos hallar ahora los puntos del infinto de esta recta, no tenemos más que intersecarla con la recta del infinito $t = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} a_1y^1 + a_2y^2 + a_3t = 0 \\ t = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_1y^1 + a_2y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y^1, y^2) = (a_2, -a_1)$$

de manera que obtenemos que el punto del infinito corresponde a la dirección que marca el vector director de la recta.

1.4.2 Planos en $\bar{E}_3$.

Supongamos que tenemos la ecuación cartesiana de una plano:

$$a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 = 0$$

Cambiando estas coordenadas a homogéneas queda:

$$a_1\frac{y^1}{t} + a_2\frac{y_2}{t} + a_3\frac{y^3}{t} + a_4 = 0 \iff \boxed{a_1y^1 + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4t = 0}$$

Si queremos hallar ahora los puntos del infinto de esta recta, no tenemos más que intersecarla con el plano del infinito $t = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} a_1y^1 + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4t = 0 \\ t = 0 \end{array}\right\}$$

Ahora esta intersección corresponde a los puntos del infinito cuya dirección esta determinada por cualquier vector contenido en el plano.

1.4.3 Rectas en $\bar{E}_3$.

Supongamos que tenemos las ecuaciónes cartesianas de una recta (como intersección de dos planos):

$$\begin{cases} a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 = 0 \\ b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4 = 0 \end{cases}$$

Razonando como antes, en coordenadas a homogéneas queda:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1y^1 + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4t = 0 \\ b_1y^1 + b_2y^2 + b_3y^3 + b_4t = 0 \end{array}}$$

El punto del infinito de dicha recta se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4t &= 0 \\ b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4t &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

1.5 Ecuaciones paramétricas de variedades afines en coordenadas homogéneas.

Veamos ahora como se escriben las ecuaciones paramétricas de las variedades afines en coordenadas homogéneas.

1.5.1 Rectas en $\bar{E}_2$.

Si $P = (a^1, a^2, t_P)$ y $Q = (b^1, b^2, t_Q)$ son las **coordenadas homogéneas** de dos puntos distintos en el plano afín ampliado, entonces la ecuación paramétrica de la recta que los une es:

$$\boxed{(y^1, y^2, t) = \alpha(a^1, a^2, t_P) + \beta(b^1, b^2, t_Q)}$$

Observaciones sobre esta ecuación:

- Aunque aparecen dos paramétros α y β, teniendo en cuenta que coordenadas homogéneas proporcionales definen un mismo punto, el objeto que definen estas ecuaciones tiene dimensión 1.

- De nuevo los puntos impropios de la recta se obtiene intersecando con la ecuación $t = 0$.

- La ventaja de esta ecuación es que sirve para hallar, tanto la ecuación de la recta pasando por dos puntos, como la ecuación de una recta conocido un punto y el vector director. Simplemente hay que tener en cuenta que el hecho de que una recta tenga por vector director a (u^1, u^2) significa que pasa por el punto del infinito $(u^1, u^2, 0)$.

1.5.2 Rectas en $\bar{E}_3$.

Es totalmente análogo al caso anterior. Si $P = (a^1, a^2, a^3, t_P)$ y $Q = (b^1, b^2, b^3, t_Q)$ son las **coordenadas homogéneas** de dos puntos distintos en el espacio afín ampliado, entonces la ecuación paramétrica de la recta que los une es:

$$\boxed{(y^1, y^2, y^3, t) = \alpha(a^1, a^2, a^3, t_P) + \beta(b^1, b^2, b^3, t_Q)}$$

1.5.3 Planos en $\bar{E}_3$.

Ahora si tenemos tres puntos no alineados en el espacio afín ampliado $\bar{E}_3$ con coordenadas homogéneas, $P = (a^1, a^2, a^3, t_P)$, $Q = (b^1, b^2, b^3, t_Q)$ y $R = (c^1, c^2, c^3, t_R)$, la ecuación paramétrica del plano que definen será:

$$\boxed{(y^1, y^2, y^3, t) = \alpha(a^1, a^2, a^3, t_P) + \beta(b^1, b^2, b^3, t_Q) + \gamma(c^1, c^2, c^3, t_R)}$$

Observamos, que esta ecuación nos permite también calcular la ecuación del plano conocidos dos puntos y un vector director o un punto y dos vectores directores. No hay más que tener en cuenta que un vector $\bar{u} = (u^1, u^2, u^3)$, corresponde al punto del infinito $(u^1, u^2, u^3, 0)$.