Álgebra Lineal II

TEMA III- Espacios afines.

Capítulo 1. El espacio afín.

Subvariedades afines.
Ecuaciones de rectas y planos.

Luis Fuentes García (2022).

Definición de subvariedad afín.

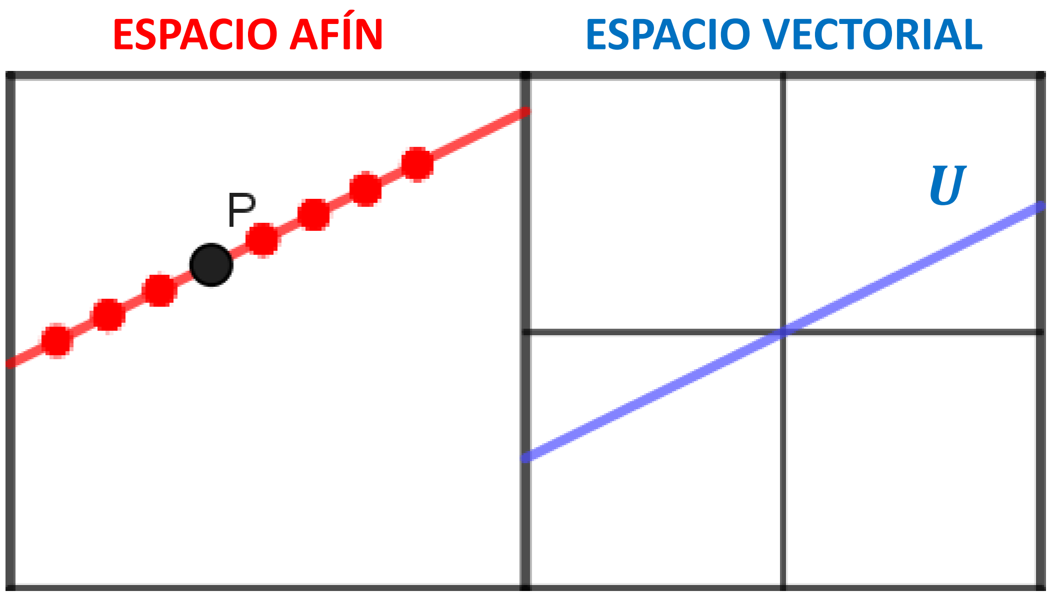
Partimos de un espacio afín euclídeo E asociado a un espacio vectorial V dotado de un **producto escalar.**

Idea: Adaptar el concepto de **subespacio vectorial** al contexto de un **espacio afín.**

Diferencia esencial:
- Un **subespacio vectorial** siempre **pasa por el origen**.
- Una **subvariedad afín NO** tiene **necesariamente que pasar por el origen**.

Definición. Dados $P \in E$ **punto**, $U \subset V$ **subespacio** se define la **subvariedad afín** que pasa por P y tiene por **dirección** el U como

$$P + U = \{P + \vec{u} \mid \vec{u} \in U\}$$



Dimensión de una subvariedad afín:

$$dim(\text{subvariedad}) = dim(\text{dirección})$$

$$\boxed{dim(P + U) = dim(U)}$$

$dim = 0$ **Punto**

$dim = 1$ **Recta**

$dim = 2$ **Plano**

$dim = dim(E) - 1$ **Hiperplano**

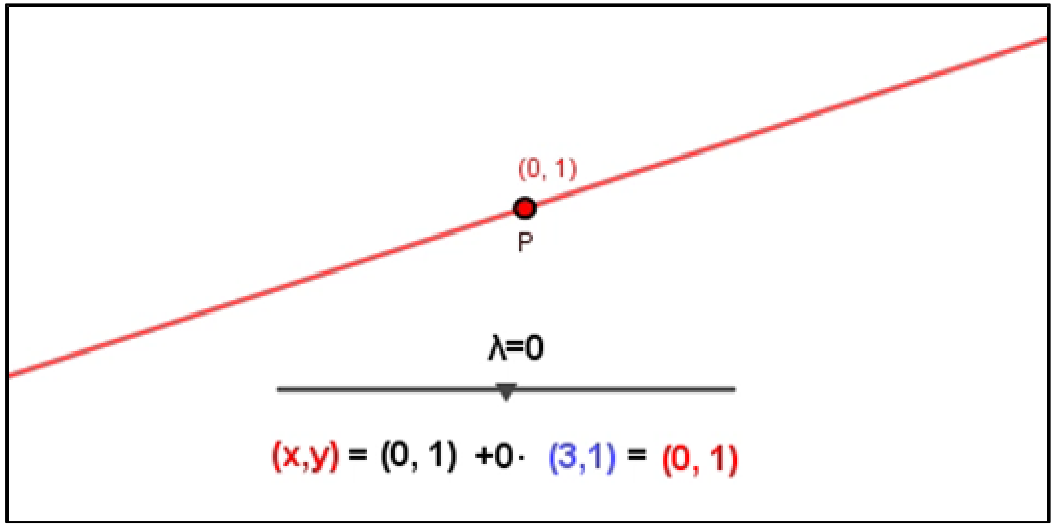
Diferencia entre ecuaciones paramétricas e implícitas.

Idea: Las **ecuaciones** de un **objeto geométrico** nos permiten **manipularlo** y **estudiarlo** **algebraicamente**.

Ecuaciones paramétricas.

Obtenemos **puntos del objeto** dando **valores** a uno o varios **parámetros**.

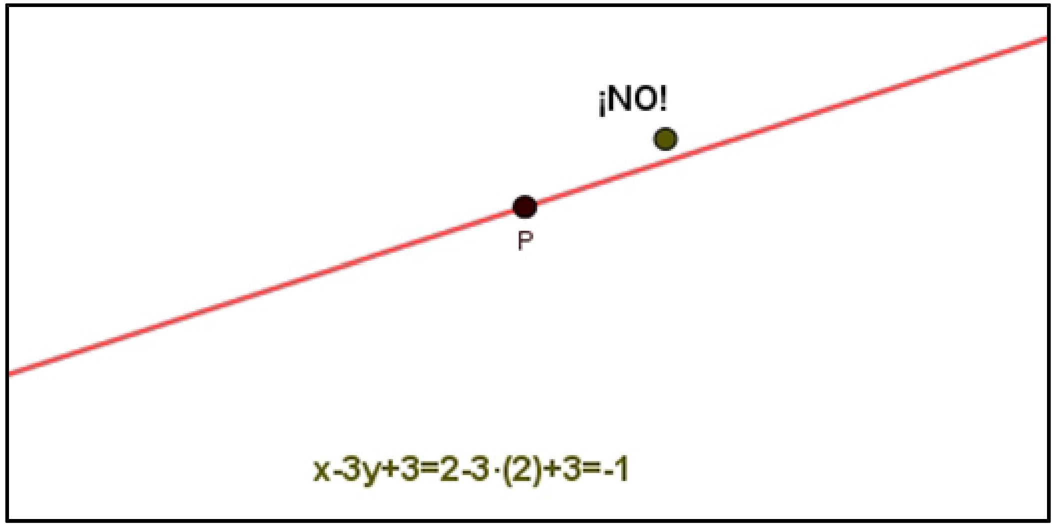
PARAMÉTRICA: $(x, y) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) + \boldsymbol{\lambda}(3, 1)$



Ecuaciones implícitas.

Son un **criterio** para decidir si un **punto pertenece o no** al **objeto** geométrico.

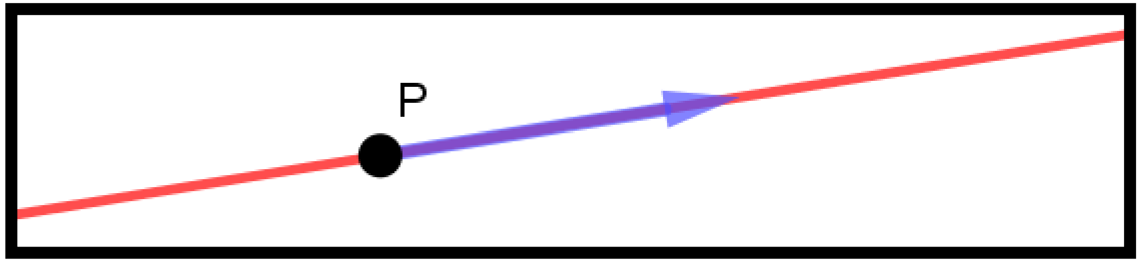
IMPLÍCITAS: $\boldsymbol{x - 3y + 3 = 0}$



Ecuaciones de una recta en el plano.

Fijamos una **referencia** $R = \{O; \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2}_{B}\}$ en R^2

Datos: $\begin{cases} U = L\{\vec{u}\} \subset R^2, \vec{u} = (p,q)_B & \text{vector director} \\ P = (x_0, y_0)_R & \text{punto} \end{cases}$



ECUACIONES de tipo PARAMÉTRICO

Ecuación vectorial. $(x,y) = (x_0, y_0) + \lambda(p,q)$

Separando coordenadas

Ecuaciones paramétricas $\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda p \\ y &= y_0 + \lambda q \end{aligned}$

Despejar el parámetro e igualar $\lambda = \dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q}$

ECUACIONES de tipo IMPLÍCITO

Ecuación continua. $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q}$

PUNTO

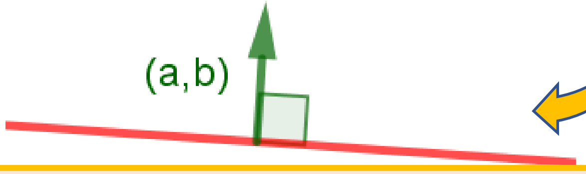
VECTOR DIRECTOR

Quitar denominadores y simplificar

$qx - x_0 q = py - py_0 \Rightarrow \underbrace{q}_{a} x \underbrace{-p}_{b} y \underbrace{- x_0 q + p y_0}_{c} = 0$

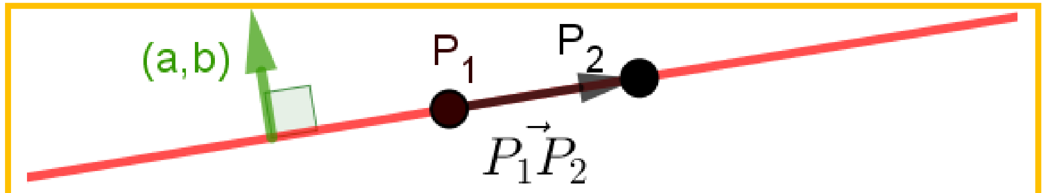
Ecuación cartesiana.

$ax + by + c = 0$



(a,b) vector NORMAL

¡OJO!. Sólo si B es ortonormal

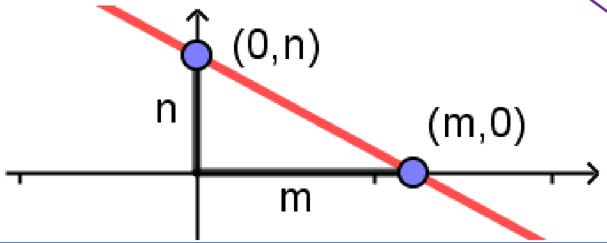


$$\begin{aligned} P_2 = (x_2, y_2) &\Rightarrow \quad a x_2 + b y_2 + c = 0 \\ P_1 = (x_1, y_1) &\Rightarrow \quad a x_1 + b y_1 + c = 0 \quad - \\ \hline & a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \end{aligned}$$

$$(a,b) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow (a,b) \perp \overrightarrow{P_1 P_2}$$

Ecuación canónica.

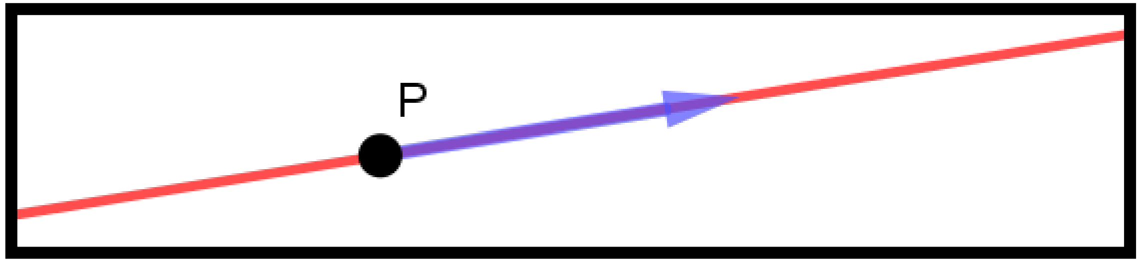
$\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1$



Ecuaciones de una recta en el plano.

Fijamos una **referencia** $\boldsymbol{R} = \{\boldsymbol{O}; \underbrace{\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2}_{\boldsymbol{B}}\}$ en $\boldsymbol{R}^2$

Datos: $\begin{cases} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}\{\vec{u}\} \subset R^2, \vec{u} = (p,q)_B & \text{vector director} \\ \boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})_{\boldsymbol{R}} & \text{punto} \end{cases}$



ECUACIONES de tipo PARAMÉTRICO

Ecuación vectorial. $$(x,y) = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

Ecuaciones paramétricas $$\begin{aligned} x &= \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\lambda p} \\ y &= \boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{\lambda q} \end{aligned}$$

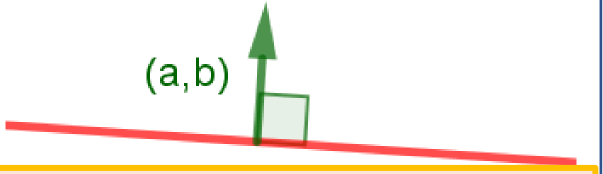
ECUACIONES de tipo IMPLÍCITO

Ecuación continua. $$\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{q}}$$

Ecuación cartesiana.

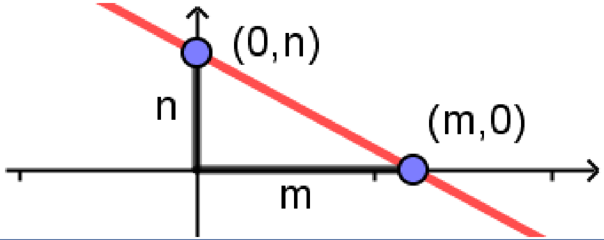
$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

(a,b) vector NORMAL — **¡OJO!. Sólo si B es ortonormal**



Ecuación canónica.

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{m}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{1}$$



En todas las ecuaciones:

- **Parte vectorial**: Son las **ecuaciones** que manejábamos para **subespacios vectoriales**.

- **Parte afín**. Aparecen unos **factores sumados** que reflejan el **desplazamiento** de los **vectores** que podemos hacer a cualquier **punto**.

Ejemplo 1: Recta en el plano conocido punto y vector director.

Referencia canónica $R_c = \{(0,0); (1,0),(0,1)\}$ en R^2

Producto escalar usual.

ECUACIONES de tipo PARAMÉTRICO

Ecuación vectorial. $(x,y) = (x_0, y_0) + \lambda(p,q)$

Ecuaciones paramétricas
$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda p \\ y &= y_0 + \lambda q \end{aligned}$$

ECUACIONES de tipo IMPLÍCITO

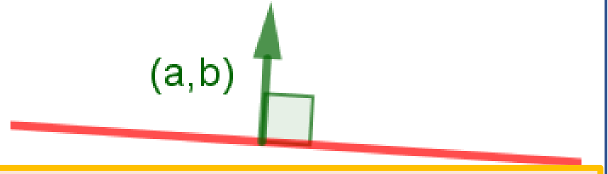
Ecuación continua.
$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}$$

PUNTO

VECTOR DIRETOR

Ecuación cartesiana.

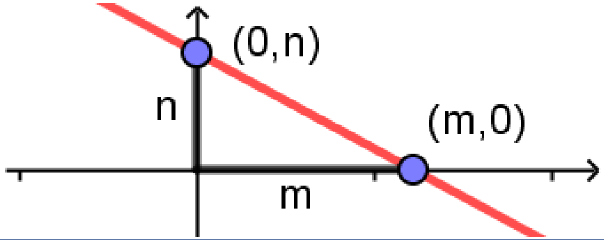
$$ax + by + c = 0$$



(a,b) vector NORMAL

¡OJO!. Sólo si B es ortonormal

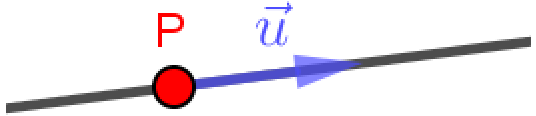
Ecuación canónica.
$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$



EJEMPLO 1. Conocido punto y vector director.

$P = (3,-1)$ PUNTO

$\vec{u} = (2,3)$ vector director



Ecuación vectorial. $\boxed{(x,y) = (3,-1) + \lambda(2,3)}$

Ecuaciones paramétricas
$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3 + 2\lambda \\ y &= -1 + 3\lambda \end{aligned}}$$

Ecuación continua.
$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-(-1)}{3} \Leftrightarrow \boxed{\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3}}$$

Ecuación cartesiana.
$$3(x-3) = 2(y+1)$$
$$3x - 9 = 2y + 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{3x - 2y - 11 = 0}$$

VECTOR NORMAL: $(3,-2)$

Ejemplo 2: Recta en el plano conocido punto y vector normal.

Referencia canónica $R_c = \{(0,0); (1,0), (0,1)\}$ en R^2

Producto escalar usual.

ECUACIONES de tipo PARAMÉTRICO

Ecuación vectorial. $(x,y) = (x_0, y_0) + \lambda(p,q)$

Ecuaciones paramétricas
$$x = x_0 + \lambda p$$
$$y = y_0 + \lambda q$$

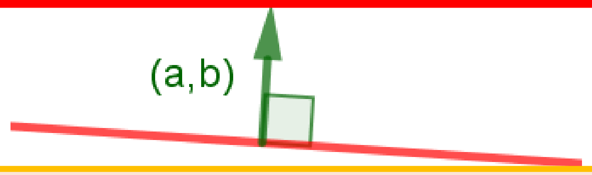
ECUACIONES de tipo IMPLÍCITO

Ecuación continua. $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q}$ PUNTO

VECTOR DIRECTOR

Ecuación cartesiana.

$$ax + by + c = 0$$

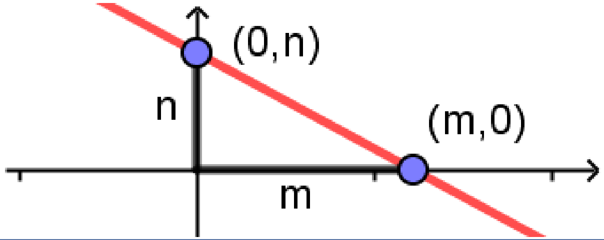


(a,b) vector NORMAL

¡OJO!. Sólo si B es ortonormal

Ecuación canónica.

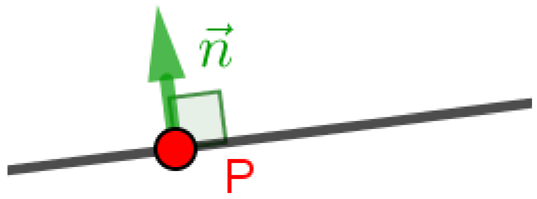
$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$



EJEMPLO 2. Conocido punto y vector normal.

$P = (1,3)$ PUNTO

$\vec{n} = (2,1)$ vector normal



Ecuación cartesiana.

$2x + 1y + c = 0$? Imponemos que pase por $P = (1,3)$

$2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -5$

$$\boxed{2x + y - 5 = 0}$$

Ecuaciones paramétricas

$2x + y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 5 - 2x$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0 + 1\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{array}$$

$P' = (0,5)$ PUNTO

$\vec{u} = (1,-2)$ vector director

Ejemplo 3: Recta en el plano por dos puntos.

Referencia canónica $R_c = \{(0,0); (1,0), (0,1)\}$ en R^2
Producto escalar usual.

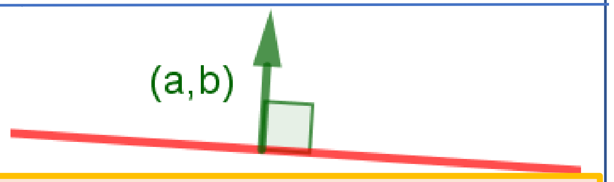
ECUACIONES de tipo PARAMÉTRICO

Ecuación vectorial. $(x,y) = (x_0, y_0) + \lambda(p,q)$

Ecuaciones paramétricas
$$x = x_0 + \lambda p$$
$$y = y_0 + \lambda q$$

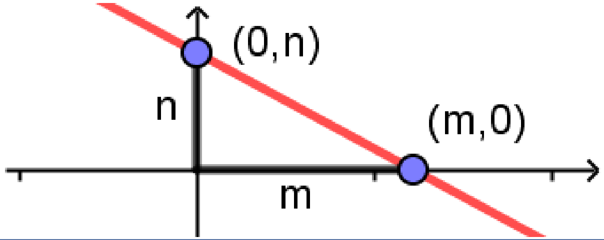
ECUACIONES de tipo IMPLÍCITO

Ecuación continua.
$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}$$
PUNTO
VECTOR DIRETOR

Ecuación cartesiana.
$$ax + by + c = 0$$


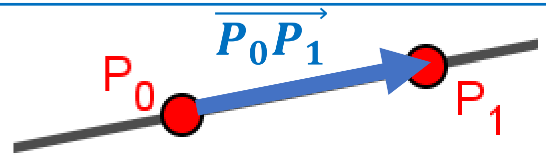
(a,b) vector NORMAL

¡OJO!. Sólo si B es ortonormal

Ecuación canónica.
$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$


EJEMPLO 3. Conocidos dos puntos.

$P_0 = (3,-1)$ PUNTO
$P_1 = (5,2)$ PUNTO



$$\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (5,2) - (3,-1) = (2,3)$$

Ecuación vectorial. $(x,y) = (3,-1) + \lambda(2,3)$

Ecuaciones paramétricas
$$x = 3 + 2\lambda$$
$$y = -1 + 3\lambda$$

Ecuación continua.
$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-(-1)}{3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3}$$

Ecuación cartesiana. $3x - 2y - 11 = 0$

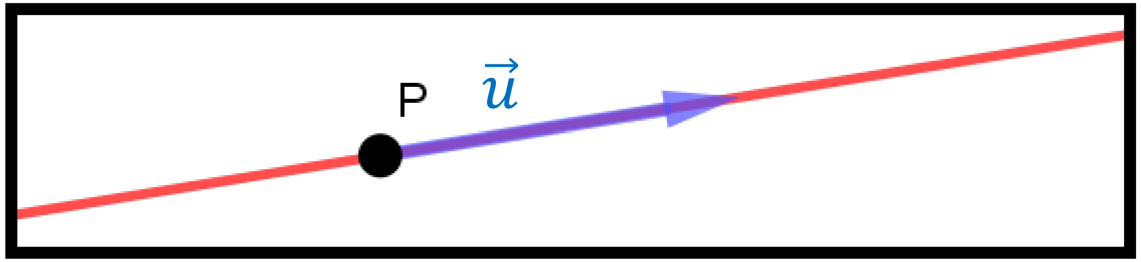
Recta por DOS PUNTOS.
$P_0 = (x_0, y_0)$
$P_1 = (x_1, y_1)$
$\overrightarrow{P_0P_1}$
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Ecuaciones de una recta en el espacio.

Fijamos una referencia $\boldsymbol{R} = \{O; \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3}_{B}\}$ en R^3

$U = L\{\vec{u}\} \subset R^3, \vec{u} = (p, q, r)_B$ **vector director**

$P = (x_0, y_0, z_0)_R \in R^3$ **punto**



ECUACIONES de tipo PARAMÉTRICO

Ecuación vectorial. $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(p, q, r)$

Separar coordenadas

Ecuaciones paramétricas $\boxed{x = x_0 + \lambda p}$ $\boxed{y = y_0 + \lambda q}$ $\boxed{z = z_0 + \lambda r}$

Despejar el parámetro e igualar.

ECUACIONES de tipo IMPLÍCITO

Ecuación continua. $\boxed{\dfrac{x - x_0}{p}} = \boxed{\dfrac{y - y_0}{q}} = \boxed{\dfrac{z - z_0}{r}}$

Quitar denominadores y simplificar

Por dos puntos.

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Ecuaciones cartesianas.

$ax + by + cz + d = 0$

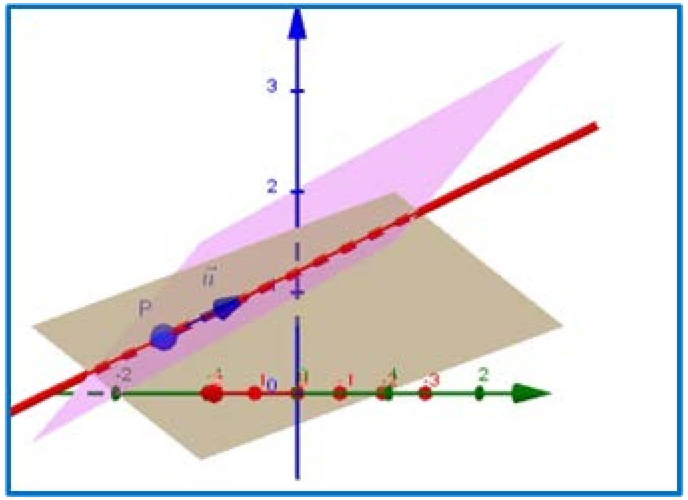
$a'x + b'y + c'z + d' = 0$

DOS ecuaciones implícitas

$\boxed{\text{NºEc=dim(E)-dim(subvariedad)}}$

NºEc=dim(R^3)-dim(recta)=3-1=2

Intersección de dos planos



Ejemplo 4. Recta en el espacio por dos puntos.

Canónica $\boldsymbol{R_c} = \{(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}); (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}), (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0}), (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})\}$ en R^3

Producto escalar usual.

ECUACIONES de tipo PARAMÉTRICO

Ecuación vectorial. $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0)+\lambda(p,q,r)$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda p \\ y &= y_0 + \lambda q \\ z &= z_0 + \lambda r \end{aligned}$$

ECUACIONES de tipo IMPLÍCITO

Ecuación continua.

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$$

Por dos puntos.

$P_0 = (x_0,y_0,z_0)$

$P_1 = (x_1,y_1,z_1)$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Ecuaciones cartesianas.

$$ax+by+cz+d=0$$
$$a'x+b'y+c'z+d'=0$$

DOS ecuaciones implícitas

NºEc=dim(E)-dim(**subvariedad**)

NºEc=dim(R^3)-dim(**recta**)=3-1=2

EJEMPLO. Recta conocidos dos puntos.

$P_0 = (2,1,0)$ **PUNTO**

$P_1 = (3,1,1)$ **PUNTO**

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (3,1,1) - (2,1,0) = (1,0,1)$$

Ecuación vectorial. $\boxed{(x,y,z) = (2,1,0)+\lambda(1,0,1)}$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 2 + 1\cdot\lambda \\ y &= 1 + 0\cdot\lambda \\ z &= 0 + 1\cdot\lambda \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 2+\lambda \\ y &= 1 \\ z &= \lambda \end{aligned}}$$

Ecuación continua.

¡OJO!

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z-0}{1-0} \Rightarrow \boxed{\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}}$$

$$y-1=0$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow x-2 = z \Rightarrow$$

Ec. cartesianas

$$\begin{aligned} y-1&=0 \\ x-z-2&=0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de un plano en el espacio.

Fijamos una referencia $\boldsymbol{R} = \{O; \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3}_{B}\}$ en R^3

Punto: $P = (x_0, y_0, z_0)_R$

Vectores directores: $U = L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ $\begin{cases} \vec{v}_1 = (p_1, q_1, r_1)_B \\ \vec{v}_2 = (p_2, q_2, r_2)_B \end{cases}$

ECUACIONES de tipo PARAMÉTRICO

Ecuación vectorial.

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(p_1, q_1, r_1) + \mu(p_2, q_2, r_2)$$

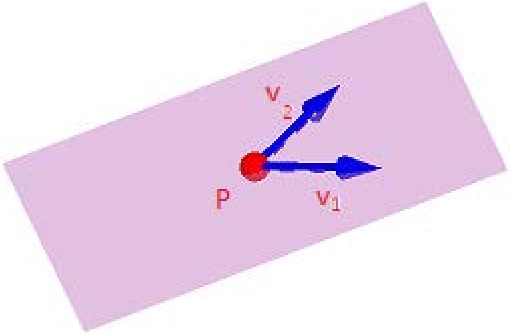
Ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda p_1 + \mu p_2 \\ y &= y_0 + \lambda q_1 + \mu q_2 \\ z &= z_0 + \lambda r_1 + \mu r_2 \end{aligned}$$

Separar coordenadas

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \lambda p_1 + \mu p_2 \\ y - y_0 &= \lambda q_1 + \mu q_2 \\ z - z_0 &= \lambda r_1 + \mu r_2 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{P_0Q}$ $\quad \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2$



ECUACIONES de tipo IMPLÍCITO

Ecuación cartesiana.

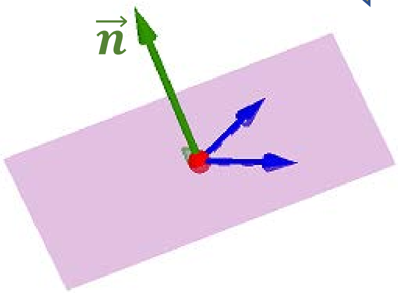
$$\left| \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

$\vec{n} = (a, b, c)$= vector NORMAL

¡OJO!. Sólo si B es ortonormal



Ecuación por tres puntos.

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)_R$

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)_R$

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)_R$

$\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}$

$\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_0P_2}$

$$\left| \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Ecuaciones de un plano en el espacio.

Fijamos una referencia $\boldsymbol{R} = \{O; \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3}_{B}\}$ en R^3

Punto: $P = (x_0, y_0, z_0)_R$

Vectores directores: $U = L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ $\quad \vec{v}_1 = (p_1, q_1, r_1)_B \quad \vec{v}_2 = (p_2, q_2, r_2)_B$

ECUACIONES de tipo PARAMÉTRICO

Ecuación vectorial.

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(p_1, q_1, r_1) + \mu(p_2, q_2, r_2)$$

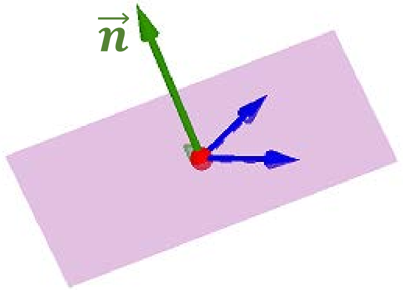
Ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda p_1 + \mu p_2 \\ y &= y_0 + \lambda q_1 + \mu q_2 \\ z &= z_0 + \lambda r_1 + \mu r_2 \end{aligned}$$

ECUACIONES de tipo IMPLÍCITO

Ecuación cartesiana.

$$\left|\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix}\right| = 0$$



$$\Updownarrow$$

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

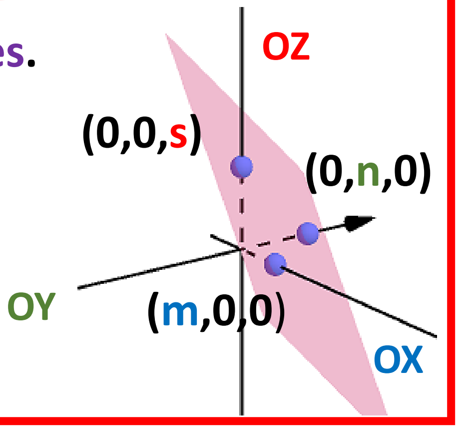
$\vec{n} = (a, b, c)$= vector NORMAL

¡OJO!. Sólo si B es ortonormal

Ecuación canónica.

Dados los puntos de corte con los ejes.

$$\boxed{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{s} = 1}$$



Ecuación puntos. por tres

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)_R \qquad \vec{v}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}$

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)_R \qquad \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_0P_2}$

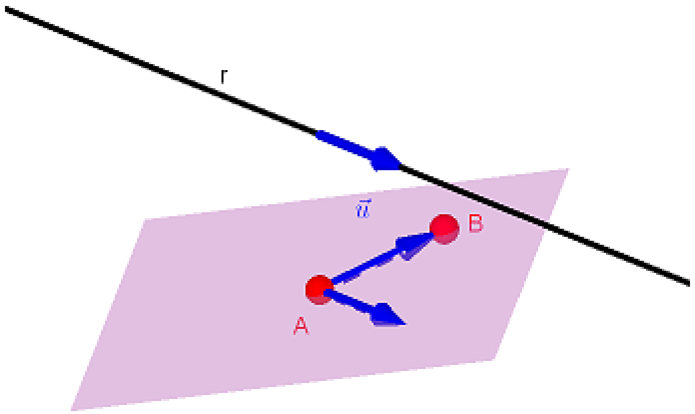
$P_2 = (x_2, y_2, z_2)_R$

$$\left|\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix}\right| = 0$$

Ejemplo: plano paralelo a una recta y pasando por dos puntos dados.

Canónica $\boldsymbol{R_c} = \{(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}); (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}), (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0}), (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})\}$ en R^3. **Producto escalar usual.**

Plano que pasa por $\boldsymbol{A} = (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}), \boldsymbol{B} = (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0})$ y es paralelo a la recta r de ecuaciones: $\begin{cases} \boldsymbol{x - y - 1 = 0} \\ \boldsymbol{2x - 3z + 4 = 0} \end{cases}$



1) $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0}) - (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}) = (-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})$

$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})}$

2) r≡ $\begin{cases} \boldsymbol{x - y - 1 = 0} \\ \boldsymbol{2x - 3z + 4 = 0} \end{cases}$

Hallar paramétricas resolviendo el sistema.

$$\boldsymbol{x = y + 1}$$

$$\boldsymbol{z = \frac{2x+4}{3} = \frac{2(y+1)+4}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + \mu} \\ \boldsymbol{y = \mu} \\ \boldsymbol{z = 2 + \frac{2}{3}\mu} \end{cases}$$

$\vec{\boldsymbol{u}} = \left(\mathbf{1},\mathbf{1},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$

x 3

$\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{2})}$

PLANTEAMIENTO.

1) Vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ del plano.

2) Vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ director de recta **r.**

3) Plano: punto **A** y dos vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \vec{\boldsymbol{u}}$.

3) Plano conocido un punto y dos vectores: A, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \vec{\boldsymbol{u}}$

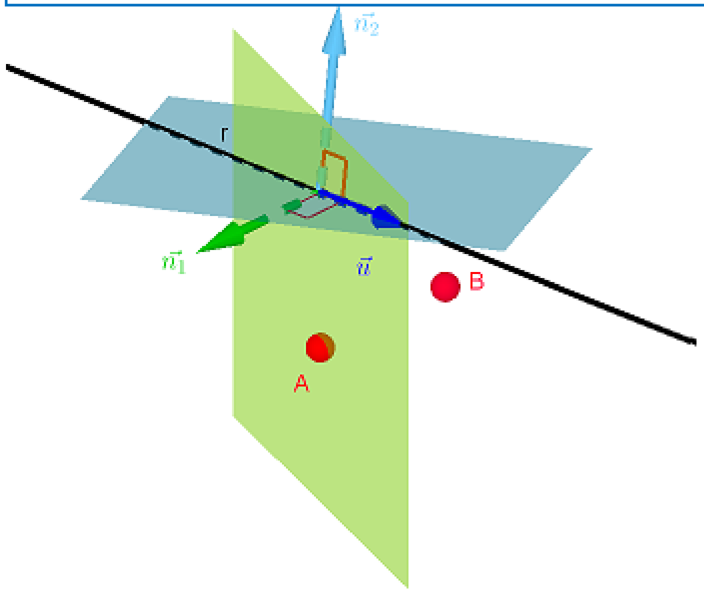
$$\left|\begin{pmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right| = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{2x + 2y - 6z - 2 = 0}$$

$\boxed{\boldsymbol{x + y - 3z - 1 = 0}}$

Ejemplo: plano paralelo a una recta y pasando por dos puntos dados.

Canónica $\boldsymbol{R_c} = \{(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}); (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})\}$ en R^3. **Producto escalar usual.**

Plano que pasa por $\boldsymbol{A} = (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}), \boldsymbol{B} = (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0})$ y es paralelo a la recta r de ecuaciones: $\begin{cases} \boldsymbol{x - y - 1 = 0} \\ \boldsymbol{2x - 3z + 4 = 0} \end{cases}$



1) $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0}) - (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}) = (-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})$

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})}$$

2) r≡ $\begin{cases} \boldsymbol{x - y - 1 = 0} & \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} = (\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{2x - 3z + 4 = 0} & \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = (\mathbf{2},\mathbf{0},-\mathbf{3}) \end{cases}$

Hallar $\vec{\boldsymbol{u}}$ como **p.vectorial** de los vectores normales de los **planos** que contienen a **r.**

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = \left\|\begin{matrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_2 & \vec{\boldsymbol{e}}_3 \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & -\mathbf{3} \end{matrix}\right\| = \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{e}}_3$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{2})}$$

PLANTEAMIENTO.

1) Vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ del plano.

2) Vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ director de recta **r.**

3) **Plano**: punto **A** y dos vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \vec{\boldsymbol{u}}$.

3) Plano conocido un punto y dos vectores: A, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \vec{\boldsymbol{u}}$

$$\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{x - 1} & \mathbf{y - 0} & \boldsymbol{z - 0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{2x + 2y - 6z - 2 = 0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x + y - 3z - 1 = 0}}$$