Part I

Aplicaciones bilineales y tensores homogéneos.

1. Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas.

1 Aplicaciones bilineales.

Definición 1.1 *Dados tres espacios vectoriales U, V, W sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación*

$$f : U \times V \longrightarrow W$$

se dice que es **bilineal** *si es lineal en cada una de las componentes, es decir:*

$$\begin{array}{c} f(\alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{u}_2, \bar{v}_1) = \alpha f(\bar{u}_1, \bar{v}_1) + \beta f(\bar{u}_2, \bar{v}_1) \\ f(\bar{u}_1, \alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2) = \alpha f(\bar{u}_1, \bar{v}_1) + \beta f(\bar{u}_1, \bar{v}_2) \end{array}$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U$, $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$.

Definición 1.2 *Una* **forma bilineal** *es una aplicación bilineal en la que el espacio vectorial final es el cuerpo $\mathbb{K}$:*

$$f : U \times V \longrightarrow \mathbb{K}, \ \textit{bilineal.}$$

1.1 Expresión matricial de una forma bilineal.

Supongamos que tenemos dos espacios vectoriales U, V y respectivas bases B_1, B_2:

$$B_1 = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\}, \qquad B_2 = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}.$$

Sea $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Supongamos que $\bar{x} \in U$, $\bar{y} \in V$ son vectores cuyas coordenadas contravariantes con respecto a las bases B_1, B_2 son:

$$\bar{x} = x^i\bar{u}_i; \qquad \bar{y} = y^j\bar{v}_j.$$

Entonces teniendo en cuenta la bilinealidad de f se tiene:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = f(x^i\bar{u}_i, y^j\bar{v}_j) = x^i y^j f(\bar{u}_i, \bar{v}_j)$$

Por tanto **la matriz asociada a f respecto a la base B_1 y B_2** es:

$$F_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} f(\bar{u}_1, \bar{v}_1) & f(\bar{u}_1, \bar{v}_2) & \ldots & f(\bar{u}_1, \bar{v}_n) \\ f(\bar{u}_2, \bar{v}_1) & f(\bar{u}_2, \bar{v}_2) & \ldots & f(\bar{u}_2, \bar{v}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\bar{u}_m, \bar{v}_1) & f(\bar{u}_m, \bar{v}_2) & \ldots & f(\bar{u}_m, \bar{v}_n) \end{pmatrix},$$

de manera que:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\bar{u}_1,\bar{v}_1) & f(\bar{u}_1,\bar{v}_2) & \dots & f(\bar{u}_1,\bar{v}_n) \\ f(\bar{u}_2,\bar{v}_1) & f(\bar{u}_2,\bar{v}_2) & \dots & f(\bar{u}_2,\bar{v}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\bar{u}_m,\bar{v}_1) & f(\bar{u}_m,\bar{v}_2) & \dots & f(\bar{u}_m,\bar{v}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

o simplemente

$$f(\bar{x},\bar{y}) = (x)^t F_{B_1B_2}(y).$$

1.2 Cambio de base de la matriz asociada a una forma bilineal.

Supongamos que tenemos dos espacios vectoriales U, V. Supongamos que tenemos las siguientes bases:

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = \{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_m\} \\ B'_1 = \{\bar{u}'_1,\dots,\bar{u}'_m\} \end{array}\right\} \text{Bases de } U; \qquad \left.\begin{array}{l} B_2 = \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\} \\ B'_2 = \{\bar{v}'_1,\dots,\bar{v}'_n\} \end{array}\right\} \text{Bases de } V.$$

A su vez denotaremos las coordenadas de los vectores $\bar{x} \in U$, $\bar{y} \in V$ en cada una de las bases de la siguiente forma:

Coordenadas de $\bar{x}$.		Coordenadas de $\bar{y}$.	
$(x^1,\dots,x^m)$	respecto a la base B_1	$(y^1,\dots,y^n)$	respecto a la base B_2
$(x'^1,\dots,x'^m)$	respecto a la base B'_1	$(y'^1,\dots,y'^n)$	respecto a la base B'_2

La relación entre las distintas bases y coordenadas utilizando las matrices de cambio de base es la siguiente:

$$\begin{array}{r|l} (\bar{u}) = (u)M_{B_1B'_1} & (\bar{v}') = (\bar{v})M_{B_2B'_2} \\ (x) = M_{B_1B'_1}(x') & (y) = M_{B_2B'_2}(y') \end{array}$$

Además sabemos que podemos escriibir la aplicación bilineal f matricialmente bien con respecto a las bases B_1, B_2 ó B'_1, B'_2:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = (x)^t F_{B_1B_2}(y) \;\Big|\; f(\bar{x},\bar{y}) = (x')^t F_{B'_1B'_2}(y')$$

Veamos como se relacionan las matrices asociadas a f con respecto a las bases B_1, B_2 y B'_1, B'_2:

$$(x)^t F_{B_1B_2}(y) = (M_{B_1B'_1}(x'))^t F_{B_1B_2} M_{B_2B'_2}(y') = (x')^t (M_{B_1B'_1})^t F_{B_1B_2} M_{B_2B'_2}(y')$$

y por tanto:

$$\boxed{F_{B'_1B'_2} = (M_{B_1B'_1})^t F_{B_1B_2} M_{B_2B'_2}}$$

2 Formas bilineales sobre un solo espacio vectorial.

De especial interés son las formas bilineales sobre un mismo espacio vectorial, es decir apliciones bilineales de la forma:

$$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Estudiemos sus peculiaridades.

2.1 Expresión matricial y cambio de base.

Ahora para escribir su expresión matricial basta fijar una única base

$$B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$$

de U. Tendremos:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = (x)^t F_{BB}(y), \text{ donde } \begin{pmatrix} f(\bar{u}_1, \bar{u}_1) & f(\bar{u}_1, \bar{u}_2) & \ldots & f(\bar{u}_1, \bar{u}_n) \\ f(\bar{u}_2, \bar{u}_1) & f(\bar{u}_2, \bar{u}_2) & \ldots & f(\bar{u}_2, \bar{u}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\bar{u}_n, \bar{u}_1) & f(\bar{u}_n, \bar{u}_2) & \ldots & f(\bar{u}_n, \bar{u}_n) \end{pmatrix}$$

En este caso la matriz F_{BB} también puede denotarse por F_B o simplemente por F, si indicamos previamente en que base estamos trabajando.

Si tenemos otra base del espacio vectorial U:

$$B' = \{\bar{u}'_1, \ldots, \bar{u}'_n\}.$$

el cambio de base se escribe ahora como:

$$\boxed{F_{B'} = (M_{BB'})^t F_B M_{BB'}}$$

Como consecuencia de esto deducimos que:

Dos matrices asociadas a una misma forma bilineal sobre un espacio vectorial U son congruentes.

2.2 Espacio vectorial de formas bilineales en U.

Al conjunto de formas bilineales sobre un mismo espacio vectorial U lo denotamos por $Bil(U)$. Es fácil ver que es un espacio vectorial con las operaciones habituales de suma de funciones y producto por un escalar.

Veamos cual es su dimensión. Para ello construimos un isomorfismo entre $Bil(V)$ y $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Fijada una base B de U definimos:

$$\begin{array}{rccc} \pi: & Bil(U) & \longrightarrow & M_{n\times n}(\mathbb{K}) \\ & f & \longrightarrow & F_{BB} \end{array}$$

Esta aplicación verifica:

- Es lineal, ya que si $f, g \in Bil(U)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\bar{x}, \bar{y} \in U$ se tiene:

$$(\alpha f + \beta g)(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{y}) + \beta g(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(x)^t F(y) + \beta(x)^t G(y) = (x)^t(\alpha F + \beta G)(y)$$

y por tanto $\pi(\alpha f + \beta g) = \alpha\pi(f) + \beta\pi(g)$.

- Es inyectiva, ya que si dos formas bilineales tienen la misma matriz asociada, son la misma aplicación.

- Es sobreyectiva, ya que dada una matriz cuadrada A siempre podemos definir una forma bilineal cuya matriz asociada en la base B sea A:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = (x)^t A(y)$$

Por tanto $dim(Bil(V)) = dim(M_{n\times n}(\mathbb{K})) = n^2$.

2.3 Formas bilineales simétricas y hemisimétricas.

Definición 2.1 *Sea $f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Definimos:*

- f es **simétrica** *si $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x})$ para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in U$.*

- f es **hemisimétrica** *ó* **antisimétrica** *si $f(\bar{x}, \bar{y}) = -f(\bar{y}, \bar{x})$ para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in U$.*

Al conjunto de formas bilineales simétricas en U lo denotamos por $Bil_S(U)$.

Al conjunto de formas bilineales antisimétricas en U lo denotamos por $Bil_A(U)$.

Veamos algunas propiedades de este tipo de formas bilineales:

1. *Las formas bilineales simétricas son un subespacio vectorial de $Bil(U)$.*

   Prueba: En primer lugar $Bil_S(U) \neq \emptyset$ ya que la forma bilineal 0 es simétrica. Además si $f, g \in Bil_S(U)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\bar{x}, \bar{y} \in U$ se tiene:

   $$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(\bar{x}, \bar{y}) &= \alpha f(\bar{x}, \bar{y}) + \beta g(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha f(\bar{y}, \bar{x}) + \beta g(\bar{y}, \bar{x}) = \\ &= (\alpha f + \beta g)(\bar{y}, \bar{x}) \end{aligned}$$

   y por tanto $(\alpha f + \beta g) \in Bil_S(U)$.

2. *Las formas bilineales antisimétricas son un subespacio vectorial de $Bil(U)$.*

   Prueba: Como antes $Bil(U)_A \neq \emptyset$, porqu la forma bilineal 0 es antisimétrica. Además si $f, g \in Bil_A(U)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\bar{x}, \bar{y} \in U$ se tiene:

   $$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(\bar{x}, \bar{y}) &= \alpha f(\bar{x}, \bar{y}) + \beta g(\bar{x}, \bar{y}) = -\alpha f(\bar{y}, \bar{x}) - \beta g(\bar{y}, \bar{x}) = \\ &= -(\alpha f + \beta g)(\bar{y}, \bar{x}) \end{aligned}$$

   y por tanto $(\alpha f + \beta g) \in Bil_A(U)$.

3. *Los subespacios $Bil_S(U)$ y $Bil_A(U)$ son suplementarios.*

   Prueba: Se tiene:

   - $Bil_S(U) \cap Bil_A(U) = \{0\}$ ya que si una forma bilineal es simétrica y antisimétrica al mismo tiempo, cumple:

   $$f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x}) = -f(\bar{x}, \bar{y}) \quad \Rightarrow \quad f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

   para cualquier $\bar{x}, \bar{y} \in U$.

   - Cualquier forma bilineal f puede descomponerse como suma de una forma bilineal simétrica f_S y otra antisimétrica f_A, definidas como:

   $$\begin{aligned} f_S(\bar{x}, \bar{y}) &= \tfrac{1}{2}(f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{y}, \bar{x})) \\ f_A(\bar{x}, \bar{y}) &= \tfrac{1}{2}(f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{y}, \bar{x})) \end{aligned}$$

4. *Si f es una forma bilineal simétrica la matriz F asociada respecto a cualquier base de U, $B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ es simétrica.*

   Prueba: Para cualesquiera i, j con $1 \leq i, j \leq n$, se tiene:

   $$f_{ij} = f(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = f(\bar{u}_j, \bar{u}_i) = f_{ji}.$$

5. *Si f es una forma bilineal antisimétrica la matriz F asociada respecto a cualquier base de U, $B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ es antisimétrica.*

   Prueba: Para cualesquiera i, j con $1 \leq i, j \leq n$, se tiene:

   $$f_{ij} = f(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = -f(\bar{u}_j, \bar{u}_i) = -f_{ji}.$$

3 Formas cuadráticas.

3.1 Definición.

Definición 3.1 *Damos dos definiciones equivalentes:*

1. *Dado un espacio vectorial U y una forma bilineal simétrica $f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$, se llama* **forma cuadrática asociada a** f *a la aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} \omega : & U & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \bar{x} & \longrightarrow & f(\bar{x},\bar{x}) \end{array}$$

2. *Dado un espacio vectorial U una aplicación $\omega : U \longrightarrow \mathbb{K}$ es una* **forma cuadrática** *si cumple:*

   \- $\omega(\lambda\bar{x}) = \lambda^2\omega(\bar{x})$, *para cualesquiera* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\bar{x} \in U$.

   \- *La aplicación $g : U \times U \longrightarrow K$ definida como:*

$$g(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{2}(\omega(\bar{x}+\bar{y}) - \omega(\bar{x}) - \omega(\bar{y}))$$

   es bilineal y simétrica. A esta aplicación se le llama **forma polar**.

Veamos que efectivamente ambas definiciones son equivalentes:

1) $\Rightarrow$ 2). Si $f : U\times U \longrightarrow \mathbb{K}$ es una forma bilineal simétrica y ω su forma cuadrática asociada se tiene:

\- $\omega(\lambda\bar{x}) = f(\lambda\bar{x},\lambda\bar{x}) = \lambda^2 f(\bar{x},\bar{x}) = \lambda^2\omega(\bar{x})$.

\- Tomamos g definida como se indica:

$$\begin{array}{rl} g(\bar{x},\bar{y}) & = \frac{1}{2}(\omega(\bar{x}+\bar{y}) - \omega(\bar{x}) - \omega(\bar{y})) = \\ & = \frac{1}{2}(f(\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{x}) - f(\bar{y},\bar{y})) = \\ & = \frac{1}{2}(f(\bar{x},\bar{x}) + f(\bar{x},\bar{y}) + f(\bar{y},\bar{x}) + f(\bar{y},\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{x}) - f(\bar{y},\bar{y})) = \\ & = f(\bar{x},\bar{y}) \end{array}$$

Por tanto $g = f$ y es bilineal y simétrica.

2) $\Rightarrow$ 1) Ahora basta comprobar que la aplicación g es la forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada es ω:

$$\begin{array}{rl} g(\bar{x},\bar{x}) & = \frac{1}{2}(\omega(\bar{x}+\bar{x}) - \omega(\bar{x}) - \omega(\bar{x})) = \frac{1}{2}(\omega(2\bar{x}) - 2\omega(\bar{x})) = \\ & = \frac{1}{2}(4\omega(\bar{x}) - 2\omega(\bar{x})) = \omega(\bar{x}) \end{array}$$

Observación 3.2 *De la definición deducimos que dada un forma bilineal simétrica en U, tenemos una forma cuádratica y viceversa. Por tanto el conjunto de formas cuadráticas en U es un espacio vectorial isomorfo al espacio vectorial de formas bilineales simétricas $Bil_S(U)$.*

3.2 Expresión matricial y cambio de base.

Sea U un espacio vectorial y $B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ una base. Dada una forma cuadrática $\omega : U \longrightarrow K$ podemos considerar su forma polar asociada $f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$. La expresión matricial de f es:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = (x)^t F_B(y)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $\omega(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x})$, la expresión matricial de la forma cuadrática ω es:

$$\boxed{\omega(\bar{x}) = (x)^t F_B (x)}$$

La **matriz asociada a una forma cuadrática** respecto a una base B es por tanto la matriz asociada a la correspondiente forma polar. Observemos, que como f es una forma bilineal simétrica, la matriz F_B asociada a una forma cuadrática es una matriz simétrica.

Si ahora tenemos otra base $B' = \{\bar{u}'_1, \ldots, \bar{u}'_n\}$ de U, la relación entre las matrices asociadas a la forma cuadrática ω respecto a las bases B y B' es la misma que la relación entre las matrices asociadas a las correspondientes formas polares, es decir:

$$\boxed{F_{B'} = (M_{BB'})^t F_B M_{BB'}}$$

Como consecuencia de esto deducimos que:

Dos matrices asociadas a una misma forma cuadrática sobre un espacio vectorial U son congruentes.

Del hecho de que el rango de una matriz se conserve por congruencia, nos permite introducir la siguiente definición:

Definición 3.3 *Dada una forma cuadrática ω se define su* **rango** *como el rango de cualquier matriz asociada.*

3.3 Conjugación.

3.3.1 Vectores conjugados.

Definición 3.4 *Sea $\omega : U \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma cuadrática y f su forma polar. Dos vectores $\bar{x}, \bar{y} \in U$ se dicen* **conjugados** *respecto de ω ó f si:*

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Está claro que el vector nulo $\bar{0}$ es conjugado a todos los vectores del espacio vectorial:

$$f(\bar{x}, \bar{0}) = 0 \qquad \text{para cualquier } \bar{x} \in U.$$

Definición 3.5 *Dada $\omega : U \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma cuadrática, se dice que un vector $\bar{x} \in U$ es* **autoconjugado** *si está conjugado consigo mismo:*

$$\omega(\bar{x}) = 0$$

3.3.2 Subespacios conjugados.

Definición 3.6 *Sea $\omega : U \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma cuadrática. Sea A un subconjunto de U, se llama* **conjugado de** *A y se denota por $conj(A)$ al conjunto de todos los vectores conjugados respecto ω a todos los elementos de A:*

$$conj(A) = \{\bar{x} \in U |\, f(\bar{x}, \bar{a}) = 0 \ \textit{para todo } a \in A\}.$$

Veamos algunas propiedades del conjunto conjugado:

1. *El conjunto $conj(A)$ es un subespacio vectorial.*

   Prueba: Está claro que $\bar{0} \in conj(A)$, porque el vector nulo está conjugado con cualquier vector. Además sean $\bar{x}, \bar{y} \in conj(A)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces para cualquier $a \in A$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \bar{a}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{a}) + \beta f(\bar{y}, \bar{a}) & = & \bar{0} \\ & \uparrow & \\ \bar{x}, \bar{y} \in conj(A) \quad \Rightarrow & & f(\bar{x}, \bar{a}) = f(\bar{y}, \bar{a}) = 0 \end{array}$$

   Y por tanto $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in conj(A)$.

2. $A \subset B \qquad \Rightarrow \quad conj(B) \subset conj(A)$.

   Prueba:

$$\begin{array}{rl} \bar{x} \in conj(B) & \Rightarrow \quad f(\bar{x}, \bar{b}) = 0, \quad \forall \bar{b} \in B \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad f(\bar{x}, \bar{a}) = 0, \quad \forall \bar{a} \in A \subset B \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \in conj(A). \end{array}$$

3. $conj(A) = conj(\mathcal{L}(A))$.

   Prueba: Primero aplicamos la propiedad anterior:

$$A \subset \mathcal{L}(A) \quad \Rightarrow \quad conj(\mathcal{L}(A)) \subset conj(A).$$

   Veamos la otra inclusión. Sea $\bar{x} \in conj(A)$ e $\bar{y} \in \mathcal{L}(A)$. Entonces:

$$\bar{y} = \sum \alpha^i \bar{a}_i \text{ con } \alpha^i \in \mathbb{K}, \quad \bar{a}_i \in A.$$

   Por tanto:

$$\begin{array}{rcl} f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \sum \alpha^i \bar{a}_i) = \sum \alpha^i f(\bar{x}, \bar{a}_i) & = & 0 \\ & \uparrow & \\ \bar{x} \in conj(A), \bar{a}_i \in A \quad \Rightarrow & & f(\bar{x}, \bar{a}_i) = 0. \end{array}$$

   Deducimos que $\bar{x} \in conj(\mathcal{L}(A))$.

4. *El conjugado de un subespacio vectorial es el conjugado de un sistema generador del mismo.*

3.3.3 Núcleo de una forma cuadrática.

Definición 3.7 *Dada una forma cuadrática $\omega : U \longrightarrow \mathbb{K}$ definimos su* **núcleo** *como el conjunto de todos los vectores conjugados a todos los del espacio vectorial:*

$$ker(\omega) = \{\bar{x} \in U |\, f(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \forall \bar{y} \in U\} = conj(U)$$

donde f es la forma polar asociada a ω.

Veamos algunas propiedades del núclo:

1. *El núcleo es un subespacio vectorial.*

2. *Dada una base B de U:*

$$ker(\omega) = \{\bar{x} \in U |\, F_B(x) = (0)\}.$$

Prueba: Basta tener en cuenta que:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \forall \bar{y} \in U \iff (x)^t F_B(y) = 0, \quad \forall \bar{y} \in U \iff F_B(x) = (0).$$

3. *Todos los vectores del núcleo son autoconjugados.* **El recíproco no es cierto.**

4. $dim(ker(\omega)) = dim(U) - rango(\omega)$.

   Prueba: Se deduce si tenemos en cuenta que la dimensión de la solución de un sistema es la dimensión del espacio vectorial menos el número de ecuaciones independientes. Aplicando esto a:

$$ker(\omega) = \{\bar{x} \in U |\, F_B(x) = (0)\}$$

   se obtiene la relación indicada.

3.3.4 Formas cuadráticas ordinarias y degeneradas.

Definición 3.8 *Sea $\omega : U \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma cuadrática sobre un espacio vectorial U:*

- ω *se dice* **ordinaria** *ó* **no degenerada** $\iff ker(\omega) = \{\bar{0}\} \iff rango(\omega) = dim(U)$.

- ω *se dice* **degenerada** $\iff ker(\omega) \neq \{\bar{0}\} \iff rango(\omega) < dim(U)$.

3.4 Diagonalización de una forma cuadrática.

Definición 3.9 *Una forma cuadrática $\omega : U \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice* **diagonalizable** *si existe una base de U respecto a la cual la matriz asociada a ω es diagonal.*

Observación 3.10 *Si la matriz de una forma cuadrática $\omega : U \longrightarrow \mathbb{K}$ respecto a una base B es diagonal, entonces su expresión matricial es:*

$$\omega(\bar{x}) = (x)D\{x\} = d_{11}(x^1)^2 + d_{22}(x^2)^2 + \ldots + d_{nn}(x^n)^2$$

Por tanto diagonalizar es equivalente a obtener una expresión de la forma cuadrática como **suma de cuadrados.**

Definición 3.11 *Dada una forma cuadrática $\omega : U \longrightarrow \mathbb{K}$, se llama base de vectores conjugados a una base en la que cada vector está conjugado a todos los demás.*

Proposición 3.12 *Sea una forma cuadrática $\omega : U \longrightarrow \mathbb{K}$. Una base B es una base de vectores conjugados si y sólo si la matriz asociada F_B es diagonal.*

Prueba: Sea $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$. Recordemos que si f es la forma polar asociada a ω, la matriz asociada es:

$$(F_B)_{ij} = f(\bar{u}_i, \bar{u}_j)$$

Por tanto:

$$\begin{array}{lll} B \text{ base de vectores conjugados} & \Longleftrightarrow & f(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = 0, \quad \forall i \neq j \iff \\ & \Longleftrightarrow & (F_B)_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j \iff \\ & \Longleftrightarrow & (F_B) \text{ es diagonal.} \end{array}$$

■

Vimos que las matrices asociadas a las formas cuadráticas son simétricas. Además el cambio de base transforma una matriz asociada en otra congruente. Por tanto si F_B es una matriz asociada a w en cualquier base:

$$\omega \text{ diagonalizable} \iff F_B \text{ diagonalizable por congruencia}$$

Teniendo en cuenta que toda matriz simétrica es diagonalizable por congruencia deducimos el siguiente teorema:

Teorema 3.13 *Toda forma cuadrática es diagonalizable. Equivalentemente dada una forma cuadrática siempre existe una base de vectores conjugados.*

4 Formas cuadráticas reales.

4.1 Expresión canónica de una forma cuadrática.

Sea $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Sabemos que siempre es diagonalizable. En particular existe una base B en la que la matriz asociada es de la forma:

$$F_B = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & \Omega & \Omega \\ \hline \Omega & -I_q & \Omega \\ \hline \Omega & \Omega & \Omega \end{array}\right). \qquad (*)$$

Definición 4.1 *Se llama* **signatura de la forma cuadrática** ω *al par de números naturales* (p, q) *donde* p *indica el número de elementos positivos en su forma diagonal y* q *el número de elementos negativos:*

$$Sig(\omega) = (p, q).$$

Estos números cumplen $p + q = rango(\omega)$.

En el siguiente teorema, llamado **Ley de inercia de Sylvester** se prueba que la definición anterior es coherente, es decir, que los números (p, q) no dependen de la base en la que se diagonalice.

Teorema 4.2 (Ley de inercia de Sylvester) *La signatura de una forma cuadrática* $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *es un invariante, es decir, no depende de la base.*

Prueba: Supongamos que tenemos dos bases de U:

$$B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}, \qquad B' = \{\bar{u}'_1, \dots, u'_n\},$$

respecto a las cuales la matriz asociada a ω es diagonal (en la forma (*)).

Supongamos que la signaturas con respecto a las bases B, B' son respectivamente (p, q) y (p', q'). Sean:

$$\begin{array}{l} U_1 = \mathcal{L}\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p\} \\ U_2 = \mathcal{L}\{\bar{u}'_{p'+1}, \dots, \bar{u}'_n\} \end{array}$$

Si $\bar{x} \in U_1 \cap U_2$ es un vector no nulo se tiene:

$$\begin{array}{lcl} \bar{x} \in U_1 & \Rightarrow & \omega(\bar{x}) > 0 \\ \bar{x} \in U_2 & \Rightarrow & \omega(\bar{x}) \leq 0 \end{array}$$

luego, $U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\}$. En consecuencia:

$$dim(U_1) + dim(U_2) = dim(U_1 + U_2) + dim(U_1 \cap U_2) \quad \Rightarrow \quad p + (n - p') \leq n \quad \Rightarrow \quad p \leq p'$$

Si repetimos el razonamiento inviertiendo los papeles de p y p' obtenemos $p' \leq p$. Por tanto:

$$p = p' \quad \Rightarrow \quad q = n - p = n - p' = q'.$$

4.2 Clasificación de formas cuadráticas.

Definición 4.3 *Sea* $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *una forma cuadrática:*

- ω *es* **definida positiva** $\iff$ $\omega(\bar{x}) > 0, \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}.$

- ω *es* **semidefinida positiva** $\iff$ *No es definida positiva y* $\omega(\bar{x}) \geq 0, \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}.$

- ω *es* **definida negativa** $\iff$ $\omega(\bar{x}) < 0, \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}.$

- ω *es* **semidefinida negativa** $\iff$ *No es definida negativa y* $\omega(\bar{x}) \leq 0, \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}.$

- ω *es* **indefinida** $\iff$ $\exists \bar{x}, \bar{y} \neq 0$ *con* $\omega(\bar{x}) > 0, \quad \omega(\bar{y}) < 0.$

Todas estas definiciones pueden hacerse para matrices simétricas reales, si tenemos en cuenta que cualquier matriz simétrica real determina una forma cuadrática:

Definición 4.4 *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *una matriz simétrica real:*

- A *es* **definida positiva** $\iff$ *A es congruente con I.*

- A *es* **semidefinida positiva** $\iff$ *A es congruente con* $\left(\begin{array}{c|c} I & \Omega \\ \hline \Omega & \Omega \end{array}\right)$.

- A *es* **definida negativa** $\iff$ *A es congruente con $-I$.*

- A *es* **semidefinida negativa** $\iff$ *A es congruente con* $\left(\begin{array}{c|c} -I & \Omega \\ \hline \Omega & \Omega \end{array}\right)$.

- A *es* **indefinida** $\iff$ *A es congruente con* $\left(\begin{array}{c|c|c} I & \Omega & \Omega \\ \hline \Omega & -I & \Omega \\ \hline \Omega & \Omega & \Omega \end{array}\right)$.

Proposición 4.5 *Sea $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática en un espacio vectorial U n-dimensional.*

- ω *es* **definida positiva** $\iff$ $Sig(\omega) = (n, 0)$.

- ω *es* **semidefinida positiva** $\iff$ $Sig(\omega) = (p, 0)$ *con* $p < n$.

- ω *es* **definida negativa** $\iff$ $Sig(\omega) = (0, n)$.

- ω *es* **semidefinida negativa** $\iff$ $Sig(\omega) = (0, q)$ *con* $q < n$.

- ω *es* **indefinida** $\iff$ $Sig(\omega) = (p, q)$ *con* $p > 0$, $q > 0$.

Prueba: Es una comprobación inmediata si tenemos en cuenta que si $Sig(\omega) = (p, q)$ la expresión de ω respecto a una determinada base es:

$$\omega(\bar{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - (x^{p+2})^2 - \ldots - (x^{p+q})^2.$$

$\blacksquare$

Corolario 4.6 (Descripción de vectores autoconjugados.) *Sea $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática en un espacio vectorial U n-dimensional. Sea $Aut(\omega)$ el conjunto de vectores autconjugados. Entonces:*

1. *Si ω es definida positiva o definida negativa entonces $Aut(\omega) = \{\vec{0}\}$.*
2. *Si ω es semidefinida positiva o semidefinida negativa entonces $Aut(\omega) = ker(\omega)$.*
3. *Si ω es indefinida, entonces:*
   (a) *Si $rango(\omega) = 2$ entonces $Aut(\omega)$ se descompone como producto de dos hiperplanos que se intersecan en $ker(w)$.*
   (b) *Si $rango(\omega) > 2$ entonces $Aut(\omega)$ es una cuádrica que no puede descomponerse como producto de hiperplanos.*

Prueba: Recordemos que:

$$Aut(\omega) = \{\vec{u} \in U | \omega(\vec{u}) = 0\}.$$

Si la forma cuadrática es definida positiva (o negativa) entonces $\omega(\vec{u}) \neq 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$. Por tanto $Aut(\omega) = \{\vec{0}\}$.

Si la forma cuadrática es semidefinida positiva entonces en una determinada base B sabemos que la matriz asociada F_B es una matriz diagonal con $k = rango(w)$ unos en la diagonal y $n - rango(w)$ ceros. En tal base:

$$w((x_1, x_2, \ldots, x_n)_B) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2$$

siendo $k = rango(w)$.

Entonces:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_B \in Aut(\omega) \iff x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0.$$

Por otra parte un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$ pertence al núcleo si cumple:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_B F_B = (0, 0, \ldots, 0) \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$$

Vemos que efectivamente $Aut(\omega) = ker(\omega)$. De manera análoga se estudia el caso en el que la forma cuadrática es semidefinida negativa.

Finalmente si es indefinida, en la forma diagonalizada aparecen términos positivos y negativos en la diagonal:

- Si $rango(\omega) = 2$ entonces en una determinada base,

$$w((x_1, x_2, \ldots, x_n)_B) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Por tanto,

$$w((x_1, x_2, \ldots, x_n)_B) = 0 \iff x_1 - x_2 = 0 \text{ ó } x_1 + x_2 = 0$$

y vemos que efectivamente el conjunto de vectores autoconjugados es la unión de dos hiperplanos, uno determinado por la ecuación $x_1 - x_2 = 0$ y el otro por $x_1 + x_2 = 0$. Ademas el núcleo está formado por los vectores que cumple $x_1 = x_2 = 0$ que corresponde justo a la intersección de ambos hiperplanos.

- Si $rango(\omega) > 2$ entonces en una base B,

$$w((x_1, x_2, \ldots, x_n)_B) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$$

con $p, q > 1$ y $p + q > 2$ y no hay forma de descomponer ni simplificar la ecuación:

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 + x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 = 0.$$

■

Proposición 4.7 *Dos matrices congruentes tienen el determinante del mismo signo.*

Prueba: Si A y B son congruentes existe una matriz regular C con:

$$A = CBC^t \quad \Rightarrow \quad |A| = |C||B||C^t| = |C|^2|B| \quad \Rightarrow \quad signo(|A|) = signo(|B|).$$

■

Teorema 4.8 (Criterio de Sylvester) *Sea $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y F su matriz asociada respecto a una base $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$. Denotamos por:*

$$F_1 = (f_{11}), \quad F_2 = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}, \quad etc\dots$$

Entonces:

1. *ω es* **definida positiva** $\iff$ $|F_i| > 0$*, para todo $i = 1, \dots, n$.*
2. *ω es* **definida negativa** $\iff$ $(-1)^i |F_i| > 0$*, para todo $i = 1, \dots, n$.*

Prueba:

1. $\Longrightarrow$: Si ω es definida positiva en U, lo es en cualquier subespacio
$$U_i = \mathcal{L}\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i\}.$$
La matriz de la forma ω restringida a U_i es F_i. Por ser definida positiva F_i es congruente a Id y por tanto su determinante es positivo.

   $\Longleftarrow$: Supongamos que $|F_i| > 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Probaremos por inducción que ω es definida positiva:

   - Para $n = 1$ está claro.

   - Supongamos que el resultado es cierto para formas cuadráticas sobre espacios vectoriales de dimensión $\leq n-1$ y veamos que es cierto para dimensión n.

   Por hipótesis de inducción sabemos que ω es definida positiva en el subespacio vectorial $U_1 = \mathcal{L}\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}\}$. Por tanto existe una base B'_1 de U_1 respecto a la cual la matriz asociada a ω restringida a U_1 es la identidad. Consideramos la base:
$$B' = B'_1 \cup \{\bar{u}\}$$
La matriz asociada a ω respecto a esta base es:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & I & & \vdots \\ & & & a_{n-1} \\ \hline a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{array}\right)$$
Si diagonalizamos por congruencia obtenemos una matriz congruente a la matriz F de ω respecto a la base de partida:
$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & I & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & b \end{array}\right)$$
Como F y C son congruentes sus determinates tienen igual signo. Por tanto $|C| > 0$, $b > 0$ y la signatura de ω es $(n, 0)$. Por tanto ω es efectivamente definida positiva.

2. Para probar que ω es **definida negativa** $\iff$ $(-1)^i |F_i| > 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, tenemos en cuenta que:
$$\omega \text{ es definida negativa} \iff -\omega \text{ es definida positiva.}$$
Ahora basta aplicar el apartado anterior.