4. Producto vectorial y producto mixto.

En este capítulo trabajaremos en un espacio euclídeo U de dimensión 3.

1 Producto vectorial.

1.1 Definición.

Definición 1.1 *Sea $\bar{x}, \bar{y}$ dos vectores en U y supongamos que fijamos una base de referencia $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Definimos el* **producto vectorial de** *$\bar{x}, \bar{y}$ como el vector $\bar{x} \wedge \bar{y}$ verificando:*

1. *Si $\bar{x}, \bar{y}$ son dependientes, entonces $\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{0}$.*
2. *Si $\bar{x}, \bar{y}$ son independientes, verifica:*
   - *(a) $\bar{x} \wedge \bar{y}$ es perpendicular a $\bar{x}$ e $\bar{y}$.*
   - *(b) $\|\bar{x} \wedge \bar{y}\| = \|\bar{x}\|\|\bar{y}\||sen(\bar{x}, \bar{y})|$.*
   - *(c) La base $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}\}$ tiene la misma orientación que B.*

La definición es coherente porque dados dos vectores independientes $\bar{x}, \bar{y}$ en un espacio euclídeo 3-dimensional, el espacio de vectores perpendiculares a ambos tiene dimensión 1. Por tanto hay un único vector en este subespacio si fijamos su norma y su sentido.

1.2 Expresión analítica.

Supongamos que fijamos una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ **ortonormal** que tomamos como referencia de orientación positiva. Entonces:

Teorema 1.2 *La expresión del producto vectorial de dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_B$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)_B$ se obtienen desarrollando el determimante:*

$$\boxed{\bar{x} \wedge \bar{y} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}$$

Prueba: En primer lugar notemos que aunque la primera fila del determinante está formado por vectores, la expresión tiene sentido. Basta tener en cuenta que en cada término de la expansión del determinante aparece un elemento y sólo uno de la primera fila; en este caso corresponderá un vector multiplicado por un escalar, operación que tiene sentido en un espacio vectorial.

Si denotamos $A = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ el teorema afirma que:

$$\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{z} \text{ con } (A_{11}, A_{12}, A_{13})_B,$$

donde A_{ij} es el adjunto de la posición ij de A. Veamoas que $\bar{z}$ cumple la definición de producto vectorial:

1. Si $\bar{x}, \bar{y}$ son dependientes, entonces $\bar{z} = 0$ porque la matriz A tendría las dos últimas filas dependientes y por tanto todos los adjunto serían nulos.

2. (a) Tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \bar{x} \cdot \bar{z} & = & x_1 A_{11} + x_2 A_{22} + x_3 A_{33} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \bar{y} \cdot \bar{z} & = & y_1 A_{11} + y_2 A_{22} + y_3 A_{33} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

2. (b) Queremos ver que $\|\bar{x} \wedge \bar{y}\| = \|\bar{x}\| \|\bar{y}\| |sen(\bar{x}, \bar{y})|$. Equivale a comprobar que:

$$\begin{array}{rl} \|\bar{x} \wedge \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\| \|\bar{y}\|^2 (1 - cos^2(\bar{x}, \bar{y})) & = \|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 - \|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 cos^2(\bar{x}, \bar{y}) = \\ & = \|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 - (\bar{x} \cdot \bar{y})^2 \end{array}$$

Teniendo en cuenta que con la fórmula propuesta:

$$\|\bar{x} \wedge \bar{y}\|^2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2$$

y

$$\|\bar{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \|\bar{y}\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

operando se obtiene la igualdad buscada.

2. (c) Para que la base $B' = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}\}$ tenga la misma orientación que B, la matriz de cambio de base $M_{BB'}$ tiene que tener determimante positivo. Pero si $\bar{x} \wedge \bar{y} = (A_{11}, A_{12}, A_{13})_B$,

$$|M_{BB'}| = |M_{BB'}^t| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{vmatrix}$$

desarrollando por la última fila queda:

$$|M_{BB'}| = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 > 0.$$

1.3 Propiedades.

Teniendo en cuenta la expresión analítica del producto vectorial, es fácil deducir las siguientes propiedades:

1. $\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{0} \iff \bar{x}, \bar{y}$ *son dependientes.*

2. *El producto vectorial es bilineal, es decir:*

$$\bar{x} \wedge (\alpha \bar{y} + \beta \bar{y}') = \alpha \bar{x} \wedge \bar{y} + \beta \bar{x} \wedge \bar{y}'.$$

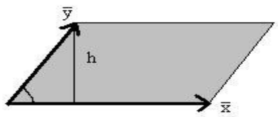
$$(\alpha \bar{x} + \beta \bar{x}') \wedge \bar{y} = \alpha \bar{x} \wedge \bar{y} + \beta \bar{x}' \wedge \bar{y}.$$

3. *El producto vectorial es antisimétrico, es decir:*

$$\bar{x} \wedge \bar{y} = -\bar{y} \wedge \bar{x}.$$

1.4 Interpretación geométrica.

Teorema 1.3 *El módulo del producto vectorial de dos vectores $\bar{x}$, $\bar{y}$, corresponde con el área del paralelogramo que determinan:*



Prueba: Se tiene que:

$$\text{Area de paralelogramo} = \|\bar{x}\|h = \|\bar{x}\|\|\bar{y}\||Sin(\bar{x},\bar{y})| = \|\bar{x} \wedge \bar{y}\|.$$

2 Producto mixto

Definición 2.1 *Definimos el* **producto mixto** *de tres vectores $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ de un espacio euclídeo 3-dimensional como:*

$$[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \cdot \bar{z}.$$

Como consecuencia de la expresión analítica vista para el producto vectorial se tiene la siguinte expresión para el producto mixto:

Teorema 2.2 *Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}$ son tres vectores de U y B una base ortonormal. Se verifica:*

$$\boxed{[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}$$

El producto mixto cumple las siguientes propiedades:

1. $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = 0 \iff \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ *son dependientes.*
2. *Es trilineal, es decir:*

$$[\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}', \bar{y}, \bar{z}] = \alpha[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] + \beta[\bar{x}', \bar{y}, \bar{z}].$$

$$[\bar{x}, \alpha\bar{y} + \beta\bar{y}', \bar{z}] = \alpha[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] + \beta[\bar{x}, \bar{y}', \bar{z}].$$

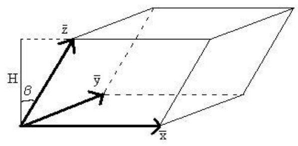
$$[\bar{x}, \bar{y}, \alpha\bar{z} + \beta\bar{z}'] = \alpha[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] + \beta[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}'].$$

3. *Es antisimétrico, es decir:*

$$[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = -[\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] = -[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}] = -[\bar{z}, \bar{y}, \bar{x}].$$

Por último el producto mixto de tres vectores tiene la siguiente interpretación geométrica.

Teorema 2.3 *El valor absoluto del producto mixto de tres vectores $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ corresponde con el volumen del paralelepípedo que determinan.*



Prueba: Se tiene:

$$\text{Volumen paralelepípedo} = \text{Area base} \cdot H = \|\bar{x} \wedge \bar{y}\| \|z\| Cos(\theta) = |(\bar{x} \wedge \bar{y}) \cdot \bar{z}| = |[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]|.$$

■