

2. Dualidad y tensores homogéneos.

1 Notación: convenio de la suma de Einstein.

En expresiones donde se manejan sumatorios que dependen de uno o varios índices es común utilizar el siguiente convenio, para simplificar su escritura. Si un subíndice ó superíndice aparece en dos términos que se multiplican se considera que se está sumando en ese índice. Algunos ejemplos:

$$\begin{aligned}x_i \vec{e}_i &= \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \\a_{ij} x_i y_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \\a_{ik} b_{kj} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\end{aligned}$$

Cuando se usa esta notación el límite en el que se mueven los índices se sobrentiende del contexto.

2 Dualidad.

2.1 Espacio vectorial dual.

Recordemos como definíamos el espacio vectorial dual de un espacio vectorial U .

Definición 2.1 *Dado un espacio vectorial U sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, se llama **espacio dual de U** y se denota por U^* al espacio vectorial $\text{Hom}(U, \mathbb{K})$.*

Los elementos de U^ son aplicaciones lineales:*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

*y suelen llamarse **formas lineales** o **covectores**.*

Se verifica que $\dim(U^*) = \dim(U)$.

2.2 Bases duales.

Definición 2.2 *Sea U un espacio vectorial y $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ una base de U . Llamamos **base dual de B** como a la base del espacio dual U^* formada por los covectores:*

$$B^* = \{u^{*1}, \dots, u^{*n}\}$$

definidos como:

$$u^{*i}(\bar{u}_j) = \delta_j^i.$$

Es decir:

$$\begin{array}{ccc}
 u^{*1} : U & \longrightarrow & \mathbb{K} \\
 \bar{u}_1 & \longrightarrow & 1 \\
 \bar{u}_2 & \longrightarrow & 0 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \bar{u}_n & \longrightarrow & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 u^{*2} : U & \longrightarrow & \mathbb{K} \\
 \bar{u}_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \bar{u}_2 & \longrightarrow & 1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \bar{u}_n & \longrightarrow & 0
 \end{array}
 \qquad
 \dots
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 u^{*n} : U & \longrightarrow & \mathbb{K} \\
 \bar{u}_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \bar{u}_2 & \longrightarrow & 0 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \bar{u}_n & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

Veamos que efectivamente es una base, teniendo en cuenta que son n elementos de U^* y que U^* tiene dimensión n , es suficiente comprobar que B^* es un sistema generador.

Sea $f \in U^*$. Sea $\bar{x} \in U$ y sean $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ las coordenadas de $\bar{x}$ en la bse B . Se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) = f(x^i \bar{u}_i) = x^i f(\bar{u}_i) \\ u^{*i}(\bar{x}) = u^{*i}(x^j \bar{u}_j) = x^j u^{*i}(\bar{u}_j) = x^i \end{array} \right\} \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{u}_i) u^{*i}(\bar{x}).$$

Por tanto cualquier covector $f \in U^*$ puede ser puesto como combinación lineal de elementos de la base dual B^* . En concreto:

$$f = f(\bar{u}_i) u^{*i}$$

2.3 Cambio de base.

Supongamos que tenemos dos bases del espacio vectorial U y consideramos sus correspondientes bases duales:

En el espacio vectorial U	En el espacio dual U^*
$B_1 = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$	$B_1^* = \{u^{*1}, \dots, u^{*n}\}$
$B_2 = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$	$B_2^* = \{v^{*1}, \dots, v^{*n}\}$
$\{\bar{v}\} = \{\bar{u}\} M_{B_1 B_2}$	$\{v^*\} = \{u^*\} M_{B_1^* B_2^*}$

Tratemos de expresar los vectores de B_1^* en la base B_2^* siguiendo la fórmula del apartado anterior:

$$\begin{aligned}
 u^{*i} &= u^{*i}(\bar{v}_j) v^{*j} = u^{*i}(\bar{u}_k (M_{B_1 B_2})^k_j) v^{*j} = u^{*i}(\bar{u}_k) (M_{B_1 B_2})^k_j v^{*j} = \\
 &= (M_{B_1 B_2})^i_j v^{*j} = v^{*j} (M_{B_1 B_2}^t)^j_i
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\{u^*\} = \{v^*\} M_{B_1 B_2}^t \Rightarrow \{v^*\} = \{u^*\} M_{B_1 B_2}^{-t}.$$

Por tanto:

La matriz de paso de la base B_2^* a la base B_1^* es la inversa traspuesta de la matriz de paso de la base B_2 a la base B_1 :

$$M_{B_1^* B_2^*} = M_{B_1 B_2}^{-t}$$

3 Producto tensorial de espacios vectoriales de dimensión finita.

3.1 Producto tensorial de dos espacios vectoriales.

Definición 3.1 Sean U, V dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo. Supongamos que son de dimensiones m y n respectivamente. Se llama **producto tensorial** de ambos al conjunto $\{\phi, U \otimes V\}$ formado por un espacio vectorial de dimensión $n \cdot m$, y una aplicación ϕ :

$$\phi : U \times V \longrightarrow U \otimes V$$

verificando:

1. ϕ es bilineal.
2. Dados sistemas libres $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p\} \subset U$ y $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q\} \in V$ el sistema formado por:

$$\{\phi(\bar{u}_1, \bar{v}_1), \dots, \phi(\bar{u}_1, \bar{v}_q), \dots, \phi(\bar{u}_p, \bar{v}_1), \dots, \phi(\bar{u}_p, \bar{v}_q)\}$$

debe de ser libre.

En realidad la imagen de dos vectores $\phi(\bar{u}, \bar{v})$ se denotará por $\bar{u} \otimes \bar{v}$, de manera que manejaremos el producto tensorial $U \otimes V$ sin indicar explícitamente la aplicación ϕ .

Los elementos del conjunto $U \otimes V$ se llamarán **tensores**.

Como consecuencia de la definición se deducen las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera $\bar{u} \in U$, $\bar{v} \in V$ se verifica:

$$\bar{u} \otimes \bar{0} = \bar{0}; \quad \bar{0} \otimes \bar{v} = \bar{0}.$$

Prueba: Es consecuencia de la bilinealidad.

2. Si en la segunda condición de la definición consideramos bases en lugar de sistemas libres, entonces obtenemos una base de $U \otimes V$.

Prueba: Basta tener en cuenta que exigimos que $U \otimes V$ sea un espacio vectorial de dimensión $\dim(U) \cdot \dim(V)$.

3. Sean $B_1 = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ bases respectivamente de U y V . Sean $\bar{x} \in U$, $\bar{y} \in V$. Entonces:

$$\bar{x} \otimes \bar{y} = x^i y^j \bar{u}_i \otimes \bar{v}_j.$$

donde (x^i) , (y^j) son las coordenadas contravariantes de $\bar{x}$, $\bar{y}$ respecto a estas bases.

Prueba: Si utilizamos la bilinealidad:

$$\bar{x} \otimes \bar{y} = (x^i \bar{u}_i) \otimes (y^j \bar{v}_j) = x^i y^j \bar{u}_i \otimes \bar{v}_j.$$

4. Si $\dim(U), \dim(V) > 1$, ϕ no es sobreyectiva.

Prueba: Si consideramos las bases definidas en la propiedad anterior, sabemos que:

$$B = \{u_i \otimes v_j \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$$

es una base de $U \otimes V$. Sin embargo, por la propiedad anterior, sólo son imagen de dos vectores $\bar{x}, \bar{y}$ aquellos cuyas componentes son de la forma $x^i y^j$. Por ejemplo el vector de $U \otimes V$:

$$\bar{u}_1 \otimes \bar{v}_2 + \bar{u}_2 \otimes \bar{v}_1$$

no es imagen de ningún par de vectores $\bar{x}, \bar{y}$, ya que se tendría:

$$x^1 y^1 = 0; \quad x^1 y^2 = 1; \quad x^2 y^1 = 1; \quad x^2 y^2 = 0;$$

lo cual es imposible.

5. ϕ no es inyectiva.

Prueba: Ya que $\bar{u} \otimes \bar{0} = \bar{0} \otimes \bar{v}$, es decir, elementos distintos tienen la misma imagen.

3.2 Producto tensorial de un número finito de espacios vectoriales.

Definición 3.2 Sean $U_1, \dots, U_k$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo. El producto tensorial

$$U_1 \otimes \dots \otimes U_k$$

se construye inductivamente como:

$$U_1 \otimes \dots \otimes U_k = (U_1 \otimes \dots \otimes U_{k-1}) \otimes U_k,$$

teniendo en cuenta que sabemos como construir el producto tensorial de dos espacios vectoriales.

Como consecuencia de esto se cumplen las siguientes propiedades:

1. Los elementos de $U_1 \otimes \dots \otimes U_k$ son combinaciones lineales de elementos de la forma:

$$\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_k$$

con $\bar{x}_i \in U_i$.

2. Para cualesquiera $\bar{u}_i \in U_i$, y $j \in \{1, \dots, k\}$, se verifica:

$$\bar{u}_1 \otimes \dots \otimes \bar{u}_{j-1} \otimes \bar{0} \otimes \bar{u}_{j+1} \otimes \dots \otimes \bar{u}_k = \bar{0}.$$

3. Si B_i , $i = 1, \dots, k$ son bases respectivamente de U_i entonces:

$$\{\bar{u}_1 \otimes \dots \otimes \bar{u}_k \mid \bar{u}_1 \in U_1, \dots, \bar{u}_k \in U_k\}$$

es una base de $U_1 \otimes \dots \otimes U_k$.

4 Potencia tensorial de espacios vectoriales de dimensión finita.

Definición 4.1 Dado un espacio vectorial U sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se llama **potencia tensorial** a cualquier producto tensorial de los espacios vectoriales U y U^* :

$$W = U \otimes U^* \otimes U^* \otimes U \dots \otimes U^* \otimes U.$$

Al número de factores que aparecen se le llama **orden** de la potencia tensorial.

La **especie** de una potencia tensorial, es la descripción de los factores que aparecen. Cuando el factor es U se dice **contravariante**; cuando es U^* , se dice **covariante**.

Si U tiene dimensión n , entonces una potencia tensorial de U tiene dimensión n^r , siendo r el orden de la potencia tensorial.

Definición 4.2 Si $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ es una base de U , sabemos que $B^* = \{u^{*1}, \dots, u^{*n}\}$ es una base de U^* . Por tanto utilizando ambas podremos construir una base de una potencia tensorial de U . Esa base se llamará **base asociada** a B .

Observación 4.3 Por convención se considera:

- Las potencias tensoriales de orden 1 son U y U^* .
- La potencia tensorial de orden 0 es el cuerpo $\mathbb{K}$.

5 Tensor homogéneo.

5.1 Definición.

Definición 5.1 Un **tensor homogéneo** de un espacio vectorial U es cualquier elemento de cualquier potencia tensorial de U .

El **orden** y la **especie** de cualquier tensor homogéneo es la de la potencia tensorial a la que pertenece.

Definición 5.2 Las **componentes de un tensor homogéneo** T respecto a una base B de U , son las componentes de T respecto a la base asociada a B del correspondiente producto tensorial.

En concreto si $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ es una base de U y T es un tensor en:

$$T \in \underbrace{U^* \otimes \dots \otimes U^*}_{p \text{ veces}} \otimes \underbrace{U \otimes \dots \otimes U}_{q \text{ veces}}$$

se escribirá como:

$$T = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_p} \otimes \bar{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_q}.$$

5.2 Cambio de base.

Sean B y B' dos bases del espacio vectorial U :

$$B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}; \quad B' = \{\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n\}.$$

Veamos cual es la fórmula de cambio de base de las componentes de un tensor homogéneo T . Sabemos como cambia de base un índice contravariante y otro covariante. La misma expresión podrá generalizarse a cuantos índices deseemos.

Si llamamos:

$$C = M_{B'B}; \quad \gamma = M_{B'^*B^*} = C^{-t},$$

sabemos que C se utiliza para coordenadas contravariantes y γ para covariantes, cuando pasamos de coordenadas en la base B a la base B' .

Si t^i es un tensor contravariante, el cambio de base ha de ser:

$$t'^\alpha = C^\alpha_i t^i.$$

Por el contrario si t_i es covariante, el cambio de base es:

$$t'_\alpha = \gamma_\alpha^i t_i.$$

Podemos escribir la fórmula para un número arbitrario de índices:

$$t'_{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}^{\beta_1 \dots \beta_q} = \gamma_{\alpha_1}^{i_1} \dots \gamma_{\alpha_p}^{i_p} C^{\beta_1}_{j_1} \dots C^{\beta_q}_{j_q} t_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q}$$

Teniendo en cuenta estas fórmulas de cambio de base, podemos introducir la siguiente definición:

Definición 5.3 *Dado un espacio vectorial U sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, un sistema de elementos indexados de $\mathbb{K}$ definido a partir de una base B de U , tiene **carácter tensorial** si se comporta según la fórmula de cambio de base descrita anteriormente.*

Nos interesaran las operaciones y propiedades de los tensores, que tengan carácter tensorial, es decir que se comporten bien con las fórmulas de cambio de base.

Observación 5.4 *Resumimos el cambio de base tensorial, realizado matricialmente en el siguiente cuadro:*

Cambio de base de la base B a la B' .		
$C = M_{B'B} \quad \gamma = M_{B'^*B^*} = C^{-t}$		
Índice / Posición	Izquierda	Derecha
Contravariante	C^t	C
Covariante	γ^t	γ

6 Operaciones con tensores homogéneos.

6.1 Suma de tensores y producto por un escalar.

Teniendo en cuenta que los tensores homogéneos **con el mismo orden y de la misma especie** forman un espacio vectorial, sabemos que está definida la suma de tensores y el producto de un tensor por un escalar.

Si denotamos por $W_{p,q}$ el espacio vectorial de tensores p veces covariantes y q veces contravariantes se tendrá:

$$\begin{aligned} T, S \in W_{p,q} &\Rightarrow P = T + S \in W_{p,q} \\ T \in W_{p,q}, \lambda \in \mathbb{K} &\Rightarrow Z = \lambda T \in W_{p,q} \end{aligned}$$

de manera que si introducimos una base B y las correspondientes componentes, se verifica:

$$\begin{aligned} p_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} &= t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + s_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \\ z_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} &= \lambda t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \end{aligned}$$

6.2 Producto tensorial.

Definición 6.1 Sea U un espacio vectorial y B una base de U . Dados dos tensores homogéneos $T \in W_{p,q}$ y $S \in W_{r,s}$ sobre un espacio vectorial U , definimos el **producto tensorial de T y S** como el tensor

$$P = T \otimes S \in \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_p \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_q \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_r \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_s.$$

cuyas componentes son:

$$p_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}{}_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s} = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \cdot s_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s}.$$

Es fácil ver que esta definición tiene efectivamente carácter tensorial, es decir, que se comporta bien con el cambio de base.

6.3 Contracción tensorial.

Definición 6.2 Sea U un espacio vectorial de dimensión n y B una base de U . Sea T un tensor homogéneo en U , dependiente de r índices. La **contracción** de los índices i_k, i_l es un sistema dado por:

$$\sum_{\mu=1}^n t(i_1, \dots, i_{k-1}, \mu, i_{k+1}, \dots, i_{l-1}, \mu, i_{l+1}, \dots, i_r)$$

de manera que el tensor obtenido depende de $r - 2$ índices.

Definición 6.3 Una contracción de un tensor T se dice de **carácter tensorial** o **contracción tensorial** si se contraen índices de distinta especie.

Lo interesante de las contracciones tensoriales, es que funcionan bien con el cambio de base. Para comprobar esto basta fijarse que ocurre si escribimos la contracción de dos índices de distinta especie en bases diferentes. Debido en que en la contracción sólo intervienen dos índices, trabajaremos con tensores de orden 2.

Supongamos que T es un tensor co-contravariante. Entonces se tiene:

$$t'_\mu{}^\mu = \sum_{\mu=1}^n t'_\mu{}^\mu = \sum_{\mu=1}^n \gamma_j{}^\mu C_\mu^i t_i^j.$$

Teniendo en cuenta que $\gamma = C^{-t}$,

$$\gamma_j{}^\mu C_\mu^i = \delta_j^i$$

y por tanto:

$$t'_\mu{}^\mu = t_i^i.$$

6.4 Producto contraído.

Definición 6.4 *El producto contraído de dos tensores homogéneos T y S es una contracción tensorial del producto tensorial $T \otimes S$, de manera que se contraiga un índice de distinta especie de cada tensor.*

7 Simetría y hemisimetría.

Definición 7.1 *Un tensor dependiente de r índices es **simétrico** en 2 de ellos cuando al cambiarlos de orden, las componentes siguen siendo iguales.*

*La simetría es de **carácter tensorial** si los índices en los que se produce son de la misma especie.*

Definición 7.2 *Un tensor dependiente de r índices es **hemisimétrico** en 2 de ellos cuando al cambiarlos de orden, las componentes cambian de signo.*

*La hemisimetría es de **carácter tensorial** si los índices en los que se produce son de la misma especie.*