Álgebra Lineal II

TEMA II- Espacios vectoriales euclídeos.

Capítulo 2. Ortogonalidad.

Subespacios ortogonales. Suplementario ortogonal. Proyecciones ortogonales.

Luis Fuentes García (2022).

Subespacios ortogonales.

Trabajaremos en un Espacio vectorial euclídeo = Espacio vectorial U + <u>producto escalar</u>

<u>Definición</u>. Dos subespacios $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$ se dicen **ortogonales** y se denota por $\boldsymbol{S} \perp \boldsymbol{T}$ si:

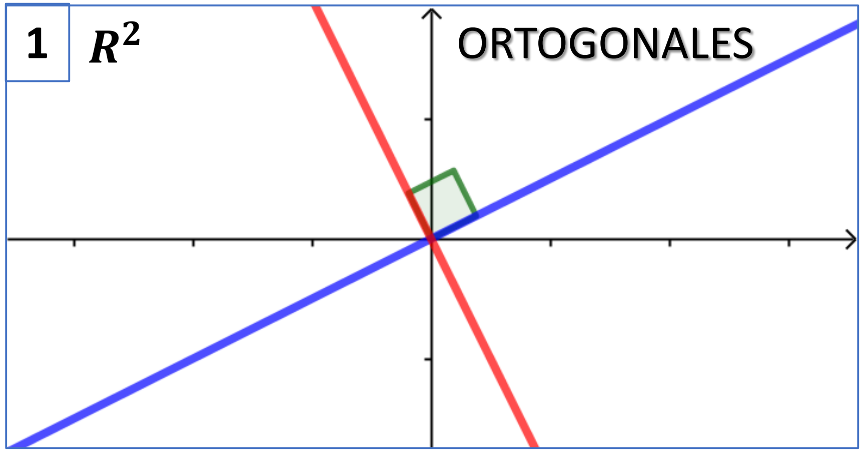
todo vector de S es **ortogonal** a **todo vector** de $\boldsymbol{T}$	$\forall \vec{u} \in \boldsymbol{S} \quad \forall \vec{v} \in \boldsymbol{T} \qquad \vec{u} \perp \vec{v} \qquad (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$

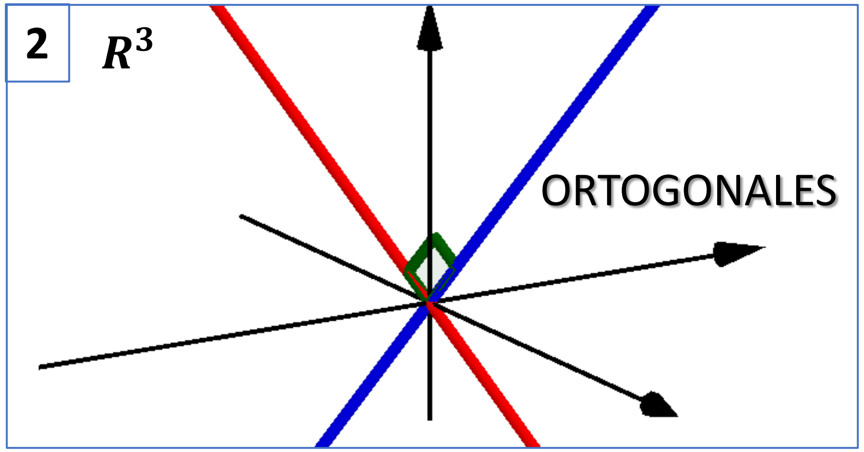
<u>Ejemplos.</u>

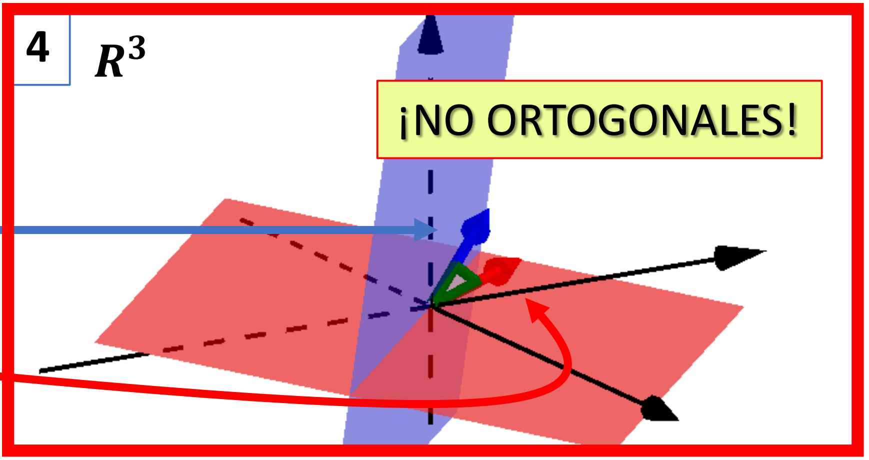
Con el **producto escalar usual.**

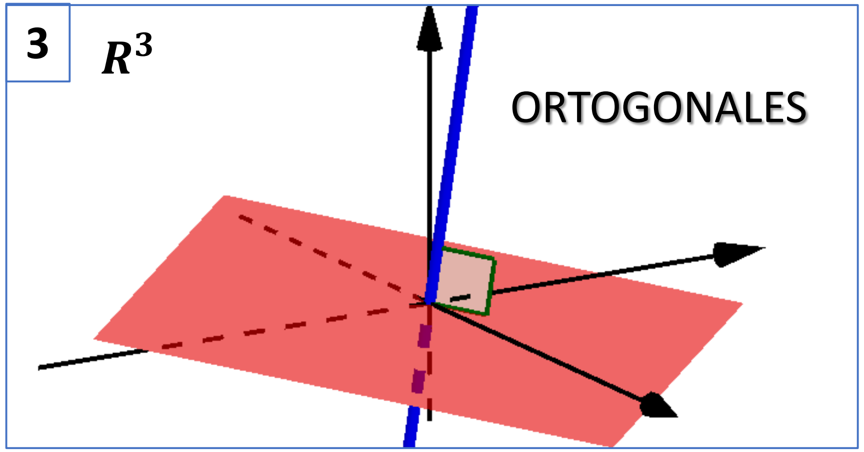
En el **plano R^2**.

En el **espacio R^3**.









¡OJO!. **NO** SON **ORTOGONALES**.

Hay **vectores** en uno de ellos que **NO** son **ortogonales** a **vectores** del **otro**.

Subespacios ortogonales.

Trabajaremos en un Espacio vectorial euclídeo = Espacio vectorial U + producto escalar

Definición. Dos subespacios S, T se dicen **ortogonales** y se denota por $S \perp T$ si:

todo vector de S es ortogonal a todo vector de T

$$\forall \vec{u} \in S \quad \forall \vec{v} \in T \qquad \vec{u} \perp \vec{v} \qquad (\, \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \,)$$

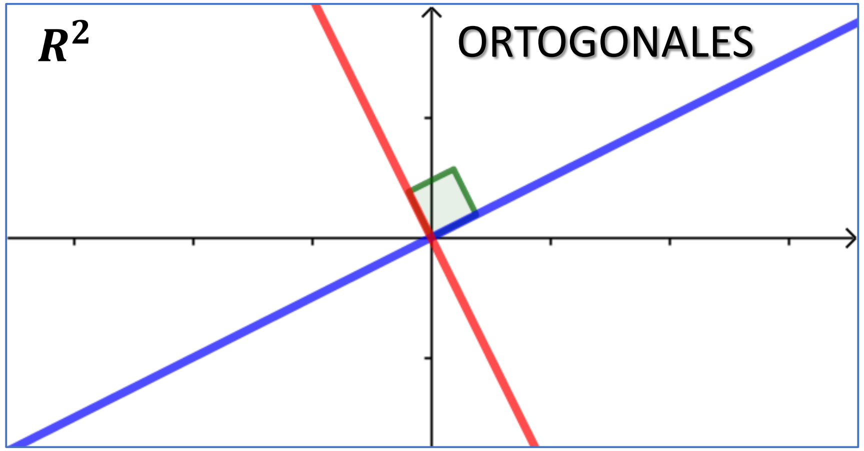
Propiedad.

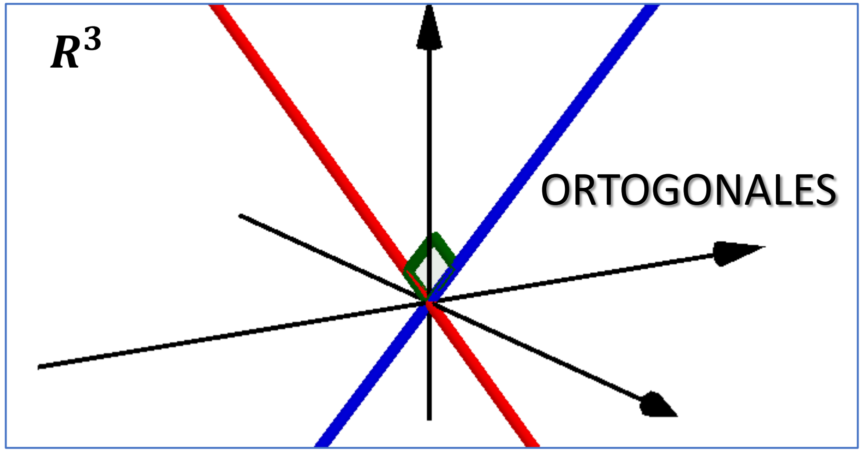
$$S \perp T \quad \Rightarrow \quad S \cap T = \{\vec{0}\}$$

Prueba:

$$\vec{u} \in S \cap T \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{u} \in S \\ y \\ \vec{u} \in T \end{cases}$$

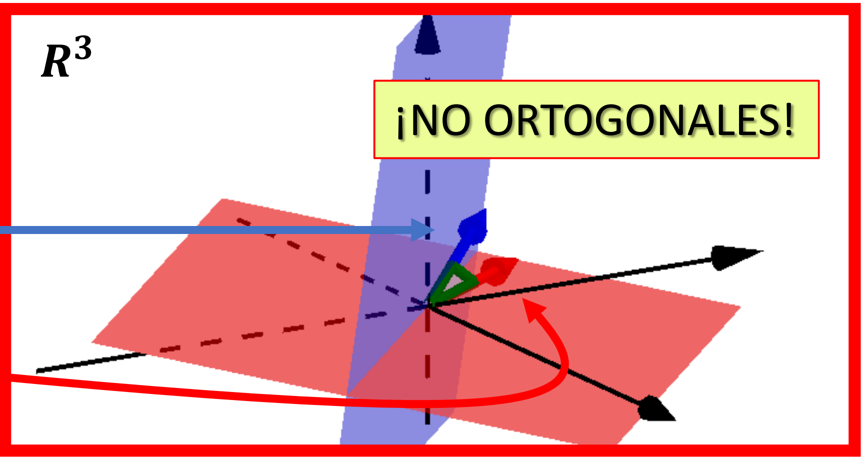
$$\Rightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{u} = \vec{0}}$$

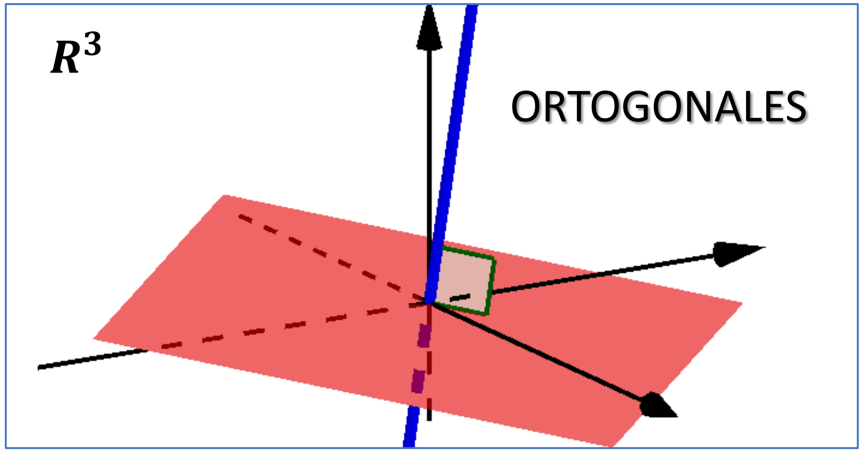




¡OJO!. **NO** SON **ORTOGONALES**.

Hay **vectores** en uno de ellos que **NO** son **ortogonales** a **vectores** del **otro**.





Subespacios ortogonales.

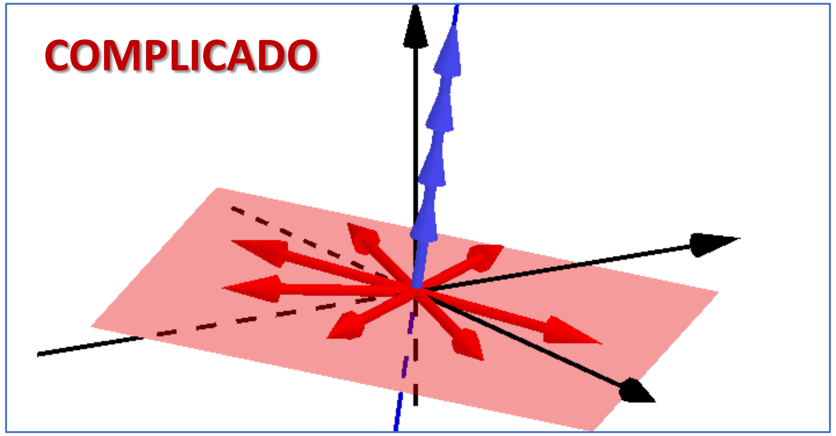
Trabajaremos en un Espacio vectorial euclídeo = Espacio vectorial U + producto escalar

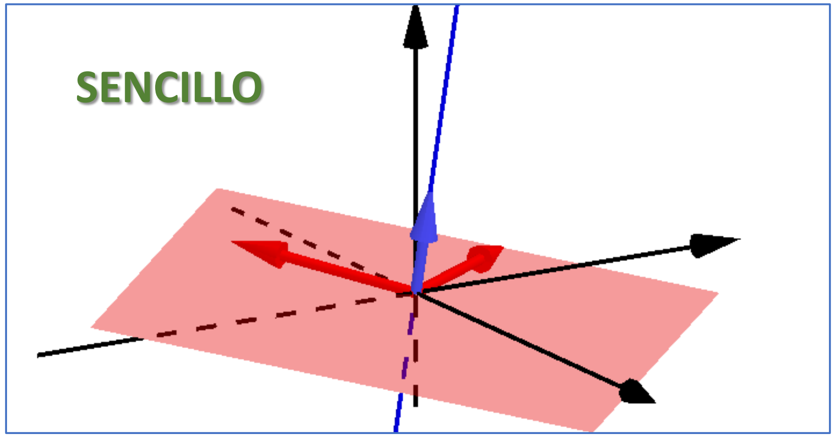
Definición. Dos subespacios S, T se dicen **ortogonales** y se denota por $S \perp T$ si:

todo vector de S es ortogonal a todo vector de T $\qquad \forall \vec{u} \in S \quad \forall \vec{v} \in T \qquad \vec{u} \perp \vec{v} \qquad (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$

Propiedad.

Si $\begin{cases} S = L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\} \\ T = L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\} \end{cases}$ entonces $S \perp T \iff \vec{u}_i \perp \vec{v}_j, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix}$





Prueba:

$\Rightarrow$ Suponemos que $S \perp T \qquad \vec{u}_i \in S \quad \vec{v}_j \in T \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_i \perp \vec{v}_j$

$\Leftarrow$ Suponemos que $\vec{u}_i \perp \vec{v}_j, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q$

$$\vec{u} \in S \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_p\vec{u}_p = \sum_{i=1}^{p} a_i\vec{u}_i$$

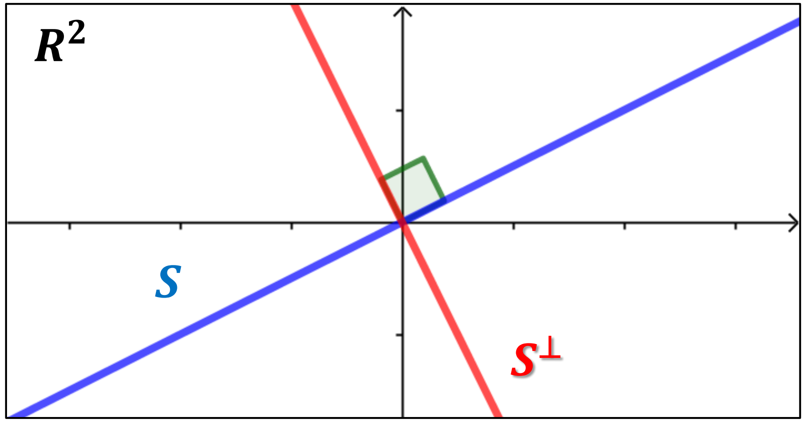
$$\vec{v} \in T \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_1\vec{v}_2 + \cdots + b_q\vec{v}_q = \sum_{j=1}^{q} b_j\vec{v}_j$$

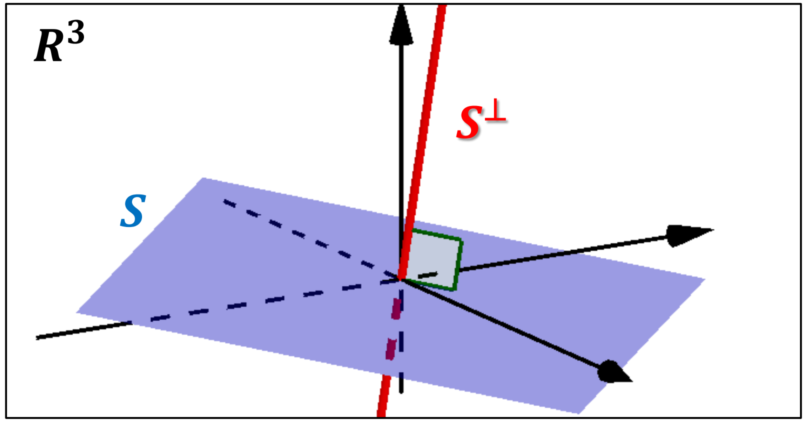
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i\vec{u}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{q} b_j\vec{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_i b_j\, \vec{u}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{u} \perp \vec{v}}$$

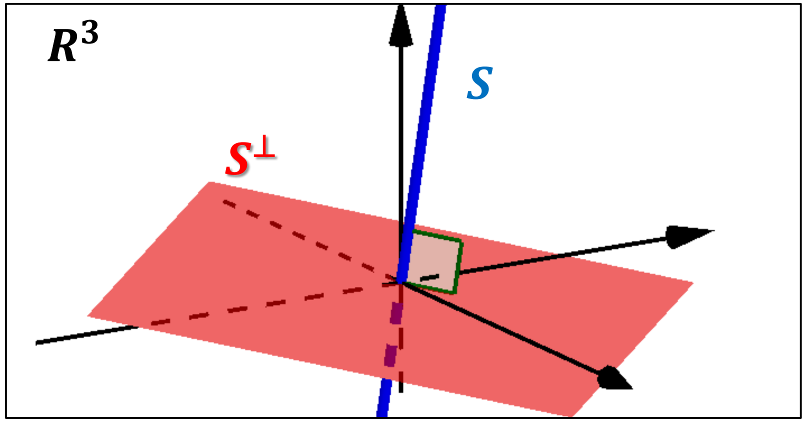
Subespacio suplementario ortogonal.

Definición. Dado un conjunto de vectores S se llama el **ortogonal** se S y denota por $S^{\perp}$ a:

$$S^{\perp} = \{\textbf{vectores ortogonales a todos los de } S\} = \{\vec{v} \in U \mid \vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{0} \text{ para todo } \vec{u} \in S\}$$







EXACTAMENTE EL MISMO CONCEPTO YA VISTO.

Para formas bilineales simétricas: subespacio conjugado.

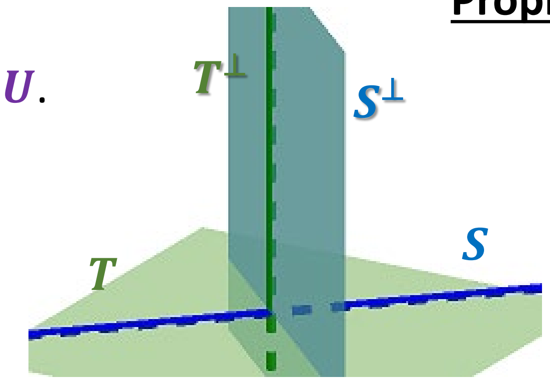
Para producto escalar: subespacio ortogonal.

Propiedades subespacio conjugado:

1) $conj(S)$ es un **subespacio vectorial** de U.

2) $S \subset T \Rightarrow conj(T) \subset conj(S)$

3) $conj\big(L(S)\big) = conj(S)$



Propiedades subespacio ortogonal:

1) $S^{\perp}$ es un **subespacio vectorial** de U.

2) $\boxed{S \subset T \Rightarrow T^{\perp} \subset S^{\perp}}$

3) $\big(L(S)\big)^{\perp} = S^{\perp}$

$$\big(L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}\big)^{\perp} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}^{\perp}$$

Subespacio suplementario ortogonal.

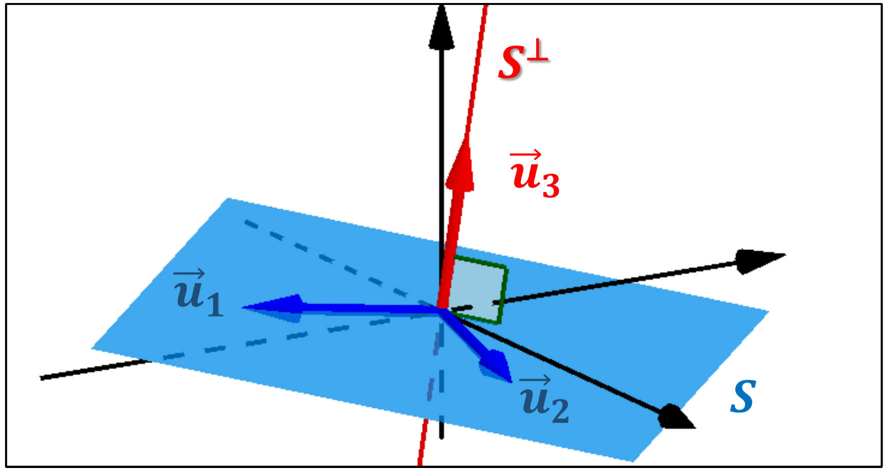
<u>Definición</u>. Dado un conjunto de vectores S se llama el **ortogonal** se S y denota por $S^{\perp}$ a:

$$S^{\perp} = \{\textbf{vectores ortogonales a todos los de } S\} = \{\vec{v} \in U \mid \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ para todo } \vec{u} \in S\}$$

4) Si U es un <u>**espacio vectorial euclídeo**</u> de dimensión n y S un **subespacio** entonces S y $S^{\perp}$ son **suplementarios**.

<u>Prueba:</u>

$$\textbf{suplementarios} \Leftrightarrow \begin{cases} S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\} \\ S + S^{\perp} = U \end{cases}$$



$\boxed{S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}}$

$$\vec{u} \in S \cap S^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \in S \\ \vec{u} \in S^{\perp} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{u} = \vec{0}}$$

$\boxed{S + S^{\perp} = U}$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ base **ortogonal** de S

$\Downarrow$ **Teorema de la base ortogonal incompleta.**

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \dots, \vec{u}_n\}$ base **ortogonal** de U

$\vec{u}_j \perp \vec{u}_i \qquad i = 1, 2, \dots, p \qquad j = 1, 2, \dots, q$

$n - p$ vectores

$$L\{\vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \dots, \vec{u}_n\} \subset S^{\perp} \Rightarrow \dim(S^{\perp}) \geq n - p$$

$$n = \dim(U) \overset{=}{\geq} \dim(S + S^{\perp}) = \dim(S) + \dim(S^{\perp}) - \dim(S \cap S^{\perp}) \overset{=}{\geq} p + (n - p) - 0 = n \Rightarrow \boxed{\dim(S + S^{\perp}) = \dim(U)}$$

Proyección ortogonal.

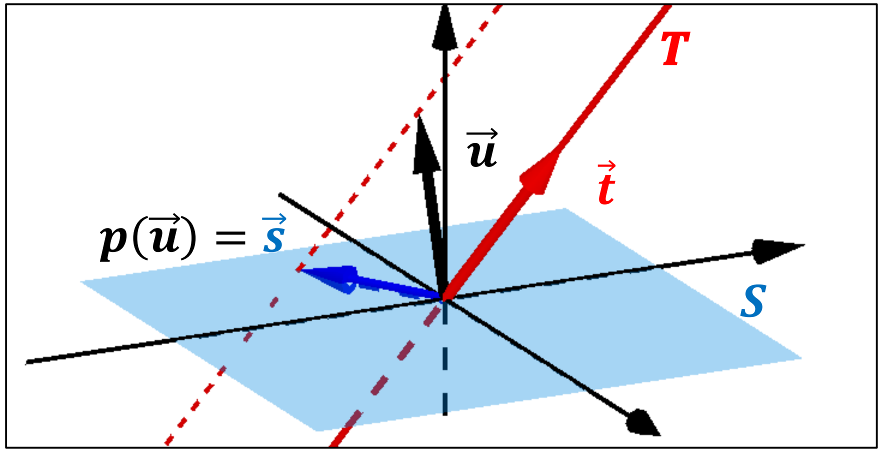
ÁLGEBRA LINEAL I.

Si $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{T}$ son suplementarios se puede hacer la **proyección sobre $\boldsymbol{S}$ paralelamente a $\boldsymbol{T}$**.

$p: U \to U$

$p(\vec{u}) = \vec{s}$

$\vec{u} = \underset{\substack{\downarrow \\ S}}{\vec{s}} + \underset{\substack{\downarrow \\ T}}{\vec{t}}$



Matriz asociada:

1) $B = \{\underbrace{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_p}_{S}, \underbrace{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_q}_{T}\}$ base de U

2) Los vectores de S quedan fijos.

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores de T van al cero.

3) **Cambio de base:** $P_C = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1}$

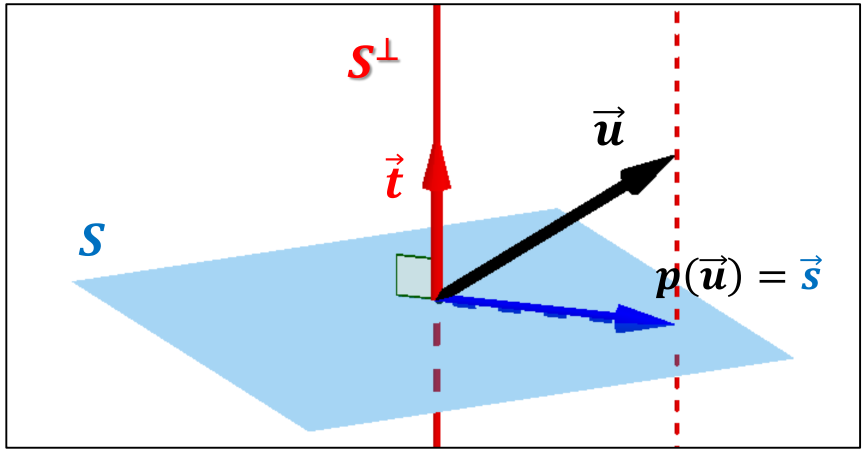
ÁLGEBRA LINEAL II.

Como $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S}^{\perp}$ son suplementarios se puede hacer la **proyección sobre $\boldsymbol{S}$ paralelamente a $\boldsymbol{S}^{\perp}$**. Se llama: **proyección ortogonal** sobre $\boldsymbol{S}$.

$p: U \to U$

$p(\vec{u}) = \vec{s}$

$\vec{u} = \underset{\substack{\downarrow \\ S}}{\vec{s}} + \underset{\substack{\downarrow \\ S^{\perp}}}{\vec{t}}$



Matriz asociada:

1) $B = \{\underbrace{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_p}_{S}, \underbrace{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_q}_{S^{\perp}}\}$ base de U

2) Los vectores de S quedan fijos.

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores de $S^{\perp}$ van al cero.

3) **Cambio de base:** $P_C = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1}$

Ejemplo. En R^3 con el producto escalar $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$:

i) calcular la **matriz** asociada a la **proyección ortogonal** sobre $S = L\{(1,0,0)\}$.

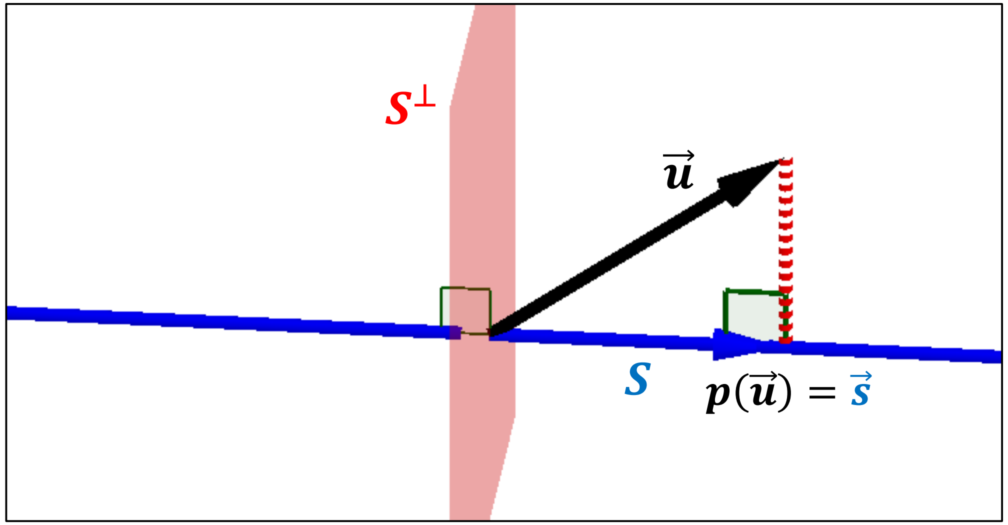
ii) calcular la **proyección ortogonal** de $(1,2,-1)$ sobre S.

Matriz asociada:

1) $B = \{\underbrace{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_p}_{S}, \underbrace{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_q}_{S^\perp}\}$

2) $P_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$

3) Cambio de base: $P_C = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1}$



Calculamos $S^\perp$:

$$S^\perp = \{(x,y,z) \in R^3 | (x,y,z) \cdot (1,0,0) = 0\} = L\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$$

$$(x,y,z) \cdot (1,0,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x \;\; y \;\; z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Implícita.

$x + y + z = 0$ → **Paramétricas. Generadores** → $z = -x - y \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha - \beta \end{cases}$

1) $B = \{\underbrace{(1,0,0)}_{S}, \underbrace{(1,0,-1),(0,1,-1)}_{S^\perp}\}$ base de U

2) $P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Cambio de base:

$$P_C = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_C}$$

Proyección ortogonal de $(1,2,-1)$ sobre S:

$$P_C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{p(1,2,-1) = (2,0,0)}$$