Part III

Geometría afín.

1. El espacio afín.

1 Definición y propiedades.

Definición 1.1 *Sea E un conjunto no vacío. Se dice que E está dotado de estructura de* **espacio afín** *asociado a un espacio vectorial V, si existe una aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & V \\ (P,Q) & \longrightarrow & \bar{v} = \overline{PQ} \end{array}$$

verificando las propiedades:

(a) $\forall P \in E$ y $\forall \bar{v} \in V$ existe un único $Q \in E$ verificando que $\bar{v} = \overline{PQ}$.

(b) $\forall P, Q, R \in E$ se verifica que $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ (relación de Chasles).

A los elementos de un espacio afín los llamaremos **puntos**. *Si además el espacio vectorial V es euclídeo, entonces E se dice un* **espacio afín euclídeo**.

Por la propiedad (a), dado un punto $P \in E$ y un vector $\bar{v} \in V$ podemos definir el punto $Q := P + \bar{v}$, como el único punto $Q \in E$ que verifica $\bar{v} = \overline{PQ}$. Geométricamente el punto Q se obtiene trasladando el punto P en la dirección y distancia indicada por el vector $\bar{v}$.

Las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de la definición de espacio afín. Para cualesquiera puntos $A, B, C, A', B' \in E$ se verifica:

1. $\overline{AB} = \bar{0} \quad \Longleftrightarrow \quad A = B.$

   Prueba: Por la condición (b) se tiene:

   $$\overline{AA} + \overline{AB} = \overline{AB} \quad \Rightarrow \quad \overline{AA} = \bar{0}.$$

   Por otra parte, por la condición (a) sabemos que hay un único punto B verificando $\bar{0} = \overline{AB}$. ■

2. $\overline{AB} = -\overline{BA}.$

   Prueba: Por la condición (b) y la propiedad anterior:

   $$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

   ■

3. $\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}.$

   Prueba: Es consecuencia directa de la condición (b). ■

4. $\overline{AB} = \overline{A'B'} \quad \Rightarrow \quad \overline{AA'} = \overline{BB'}$.

   Prueba: Utilizamos la condición (b):

$$\left.\begin{array}{rcl} \overline{AA'} & = & \overline{AB} + \overline{BA'} \\ \overline{BB'} & = & \overline{BA'} + \overline{A'B'} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overline{AA'} - \overline{BB'} = \overline{AB} - \overline{A'B'} = \bar{0} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \overline{AA'} = \overline{BB'}$$

■

Aunque la teoría de espacios afines puede desarrollarse en dimensión arbitraria, nosotros trabajaremos principalmente sobre dos casos particulares: el **plano afín euclídeo** E_2 definido sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y **el espacio afín euclídeo** E_3 definido sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

2 Sistemas de referencia afín y coordenadas afines.

Trabajaremos en un espacio afín euclídeo E asociado a un espacio vectorial real V de dimensión n.

Definición 2.1 *Un* **sistema de referencia afín** $\{O; \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ *de* E *está formado por un punto* $O \in E$ *y una base de vectores de* V*,* $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$*.*

En particular si la base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ *es ortonormal, entonces el sistema de referencia se dice* **rectangular.**

Definición 2.2 *Dado* $\{O; \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ *un sistema de referencia en* E*, las* **coordenadas afines de un punto** $P \in E$ *son las coordenadas contravariantes del vector* $\overline{OP}$ *en la base* $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$*.*

Nos fijamos en que las coordenadas afines de un punto están bien definidas ya que:

- Dados O y P el vector $\overline{OP}$ está definido de manera única.

- Las coordenadas de un vector $(\overline{OP})$ en una base de un espacio vectorial son únicas.

2.1 Cambio de sistema de referencia.

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia $\{O; \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ y $\{P; \bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n\}$. Denotamos por:

$$B = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}; \qquad B' = \{\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n\}.$$

Conocemos como están relacionados entre si. En concreto:

$(\bar{e}') = (\bar{e})M_{BB'}$
$(p) = (p^1, \ldots, p^n)$ coordenadas del punto P en la referencia $\{O; \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$

Recordemos que esto significa que las coordenadas del vector $\overline{OP}$ en la base B, son $(p^1, \ldots, p^n)$.

Sea $X \in E$ es un punto cualquiera del espacio afín denotaremos:

$(x) = (x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas del punto X en la referencia $\{O; \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$
$(x') = (x'^1, \ldots, x'^n)$ coordenadas del punto X en la referencia $\{P; \bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n\}$

Las coordenadas de X en la referencia $\{O; \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ son las coordenadas del vector $\overline{OX}$ en la base B. Las coordenadas de X en la referencia $\{P; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ son las coordenadas del vector $\overline{PX}$ en la base B'. Veamos como se relacionan ambas coordenadas. Se tiene:

$$\overline{PX} = \overline{OX} - \overline{OP} = (\bar{e})(x) - (\bar{e})(p) = (\bar{e})((x) - (p))$$

Por tanto es claro que las coordenadas de $\overline{PX}$ en la base B son $(x) - (p)$. Ahora simplemente pasamos las coordenadas de este vector de la base B a la base B':

$$\boxed{(y) = M_{B'B}[(x) - (p)]} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{(y) = {M_{BB'}}^{-1}[(x) - (p)]}$$

3 Variedades afines.

Definición 3.1 *Sea E un espacio euclídeo asociado a un espacio vectorial V. Dado un punto $P \in E$ y un subespacio vectorial $U \subset V$, la* **variedad afín** *que pasa por P y tiene la dirección de U se define como el conjunto de puntos:*

$$P + U = \{Q \in E |\, Q = P + \bar{u},\, \bar{u} \in U\} = \{Q \in E |\, \overline{PQ} \in U\}$$

La **dimensión** *de la variedad afín es la dimensión del subespacio vectorial U que define su dirección. Si esta dimensión es* 0**,** 1 **o** 2 *la variedad afín será respectivamente, un* **punto***, una* **recta** *o un* **plano***.*

Veamos las distintas formas de presentar las ecuaciones de las variedades afines en el plano afín E_2 y en el espacio afín E_3.

3.1 Variedades afines en el plano afín E_2.

Trabajaremos en el plano afín euclídeo E_2 con respecto a un sistema de referencia $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

0. Puntos: Un punto en E_2 queda determinado dando sus coordenadas.

1. Rectas: Una **recta** queda **determinada** dando **un punto** $P = (p^1, p^2)$ por el que pasa **y un vector** $\bar{u} = (u^1, u^2)$ que genera el subespacio que determina su dirección. Podemos describir los puntos $X = (x^1, x^2)$ de la recta con cualquiera de las siguientes ecuaciones[1]:

   $X = P + \alpha\bar{u}$ **Ecuación vectorial.**

   $\left.\begin{array}{l} x^1 = p^1 + \alpha u^1 \\ x^2 = p^2 + \alpha u^2 \end{array}\right\}$ **Ecuaciones paramétricas.**

   $\frac{x^1 - p^1}{u^1} = \frac{x^2 - p^2}{u^2}$ **Ecuación continua.**

   $a_1 x^1 + a_2 x^2 + b = 0$ **Ecuación cartesiana.**

   Donde la ecuación cartesiana puede obtenerse (por ejemplo) a partir de las paramétricas eliminando el parámetro o a partir de la continua eliminando denominadores.

   La ecuación cartesiana cumple la siguiente interesante propiedad:

[1]Para que la ecuación continua tenga sentido los denominadores u^1 y u^2 han de ser no nulos.

Teorema 3.2 *Si $a_1x^1 + a_2x^2 + a_3 = 0$ es la ecuación cartesiana de una recta r, entonces (a_1, a_2) son las coordenadas covariantes de un vector perpendicular a cualquier vector contenido en la recta.*

Prueba: Un vector $\bar{v}$ contenido en la recta está determinado a su vez por dos puntos X e Y contenidos en la recta, de manera que $\bar{v} = \overline{XY}$. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{lcl} X \in r & \Rightarrow & a_1x^1 + a_2x^2 + a_3 = 0 \\ Y \in r & \Rightarrow & a_1y^1 + a_2y^2 + a_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (a_1)(y^1 - x^1) + (a_2)(y^2 - x^2) = 0$$

Deducimos por tanto que el vector v es perpendicular al vector de coordenadas covariantes (a_1, a_2). ■

El vector de coordenadas covariantes (a_1, a_2) se dice el **vector normal de la recta**.

Una **recta** queda también **determinada por dos puntos** P y Q diferentes. En ese caso podemos obtener las ecuaciones anteriores tomando como vector director el que une ambos puntos $\bar{u} = \overline{PQ}$. Suele utilizarse directamente la ecuación continua:

$$\frac{x^1 - p^1}{q^1 - p^1} = \frac{x^2 - p^2}{q^2 - p^2}$$

De nuevo para que esta ecuación sea válida, los denominadores han de ser no nulos.

Por último también es útil a veces escribir directamente la ecuación de una recta conocida su intersección con los ejes. La recta pasando por los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x^1}{a} + \frac{x^2}{b} = 1$$

A esta ecuación se le suele llamar **ecuación canónica** de la recta.

2. Planos: El único plano en E_2 es el propio plano afín E_2, luego no tiene sentido práctico hablar de sus ecuaciones.

3.2 Variedades afines en el espacio afín E_3.

Trabajaremos en el espacio afín euclídeo E_3 con respecto a un sistema de referencia $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

0. Puntos: Un punto en E_3 queda determinado dando sus coordenadas.

1. Rectas: Una **recta** queda **determinada** dando **un punto** $P = (p^1, p^2, p^3)$ por el que pasa **y un vector** $\bar{u} = (u^1, u^2, u^3)$ que genera el subespacio que determina su dirección. Podemos describir los puntos $X = (x^1, x^2, x^3)$ de la recta con cualquiera de las siguientes ecuaciones[2]:

[2] Para que la ecuación continua tenga sentido los denominadores u^1, u^2 y u^3 han de ser no nulos.

$X = P + \alpha\bar{u}$	**Ecuación vectorial.**
$\left.\begin{array}{l} x^1 = p^1 + \alpha u^1 \\ x^2 = p^2 + \alpha u^2 \\ x^3 = p^3 + \alpha u^3 \end{array}\right\}$	**Ecuaciones paramétricas.**
$\frac{x^1-p^1}{u^1} = \frac{x^2-p^2}{u^2} = \frac{x^3-p^3}{u^3}$	**Ecuación continua.**
$\left.\begin{array}{l} a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 = 0 \\ b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4 = 0 \end{array}\right\}$ con $rg\begin{pmatrix} a_1\, a_2\, a_3 \\ b_1\, b_2\, b_3 \end{pmatrix} = 2$	**Intersección de dos planos.**

La ecuación de la recta expresada como intersección de dos planos, puede obtenerse (por ejemplo) a partir de las paramétricas eliminando los parámetro o a partir de la continua eliminando denominadores.

Una **recta** queda también **determinada por dos puntos** P y Q diferentes. De nuevo podemos obtener las ecuaciones anteriores tomando como vector director el que une ambos puntos $\bar{u} = \overline{PQ}$.

2. Planos: Un **plano** queda **determinado por un punto** $P = (p^1, p^2, p^3)$ por el que pasa **y por** una base $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ del subespacio vectorial que marca **su dirección**. Veamos las distintas ecuaciones que describen los puntos $X = (x^1, x^2, x^3)$ del plano:

$X = P + \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}$	Ecuación vectorial.
$\left.\begin{array}{l} x^1 = p^1 + \alpha u^1 + \beta v^1 \\ x^2 = p^2 + \alpha u^2 + \beta v^2 \\ x^3 = p^3 + \alpha u^3 + \beta v^3 \end{array}\right\}$	Ecuaciones paramétricas.
$\begin{vmatrix} x^1 - p^1 & x^2 - p^2 & x^3 - p^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = 0$	
$\Updownarrow$	
$a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 = 0$	Ecuación cartesiana.

De nuevo se cumple la siguiente interesante propiedad:

Teorema 3.3 *Si $a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 = 0$ es la ecuación cartesiana de un plano, entonces (a_1, a_2, a_3) son las coordenadas covariantes de un vector perpendicular a cualquier vector contenido en el plano.*

El vector de coordenadas covariantes (a_1, a_2, a_3) se dice el **vector normal del plano**.

Un **plano** queda también **determinado por tres puntos** P, Q, R **no alineados**. En ese caso podemos escribir las ecuaciones anteriores tomando como vectores directores $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$.

Por último, conocidos los puntos de intersección del plano con los ejes: $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ podemos escribir directamente la **ecuación canónica**:

$$\frac{x^1}{a} + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{c} = 1.$$

4 Haces de variedades afines.

Un haz de variedades afines consiste en una familia de variedades afines que dependen "linealmente" de varios parámetros. Aquí veremos dos casos particulares.

4.1 Haces de rectas en E_2.

Sean r y s dos rectas de E_2 de ecuaciones cartesianas:

$$\begin{array}{rcl} r & \equiv & a_1x^1 + a_2x^2 + a_3 = 0 \\ s & \equiv & b_1x^1 + b_2x^2 + b_3 = 0 \end{array}$$

El **haz de rectas formado por r y s** es el conjunto de todas las rectas definidas por las siguientes ecuaciones:

$$\{\alpha(a_1x^1 + a_2x^2 + a_3) + \beta(b_1x^1 + b_2x^2 + b_3) = 0 |\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (\alpha, \beta) \neq (0, 0)\}$$

o también

$$\{(a_1x^1 + a_2x^2 + a_3) + \mu(b_1x^1 + b_2x^2 + b_3) = 0 |\ \mu \in \mathbb{R}\} \cup \{s\}.$$

Si r y s se cortan en un punto P, el haz de rectas está formado por todas las rectas que pasan por el punto P.

Si r y s son paralelas, entonces el haz de rectas está formado por todas las rectas paralelas a ellas.

4.2 Haces de planos en E_3.

Dados dos planos π_1 y π_2 en E_3 de ecuaciones cartesianas:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 & \equiv & a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 = 0 \\ \pi_2 & \equiv & b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4 = 0 \end{array}$$

el **haz de planos formado por π_1 y π_2** es el conjunto de todas los planos definidos por las siguientes ecuaciones:

$$\{\alpha(a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4) + \beta(b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4) = 0 |\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (\alpha, \beta) \neq (0, 0)\}$$

o también

$$\{(a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4) + \mu(b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4) = 0 |\ \mu \in \mathbb{R}\} \cup \{s\}.$$

Si π_1 y π_2 son secantes, el haz de planos está formado por todas los planos que pasan por la recta intersección $\pi_1 \cap \pi_2$.

Si π_1 y π_2 son paralelos, entonces el haz de planos está formado por todos los planos paralelos a ellos.

5 Ángulos.

5.1 Ángulo entre dos rectas.

Tanto en el plano afín E_2 como en el espacio afín E_3 **el ángulo formado por dos rectas es el formado por sus vectores directores**. Siempre adoptaremos el menor de los dos ángulos que forman.

Si r y s son dos rectas con vectores directores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ respectivamente, entonces el ángulo que forman viene dado por:

$$cos(r,s) = |cos(\bar{u},\bar{v})| = \frac{|\bar{u}\cdot\bar{v}|}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|}.$$

De esta forma dos rectas son paralelas si sus vectores directores son proporcionales, o equivalentemente, si forman un ángulo de cero grados.

Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son ortogonales, ó equivalentemente si forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

5.2 Ángulo entre dos planos.

El **ángulo que forman dos planos** en el espacio afín E_3 es **el menor ángulo que forman sus correspondientes vectores normales**.

En concreto, si π_1 y π_2 son dos planos con vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$ respectivamente, entonces el ángulo que forman viene dado por:

$$cos(\pi_1,\pi_2) = |cos(\bar{n}_1,\bar{n}_2)| = \frac{|\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2|}{\|\bar{n}_1\|\|\bar{n}_2\|}$$

Ahora dos planos son paralelos si forman un ángulo de cero grados ó equivalentemente si sus vectores normales son proporcionales.

Dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son perpendiculares ó equivalentemente si forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

5.3 Ángulo entre recta y plano.

El ángulo entre una recta y un plano del espacio euclídeo es el complementario del que forman el vector director de la recta y el vector normal al plano.

Así si r es una recta con vector director $\bar{u}$ y π es un plano con vector normal $\bar{n}$, entonces el ángulo que forman viene dado como:

$$sen(r,\pi) = |cos(\bar{u},\bar{n})| = \frac{|\bar{u}\cdot\bar{n}|}{\|\bar{u}\|\|\bar{n}\|}.$$

La recta y el plano serán paralelos, cuando el vector director de la recta y el ortogonal del plano sean perpendiculares; equivalentemente, cuando recta y plano formen un ángulo de cero grados.

La recta y el plano serán perpendiculares, cuando el vector director de la recta y el ortogonal del plano sean proporcionales; equivalentemente, cuando recta y plano formen un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

6 Distancias.

6.1 Distancia entre dos puntos.

Definición 6.1 *Dados dos puntos P y Q en un espacio afín euclídeo arbitrario E, definimos la* **distancia entre** P **y** Q *como el módulo del vector que forman:*

$$d(P,Q) = \|\overline{PQ}\|$$

Como consecuencia de las propiedades vistas para la norma euclídea, la distancia entre dos puntos cumple las siguientes propiedades. Para cualesquiera puntos $P,Q,R \in E$ se tiene:

1. $d(P,Q) \geq 0$.
2. $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$.
3. $d(P,Q) = d(Q,P)$.
4. $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ (Desigualdad Triangular).

6.2 Distancia de un punto a una variedad afín.

Definición 6.2 *La* **distancia entre un punto** P **y una variedad afín** F *se define como la menor de las distancias entre P y todos los puntos de F:*

$$d(P,F) = min\{d(P,X) |\, X \in F\}.$$

Intuitivamente tenemos una idea geométrica de cual es la menor distancia entre un punto P y una variedad. El "camino" más corto entre ambos es el segmento perpendicular a la variedad afín que la une con el punto. Formalicemos esto.

Definición 6.3 *Dado un punto P y una variedad afín F, tales que $P \notin F$, se llama* **proyección ortogonal** *de P sobre F a un punto $Q \in F$ tal que $\overline{PQ}$ es ortogonal a todos los vectores de F.*

Teorema 6.4 *Dado un punto P y una variedad afín F, tales que $P \notin F$, denotamos por Q a la proyección ortogonal de P sobre F. Entonces se cumple que:*

$$d(P,F) = d(P,Q)$$

Prueba: Utilizaremos que por ser $\overline{PQ}$ ortogonal a F, si tomamos cualquier punto $X \in F$ entonces $\overline{QX}$ es ortogonal a $\overline{PQ}$ y puede aplicarse el teorema de Pitágoras. Por tanto:

$$\|\overline{PX}\|^2 = \|\overline{PQ}\|^2 + \|\overline{QX}\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|\overline{PX}\| = \sqrt{\|\overline{PQ}\|^2 + \|\overline{QX}\|^2}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} d(P,f) &= min\{d(P,X) |\, X \in F\} = min\{\|\overline{PX}\| |\, X \in F\} = \\ &= min\{\sqrt{\|\overline{PQ}\|^2 + \|\overline{QX}\|^2} |\, X \in F\} = \|\overline{PQ}\| = d(P,Q). \end{aligned}$$

■

Aplicaremos esto a varios casos particulares en E_2 y en E_3.

6.2.1 Distancia de un punto a una recta en E_2.

Consideramos en E_2 la recta r de ecuación:

$$r \equiv ax + by + c = 0$$

y el punto $P = (x_0, y_0)$. Denotamos por $\bar{n} = (a, b)$ a las coordenadas covariantes del vector normal a r.

Sea Q la proyección de P sobre r y $A = (x_1, y_1)$ un punto cualquiera de r. Se tiene:

$$\overline{AP} \cdot \bar{n} = (\overline{AQ} + \overline{QP}) \cdot \bar{n} = \overline{AQ} \cdot \bar{n} + \overline{QP} \cdot \bar{n} = \overline{QP} \cdot \bar{n} = \|QP\| \|\bar{n}\| cos(\overline{QP}, \bar{n}) = \pm \|QP\| \|\bar{n}\|$$

Por tanto:

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|\overline{AP} \cdot \bar{n}|}{\|\bar{n}\|}}$$

Si introducimos coordenadas tenemos:

$$\overline{AP} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1) \quad \Rightarrow \quad \overline{AP} \cdot \bar{n} = x_0 a - a x_1 + y_0 b - b y_1 = a x_0 + b x_0 + c$$

y obtenemos:

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\|\bar{n}\|}}$$

6.2.2 Distancia de un punto a una recta en E_3.

Consideramos la recta r en E_3, definida por un punto A un un vector director $\bar{u}$. Consideramos por otra parte un punto $P \in E_3$. Llamamos Q a la proyección de P sobre r. Veamos dos formas de calcular la distancia de P a r:

Método I: Mediante el producto vectorial.

Se tiene:

$$\|\overline{AP} \wedge \bar{u}\| = \|(\overline{AQ} + \overline{QP}) \wedge \bar{u}\| = \|\overline{AQ} \wedge \bar{u} + \overline{QP} \wedge \bar{u}\| = \|\overline{QP} \wedge \bar{u}\| = \|QP\| \|\bar{u}\|$$

Por tanto:

$$\boxed{d(P, r) = \frac{\|\overline{AP} \wedge \bar{u}\|}{\|\bar{u}\|}}$$

Método II: Calculando la proyección Q de P sobre r.

Para calcular Q utilizamos lo siguiente. Como Q es punto de la recta r verifica la ecuación paramétrica:

$$Q = A + \alpha \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \overline{AQ} = \alpha \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} = \overline{PA} + \alpha \bar{u}$$

Imponemos que $\overline{PQ}$ ha de ser perpendicular a $\bar{u}$ y por tanto:

$$\overline{PQ} \cdot \bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{PA} \cdot \bar{u} = -\alpha \bar{u} \cdot \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{-\overline{PA} \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|^2}$$

Una vez conocido α también conocemos Q. Ahora la distancia buscada es $\|PQ\|$.

6.2.3 Distancia de un punto a un plano en E_3.

Consideramos en E_3 el plano π de ecuaciones:

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

y el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$. Denotamos por $\bar{n} = (a, b, c)$ a las coordenadas covariantes del vector normal a π.

Sea Q la proyección de P sobre π y $A = (x_1, y_1, z_1)$ un punto cualquiera de π. Razonamos exactamente igual que en el caso de la distancia de un punto a una recta en E_2. Se tiene:

$$\overline{AP} \cdot \bar{n} = (\overline{AQ} + \overline{QP}) \cdot \bar{n} = \overline{AQ} \cdot \bar{n} + \overline{QP} \cdot \bar{n} = \overline{QP} \cdot \bar{n} = \|QP\| \|\bar{n}\| cos(\overline{QP}, \bar{n}) = \pm \|QP\| \|\bar{n}\|$$

Por tanto:

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|\overline{AP} \cdot \bar{n}|}{\|\bar{n}\|}}$$

Si introducimos coordenadas y operamos análogamente al caso de la recta obtenemos:

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\|\bar{n}\|}}$$

6.3 Distancia entre dos variedades afines.

Definición 6.5 *La* **distancia entre dos variedades afines** F_1 *y* F_2 *se define como la menor de las distancias entre cualquier punto de* F_1 *y cualquier punto de* F_2*:*

$$d(F_1, F_2) = min\{d(X, Y) |\, X \in F_1,\ Y \in F_2\}$$

De nuevo intuitivemente la menor distancia entre F_1 y F_2 se obtiene recorriendo el segmento que las une y es perpendicular a ambas variedades. En concreto se cumple el siguiente resultado:

Teorema 6.6 *Dadas dos variedades afines* F_1 *y* F_2*, existen dos puntos* $Q_1 \in F_1$ *y* $Q_2 \in F_2$*, tales que* $\overline{Q_1Q_2}$ *es perpendicular a* F_1 *y* F_2 *y además:*

$$d(F_1, F_2) = d(Q_1, Q_2).$$

Aplicaremos este resultado en varios casos particulares:

6.3.1 Distancia entre dos rectas paralelas.

El procedimiento es el mismo tanto en E_2 como en E_3. La distancia entre dos rectas paralelas r y s es la distancia de un punto cualquiera de s a r:

$$d(r, s) = d(B, r) \text{ con } B \in s.$$

6.3.2 Distancia entre dos planos paralelos de E_3.

La distancia entre dos planos paralelos π_1 y π_2 de E_3, es la distancia de un punto cualquiera de π_2 a π_1:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(B, \pi_1) \text{ con } B \in \pi_2.$$

6.3.3 Distancia entre un plano y una recta paralela de E_3.

La distancia entre un plano π y una recta paralela r de E_3, es la distancia de un punto cualquiera de la recta r a π:

$$d(\pi, r) = d(B, \pi) \text{ con } B \in r.$$

6.3.4 Distancia entre dos rectas que se cruzan en E_3.

Sean r y s dos rectas que se cruzan en E_3. Supongamos que sus ecuaciones vectoriales son respectivamente:

$$\begin{array}{c} r \equiv X = A + \alpha\bar{u}_1 \\ s \equiv X = B + \beta\bar{u}_2 \end{array}$$

Denotamos por $Q_1 \in r$ y $Q_2 \in s$ a los puntos sobre las rectas verificando que $\overline{Q_1Q_2}$ es perpendicular a r y s, y además $d(r, s) = d(Q_1, Q_2)$.

Veamos varios métodos para calcular la distancia entre ambas rectas:

Método I:

Los pasos son:

1. Calcular el plano π_1 que contiene a r y al vector director $\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2$.
2. Entonces $Q_2 = \pi_1 \cap s$.
3. Finalmente $d(r, s) = d(Q_2, r)$.

Método II:

Los pasos son:

1. Calcular el plano π_1 que contiene a r y al vector director $\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2$.
2. Entonces $Q_2 = \pi_1 \cap s$.
3. Calcular el plano π_2 que contiene a s y al vector director $\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2$.
4. Entonces $Q_1 = \pi_2 \cap r$.
5. Finalmente $d(r, s) = d(Q_1, Q_2)$.

Método III:

Los pasos son:

1. El punto Q_1, por estar en r, es de la forma $Q_1 = A + \alpha\bar{u}_1$.
2. El punto Q_2, por estar en s, es de la forma $Q_2 = B + \beta\bar{u}_2$.
3. El vector $\overline{Q_1Q_2}$ será $B - A + \beta\bar{u}_2 - \alpha\bar{u}_1$.
4. Imponemos que $\overline{Q_1Q_2}$ ha de ser perpendicular a $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$. Esto nos proporciona dos ecuaciones de las que despejaremos α y β:

$$\begin{array}{c} (B - A + \beta\bar{u}_2 - \alpha\bar{u}_1) \cdot \bar{u}_1 = 0 \\ (B - A + \beta\bar{u}_2 - \alpha\bar{u}_1) \cdot \bar{u}_2 = 0 \end{array}$$

5. Finalmente conocidos α y β, conocemos también Q_1 y Q_2 y por tanto $d(r,s) = d(Q_1,Q_2)$.

Método IV: Este método es similar a los vistos para la distancia de un punto a una recta o a un plano. Utiliza el producto mixto. Se tiene:

$$[\overline{AB},\bar{u}_1,\bar{u}_2] = \overline{AB}\cdot(\bar{u}_1\wedge\bar{u}_2) = (\overline{AQ_1}+\overline{Q_1Q_2}+\overline{Q_2B})\cdot(\bar{u}_1\wedge\bar{u}_2) = \overline{Q_1Q_2}\cdot(\bar{u}_1\wedge\bar{u}_2)$$

Dado que la distancia entre r y s es $\|\overline{Q_1Q_2}\|$ deducimos la siguiente fórmula:

$$\boxed{d(r,s) = \frac{|[\overline{AB},\bar{u}_1,\bar{u}_2]|}{\|\bar{u}_1\wedge\bar{u}_2\|}}$$

7 Transformaciones afines.

Definición 7.1 *Dado un espacio afín E asociado a un espacio vectorial V y un automorfismo $t : V \longrightarrow V$ se llama* **transformación afín** *a una aplicación $A : E \longrightarrow E$ verificando:*

$$\forall P,Q\in E,\ \textit{si } A(P)=P' \textit{ y } A(Q)=Q' \textit{ entonces } t(\overline{PQ})=\overline{P'Q'}.$$

Con esta definición si A es una transformación afín, la imagen por A de cualquier punto $X\in E$ se calcula de la siguiente forma. Fijado un punto $P\in X$, si llamamos $X' = A(X)$ y $P' = A(P)$:

$$t(\overline{PX}) = \overline{P'X'} = X'-P' \quad\Rightarrow\quad X' = P'+t(\overline{PX}) \quad\Rightarrow\quad \boxed{A(X)=A(P)+t(\overline{PX})}$$

A los puntos que se transforman en ellos mismos por una transformación afín se les denomina **puntos dobles** o **puntos fijos**.

Veamos algunas transformaciones afines particulares.

7.1 Traslaciones.

Definición 7.2 *Una* **traslación** *por el vector $\bar{v}$ es una transformación afín que lleva un punto X en el punto $X+\bar{v}$.*

Lo que hace una traslación es desplazar cada punto de E en la dirección, distancia y sentido que marca el vector $\bar{v}$. Dado que es una transformación afín tendrá un automorfismo $t : V \longrightarrow V$ asociado. Veamos cuál es éste. Dados dos puntos $P,Q\in E$, se tiene:

$$\begin{array}{lcl} P' = P+\bar{v} & \Rightarrow & \bar{v} = \overline{PP'} \\ Q' = Q+\bar{v} & \Rightarrow & \bar{v} = \overline{QQ'} \end{array}$$

Ahora

$$t(\overline{PQ}) = \overline{P'Q'} = \overline{P'P}+\overline{PQ}+\overline{QQ'} = -\bar{v}+\overline{PQ}+\bar{v} = \overline{PQ}$$

Deducimos que el automorfismo t es la aplicación **identidad.**

Es evidente que si $\bar{v}\neq 0$ entonces la traslación definida por $\bar{v}$ no tiene puntos fijos.

Finalmente si introducimos una referencia $\{O;\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$, la ecuación de la traslación en coordenadas es:

$$(x'^1,\dots,x'^n) = (x^1,\dots,x^n)+(v^1,\dots,v^n)$$

donde $(v^1,\dots,v^n)$ son las coordenadas del vector $\bar{v}$ que define la traslación.

7.2 Homotecias.

Definición 7.3 *Fijado un punto $C \in E$ y un número real $k \neq 0, 1$, se denomina* **homotecia de centro** C **y razón** k *a la transformación que lleva un punto X en:*

$$X' = C + k\overline{CX} \text{ o equivalentemente } \overline{CX'} = k\overline{CX}.$$

Lo que hace una homotecia es aumentar ($|k| > 1$) o disminuir ($|k| < 1$) la distancia de los puntos del espacio euclídeo con respecto a un centro fijo. De esta forma las distancias de las imágenes quedan multiplicadas por $|k|$, las areas por k^2 y los volúmenes por $|k|^3$.

Está claro que con esta definición **el centro** C **es un punto doble de la homotecia**. De hecho veamos que **es el único**. Si X es un punto doble entonces:

$$X = C + k\overline{CX} \quad \Rightarrow \quad \overline{CX} = k\overline{CX} \quad \Rightarrow \quad (1-k)\overline{CX} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} k = 1 \\ \text{ó} \\ \overline{CX} = \bar{0} \end{array} \right.$$

Como suponemos $k \neq 1$ deducimos que $X = C$.

Una homotecia, por ser una transformación afín, tendrá un automorfismo $t : V \longrightarrow V$ asociado. Veamos cual es. Dado un $X \in E$ cualquiera se tiene:

$$t(\overline{CX}) = \overline{C'X'} = \overline{CX'} = k\overline{CX}$$

Deducimos que $t = k \cdot Id$.

Finalmente respecto a una referencia $\{O; \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ veamos cual es la ecuación de la homotecia. Se tiene:

$$\overline{OX'} = \overline{OC} + \overline{CX'} = \overline{OC} + k\overline{CX} = \overline{OC} + k(\overline{OX} - \overline{OC})$$

luego

$$(x'^1, \ldots, x'^n) = (c^1, \ldots, c^n) + k(x^1 - c^1, \ldots, x^n - c^n)$$

donde $(c^1, \ldots, c^n)$ son las coordenadas del centro C de la homotecia.

7.3 Transformaciones afines asociadas a transformaciones ortogonales: isometrías.

Definición 7.4 *Una* **isometría** *de un espacio afín euclídeo E es una transformación afín $A : E \longrightarrow E$ que conserva la distancia. Es decir cumple:*

$$d(A(P), A(Q)) = d(P, Q) \text{ para cualquier par de puntos } P, Q \in E.$$

Puede verse que una isometría en E_2 o E_3 es composición de traslaciones, giros y/o simétrıas. En concreto pueden aparecer los siguientes giros o simetrías:

1. Giros en E_2: Fijado un centro C y un ángulo α el giro de centro C y ángulo α se construye como:

   $$X' = C + t_\alpha(\overline{CX})$$

   donde t_α es el giro en $\mathbb{R}^2$ de ángulo α, con la orientación correspondiente.

   El único punto doble en este caso es el centro de giro C.

2. Giros en E_3: Fijado un semieje r y un ángulo α el giro de eje r y ángulo α se construye como:
$$X' = P + t_\alpha(\overline{PX})$$
donde P es un punto cualquiera de r y t_α es el giro en $\mathbb{R}^3$ de ángulo α respecto al vector director de r.

   Los puntos dobles son todos los puntos del eje recta r.

   Hay que tener en cuenta que el giro se define respecto a un semieje, de manera que el vector director de r se escoge en un determinado sentido. Esto nos permite fijar la orientación del giro.

3. Simetrías ortogonales: Fijada una subvariedad afín $F = P+U$, la simetría ortogonal respecto a f se construye como:
$$X' = P + t_U(\overline{PX})$$
donde t_U es la simetría ortogonal en V respecto al subespacio U.