

NOTA: Todos los problemas se suponen planteados en el espacio afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular.

1.— Clasificar y esbozar un dibujo de la cuádrica

$$2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0.$$

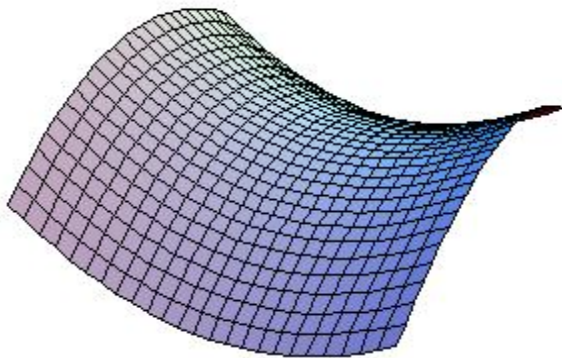
La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -3 & 5 & 1/2 & -31 \end{pmatrix}.$$

Hacemos transformaciones por congruencia para clasificarla:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & 5 & 1/2 & -31 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 4 & 1/2 & -33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que no podemos seguir diagonalizando sin utilizar la cuarta fila. Se trata por tanto de una cuádrica de tipo parabólico. Como el determinante de $|A|$ es no nulo y la signatura de T es $(+, -, 0)$, se trata de un paraboloides hiperbólico.



(Examen extraordinario, diciembre 2006)

problema2 Clasificar la cuádrica de ecuación:

$$5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 6yz + 2x + 4y - 6z + 1 = 0.$$

Escribimos la matriz asociada a la cuádrica y la diagonalizamos por congruencia, teniendo en cuenta que la última fila no puede ser sumada a las demás, ni multiplicada por un número, ni cambiada de posición.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -8 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9/2 \\ 0 & 0 & 9/2 & -21/4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Vemos que la signatura es $(+, +, -, -)$ y por tanto se trata de un hiperboloide de una hoja.

2.— Escribir la ecuación de:

(a) una cuádrica no degenerada que no contenga elipses.

Un parabololide hiperbólico:

$$x^2 - y^2 - 2z = 0.$$

(b) una cuádrica no degenerada que contenga elipses e infinitas rectas.

Un hiperboloide de una hoja:

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0.$$

(c) una cuádrica que contenga elipses, parábolas e hipérbolas.

Un cono real:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

4.— Consideramos la familia de cuádricas de $\mathbb{R}^3$:

$$Q_{\alpha,\beta} : x^2 + \alpha z^2 + 2\beta x + 2\beta y + 2\beta z = 0$$

Clasificar en función de α y β las diferentes cuádricas que pueden aparecer.

Las matrices asociadas a estas cuádricas son:

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Para clasificarlas la diagonalizamos por congruencia, teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, ni sumada a las demás, ni multiplicada por un número:

$$A_{\alpha,\beta} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} H_{41}(-\beta) \\ \nu_{41}(-\beta) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \beta & -\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Si $\beta \neq 0$ no se puede diagonalizar. El tipo de cuádrica depende de la signatura de la matriz de términos cuadráticos:

$$T_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Donde:

- Si $\alpha > 0$, la signatura de T es $(+, +, 0)$ y se trata de un paraboloide elíptico.
- Si $\alpha = 0$, la signatura de T es $(+, 0, 0)$ y se trata de un cilindro parabólico.
- Si $\alpha < 0$, la signatura de T es $(+, -, 0)$ y se trata de un paraboloide hiperbólico.

Si $\beta = 0$, la matriz $A_{\alpha,0}$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

- Si $\alpha > 0$ se trata de dos planos imaginarios cortándose en una recta real.
- Si $\alpha = 0$ se trata de un plano doble.
- Si $\alpha < 0$ se trata de dos planos reales cortándose en una recta.

Resumimos la clasificación en la siguiente tabla:

	$\beta = 0$	$\beta \neq 0$
$\alpha > 0$	Paraboloide elíptico	Planos imaginarios secantes
$\alpha = 0$	Cilindro parabólico	Plano doble
$\alpha < 0$	Paraboloide hiperbólico	Planos reales secantes

(Examen final, diciembre 2005)

- 5.— En el espacio euclídeo y respecto de una referencia rectangular, se consideran las cuádricas que admiten por ecuaciones:

$$x^2 - 2y^2 + az^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Clasificar dichas cuádricas según los distintos valores de a .

Escribimos la matriz asociada y la diagonalizamos por congruencia, teniendo en cuenta que la última fila no puede ser movida ni sumada a las demás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(1) \quad \mu_{31}(1)} \xrightarrow{H_{41}(-1) \quad \mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1/2) \quad \mu_{32}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 1/2$ se puede seguir diagonalizando:

$$\xrightarrow{H_{32}(-1/(a-1/2)) \quad \mu_{32}(-1/(a-1/2))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(a-1/2) \end{pmatrix}$$

Vemos como varían los signos de los términos de la diagonal:

- Si $a < 1/2$, entonces los signos son $(+, -, -, +)$ o equivalentemente $(+, +, -, -)$. Se trata de un hiperboloide de una hoja.
- Si $a > 1/2$, entonces los signos son $(+, +, -, -)$. Se trata de un hiperboloide de una hoja.
- Si $a = 1/2$, no se puede seguir diagonalizando. La signatura de la matriz de términos cuadráticos es $(+, -, 0)$. Se trata de un paraboloide hiperbólico.

(Examen final, septiembre 2006)

6.— En el espacio afín y con respecto a una referencia rectangular se consideran las cuádricas de ecuaciones:

$$ax^2 + (1-a)y^2 + az^2 + 2(1-a)xz + 2x + 2z + 3 = 0,$$

con $a \in \mathbb{R}$. Clasificar las cuádricas en función del parámetro a .

La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla hacemos congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser movida ni sumada a las demás.

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{H_{12} \nu_{12}} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1) \nu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23} \nu_{23}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1/2) H_{42}(-1) \mu_{32}(-1/2) \mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Distinguimos los distintos casos dependiendo de los valores de a para los cuales los términos de la diagonal se anulan:

- Si $a < 1/2$ entonces la signatura es $(+, +, -, +)$. Se trata de un hiperboloide de dos hojas.
- Si $a = 1/2$ entonces la signatura es $(+, +, 0; +)$. Se trata de un cilindro imaginario.
- Si $1/2 < a < 1$ entonces la signatura es $(+, +, +; +)$. Se trata de una elipse imaginaria.
- Si $a = 1$ entonces la signatura es $(+, +, 0; +)$. Se trata de un cilindro imaginario.
- Si $a > 1$ entonces la signatura es $(+, +, -, +)$. Se trata de un hiperboloide de dos hojas.

7.— Para las siguientes cuádricas, se pide clasificarlas, determinar sus ecuaciones reducidas, si están formadas por planos hallar sus ecuaciones y calcular, en los casos en que existan: centros, puntos singulares, planos principales, ejes y vértices.

- (a) $2x^2 - 2yz - 4x + 8z + 10 = 0$
- (b) $x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 6xz + 6yz - 4x - 8y - 4 = 0$
- (c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 6x + 4y + 2z + 13 = 0$
- (d) $xy - 1 = 0$
- (e) $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 6x - 12y - 12z = 0$
- (f) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz = 0$
- (g) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 3x - 3y - 3z + 2 = 0$

Para la cuádrica del apartado (a), calcular además: el cono tangente desde el punto $(1, 0, 0)$, el polo del plano $y - 3z - 12 = 0$ y el plano tangente por el punto $(0, 9, 1)$.

- (a) La matriz de la cuádrica y la de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de T :

$$|T - \lambda I| = 0 \iff (2 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

Quedan $2, 1, -1$. Además $\det(A) = -16$, por tanto la signatura es $+, +, -, +$ y se trata de un hiperboloide de 2 hojas. Como ningún par de autovalores son iguales, no es de revolución.

La forma reducida es:

$$2x'^2 + y'^2 - z'^2 + k = 0 \iff 2x'^2 + y'^2 - z'^2 + 8 = 0$$

donde k se obtiene teniendo en cuenta que $\det(A) = 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot k$.

- El centro es:

$$(a, b, c, 1)A = (0, 0, 0, h) \Rightarrow (a, b, c) = (1, 4, 0)$$

- No hay puntos singulares.

- Para calcular los planos principales hallamos los autovectores:

$$\begin{aligned} (x, y, z)(T - 2I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (1, 0, 0) \\ (x, y, z)(T - 1I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (0, 1, -1) \\ (x, y, z)(T + 1I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (0, 1, 1) \end{aligned}$$

Los planos principales son sus conjugados:

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff x - 1 = 0 \\ (0, 1, -1, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff y - z - 4 = 0 \\ (0, 1, 1, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff y + z - 4 = 0 \end{aligned}$$

- Los ejes son la intersección de estos planos dos a dos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} y - z - 4 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{array} \right\};$$

siendo el primero de ellos el eje correspondiente al autovalor negativo.

- Los únicos vértices son la intersección del eje correspondiente al autovalor negativo con la cuádrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{array} \right\}; \quad \cap \quad 2x^2 - 2yz - 4x + 8z + 10 = 0$$

Sustituyendo las primeras ecuaciones en la segunda queda:

$$z^2 = 4$$

y los vértices son:

$$(1, 6, 2); \quad (1, 2, -2)$$

(b) La matriz de la cuádrica y la de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de T :

$$|T - \lambda I| = 0 \iff (2 - \lambda)(\lambda - 6)(\lambda + 3) = 0$$

Quedan 6, 2, -3. Además $\det(A) = 72$, por tanto la signatura es +, +, -, - y se trata de un hiperboloide de 1 hoja. Como ningún par de autovalores son iguales, no es de revolución.

La forma reducida es:

$$6x'^2 + 2y'^2 - 3z'^2 + k = 0 \iff 2x'^2 + y'^2 - z'^2 - 2 = 0$$

donde k se obtiene teniendo en cuenta que $\det(A) = 6 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot k$.

- El centro es:

$$(a, b, c, 1)A = (0, 0, 0, h) \Rightarrow (a, b, c) = (-1, 0, 0)$$

- No hay puntos singulares.

- Para calcular los planos principales hallamos los autovectores:

$$\begin{aligned}(x, y, z)(T - 6I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (1, 1, 2) \\(x, y, z)(T - 2I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (1, -1, 0) \\(x, y, z)(T + 3I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (1, 1, -1)\end{aligned}$$

Los planos principales son sus conjugados:

$$\begin{aligned}(1, 1, 2, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff x + y + 2z - 1 = 0 \\(1, -1, 0, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff x - y + 1 = 0 \\(1, 1, -1, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff x + y - z + 2 = 0\end{aligned}$$

- Los ejes son la intersección de estos planos dos a dos:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases};$$

siendo los dos últimos el eje correspondientes a los autovalores positivos.

- Los únicos vértices son la intersección de los ejes correspondientes a los autovalores positivos con la cuádrica:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}; \quad \cap \quad x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 6xz + 6yz - 4x - 8y - 4 = 0$$

Sustituyendo las primeras ecuaciones en la segunda queda:

$$2x^2 + 4x + 1 = 0$$

y los vértices son:

$$\left(\frac{-2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 1\right); \quad \left(\frac{-2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

Ahora intersecamos con el otro eje:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}; \quad \cap \quad x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 6xz + 6yz - 4x - 8y - 4 = 0$$

Sustituyendo las primeras ecuaciones en la segunda queda:

$$36y^2 - 2 = 0$$

y los vértices son:

$$\left(\frac{\sqrt{2} - 6}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2} + 3}{3}\right); \quad \left(\frac{-\sqrt{2} - 6}{6}, \frac{-\sqrt{2}}{6}, \frac{-\sqrt{2} + 3}{3}\right)$$

(c) La matriz de la cuádrica y la de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 13 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de T :

$$|T - \lambda I| = 0 \iff (1 - \lambda)\lambda(\lambda - 2) = 0$$

Quedan 2, 1, 0. Además $\det(A) = -4$, por tanto no es diagonalizable y se trata de un paraboloide elíptico. Como ningún par de autovalores son iguales, no es de revolución.

La forma reducida es:

$$2x'^2 + y'^2 - 2kz = 0 \iff 2x'^2 + y'^2 - 2\sqrt{2}z = 0$$

donde k se obtiene teniendo en cuenta que $\det(A) = -2 \cdot 1 \cdot k^2$.

- No tiene centro.

- No hay puntos singulares.

- Para calcular los planos principales hallamos los autovectores de los autovalores no nulos:

$$\begin{aligned} (x, y, z)(T - 2I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (1, 0, 1) \\ (x, y, z)(T - 1I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (0, 1, 0) \end{aligned}$$

Los planos principales son sus conjugados:

$$\begin{aligned} (1, 0, 1, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff x + z + 2 = 0 \\ (0, 1, 0, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff y + 2 = 0 \end{aligned}$$

- El eje es la intersección de estos dos planos:

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases};$$

- Los únicos vértices son la intersección de este eje con la cuádrica:

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}; \quad \cap \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 6x + 4y + 2z + 13 = 0$$

Sustituyendo las primeras ecuaciones en la segunda queda:

$$4x + 9 = 4 \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$$

y el vértice es:

$$\left(-\frac{9}{4}, -2, \frac{1}{4}\right)$$

(d) La ecuación es:

$$2xy - 2 = 0$$

La matriz de la cuádrica y la de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de T :

$$|T - \lambda I| = 0 \iff -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

Quedan 1, -1 y 0. Además como rango $A = 3$ se trata de un cilindro hiperbólico.

Para calcular la forma reducida hallamos los autovectores de T :

$$\begin{aligned}(x, y, z)(T - I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (1, 1, 0) \\(x, y, z)(T + I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (1, -1, 0) \\(x, y, z)(T) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (0, 0, 1)\end{aligned}$$

Por tanto dividiéndolos por su norma vemos que la matriz de paso para diagonalizar la parte cuadrática de A es:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (x, y, z) = (x', y', z')C$$

Cambiando de base la ecuación inicial queda:

$$x'^2 - y'^2 - 2 = 0$$

Vemos que ya es la ecuación reducida.

- Tiene una recta de centros:

$$(x, y, z, 1)A = (0, 0, 0, t) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- No hay puntos singulares.

- Hay dos planos principales conjugados de los autovectores asociados a los autovalores no nulos:

$$\begin{aligned}(1, 1, 0, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff x + y = 0 \\(1, -1, 0, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff x - y = 0\end{aligned}$$

- El eje es la intersección de estos dos planos y coincide con la recta de centros.

- No hay vértices.

(e) La matriz de la cuádrica y la de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & -6 \\ -4 & -2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$|T - \lambda I| = 0 \iff -\lambda^2(\lambda - 9) = 0$$

y por tanto hay dos autovalores nulos y uno positivo. Teniendo en cuenta que $\text{rango}(A) = 3$ vemos que se trata de un cilindro parabólico. Calculemos la ecuación reducida.

Los autovectores son (escogemos una base ortogonal del espacio asociado al autovalor 0, que tiene dimensión 2):

$$\begin{aligned}(x, y, z)(T - 9I) = 0 &\iff (x, y, z) \parallel (2, 1, -2) \\(x, y, z)(T) = 0 &\iff (x, y, z) \in \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (-1, 4, 1)\}\end{aligned}$$

Los normalizamos y formamos la matriz de cambio de base:

$$C = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} & 1/\sqrt{18} \end{pmatrix}; \quad (x, y, z) = (x', y', z')C$$

La ecuación en la nueva base es:

$$9x'^2 - 9\sqrt{2}(y' + z') = 0$$

Por tanto hacemos $y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + z')$ y completamos el cambio para que sea una transformación ortogonal $x'' = x$ y $z'' = \frac{1}{\sqrt{2}}y' - z'$. La ecuación reducida queda en definitiva:

$$x''^2 - 9y'' = 0$$

- Por ser un cilindro parabólico no tiene centro.

- No tiene puntos singulares.

- El único plano principal es el conjugado de las dirección correspondiente a los autovector asociado al autovalor no nulo:

$$(2, 1, -2, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 \iff 2x + y - 2z = 0$$

- No tiene ejes.

- No tiene vértices.

(f) La matriz de la cuádrlica y la de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de T :

$$|T - \lambda I| = 0 \iff (2 - \lambda)^2(4 - \lambda^2) = 0$$

Son 2 con multiplicidad 2 y 4 con multiplicidad 1. La signatura es $+, +, +, 0$ y se trata de un cono imaginario.

La forma reducida es:

$$2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 + k = 0 \iff x'^2 + y'^2 + 2z'^2 = 0$$

- El centro es:

$$(a, b, c, 1)A = (0, 0, 0, h) \Rightarrow (a, b, c) = (0, 0, 0)$$

- El único puntos singular es el centro.

- Para calcular los planos principales hallamos los autovectores:

$$\begin{aligned} (x, y, z)(T - 2I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \in \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\} \\ (x, y, z)(T - 4I) = 0 &\Rightarrow (x, y, z) \parallel (0, 1, 1) \end{aligned}$$

Los planos principales son sus conjugados:

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff x = 0 \\ (0, 1, -1, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff y - z = 0 \\ (0, 1, 1, 0)A(x, y, z, 1)^t = 0 &\iff y + z = 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que hay un autovalor no nulo con multiplicidad 2 hay infinitos planos principales, es decir, cualquier plano del haz generado por los dos primeros es también plano principal:

$$\alpha(x) + \beta(y - z) = 0 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- Los ejes son la intersección de estos planos dos a dos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases};$$

y cualquier recta pasando por el centro contenida en el plano $y + z = 0$.

- El único vértice es el centro.

(g) La matriz de la cuádrica y la de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 & -3/2 \\ -3/2 & -3/2 & -3/2 & 2 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de T :

$$|T - \lambda I| = 0 \iff -\lambda^2(\lambda - 3) = 0$$

Son 0 con multiplicidad 2 y 3 con multiplicidad 1. Teniendo en cuenta que $\text{rango}(A) = 2$, se trata de dos planos paralelos reales o imaginarios. Para distinguir diagonalizamos A por congruencia:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Por tanto se trata de dos planos paralelos reales.

Para calcular los planos hacemos lo siguiente. En este caso hay un plano de centros, paralelo a los dos planos que forman la cuádrica. Lo calculamos:

$$(x, y, z, 1)A = (0, 0, 0, h) \iff x + y + z - \frac{3}{2} = 0 \iff 2x + 2y + 2z - 3 = 0$$

Ahora los planos que buscamos son paralelos a estos, es decir, de la forma:

$$x + y + z + k = 0$$

Cogemos una recta cualquier y la intersecamos con la cuádrica para obtener un punto de cada plano. Por ejemplo la recta $x = 0$; $y = 0$. Sustituyendo en la ecuación queda:

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \iff z = 2; \quad z = 1;$$

Por tanto los puntos de cada plano son $(0, 0, 2)$ y $(0, 0, 1)$ y los planos pedidos que forman la cuádrica:

$$x + y + z - 2 = 0; \quad x + y + z - 1 = 0$$

- Hay un plano de centros que ya hemos calculado.

- No hay puntos singulares.

- El único plano principal coincide con el de centros.

- No hay ejes.

- No hay vértices.

8.— Definimos la aplicación:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad \phi(a, b) = (ab, a, b)$$

Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - yz = 0\}$.

(a) ¿Es ϕ una aplicación lineal?

Se tiene:

$$\begin{aligned} \phi(a + a', b + b') &= ((a + a')(b + b'), a + a', b + b') = \\ &= (ab + a'b' + ab' + a'b, a + a', b + b') = \\ &= (ab, a, b) + (a'b', a', b') + (ab' + a'b, 0, 0) = \\ &= \phi(a, b) + \phi(a', b') + (ab' + a'b, 0, 0) \end{aligned}$$

Luego no es lineal.

¿Es inyectiva?

Tenemos:

$$\phi(a, b) = \phi(a', b') \Rightarrow (ab, a, b) = (a'b', a', b') \Rightarrow (a, b) = (a', b')$$

y por tanto si es inyectiva.

¿Es sobreyectiva?

No, porque, por ejemplo $(1, 0, 0)$ no está en la imagen, ya que si $\phi(a, b) = (1, 0, 0)$ entonces $a = 0$ y $b = 0$, pero quedaría $\phi(0, 0) = (0, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$.

¿Es biyectiva?

No porque no es sobreyectiva.

(b) Clasificar la cuádrica C .

La ecuación de C es

$$x - yz = 0 \iff 2x - 2yz = 0$$

Su matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La diagonalizamos por congruencia para clasificarla, teniendo en cuenta que la cuarta fila no puede ser cambiada de lugar, ni sumada a los demás ni multiplicada por un número.

$$A \xrightarrow{H_{23}(-1/2)\nu_{23}(-1/2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)\nu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La ecuación reducida es:

$$y'^2 - z'^2 + 2x - 1 = 0$$

y se trata por tanto de un paraboloides hiperbólico.

(c) Probar que $Im f = C$.

- Primero veamos que $Im(f) \subset C$.

Sea $(x, y, z) \in Im(f)$. Significa que $(x, y, z) = \phi(a, b) = (ab, a, b)$ para algún (a, b) en $\mathbb{R}^2$. Queremos ver que (ab, a, b) verifica la ecuación de la cuádrica C . Pero es evidente ya que:

$$x - yz = ab - ab = 0$$

- Ahora veamos que $C \subset Im(f)$. Si $(x, y, z) \in C$ entonces $x - yz = 0$ y:

$$\phi(y, z) = (yz, y, z) = (x, y, z)$$

y por tanto f es sobreyectiva.

(d) *Responder a las preguntas del apartado (a) para la aplicación*

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow C; \quad \psi(a, b) = \phi(a, b)$$

Nos fijamos en que lo único que diferencia ψ de ϕ es el conjunto final. Entonces:

- La aplicación ψ no es lineal por no serlo ϕ .
- Es inyectiva por que también lo era ϕ .
- Ahora es sobreyectiva porque $Im(\psi) = Im(\phi) = C$.
- Es biyectiva por ser inyectiva y sobreyectiva.

(e) *Si $P = (y_0 z_0, y_0, z_0)$ es un punto de la cuádrica C , calcular el plano tangente a C en P .*

El plano tangente en el punto P es:

$$(y_0 z_0 \quad y_0 \quad z_0 \quad 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Operando queda:

$$x - z_0 y - y_0 z + y_0 z_0 = 0$$

- (f) Calcular la ecuación paramétrica de las rectas que forman la intersección de dicho plano tangente con la cuádrica. Comprobar que son imagen por ψ de dos rectas de $\mathbb{R}^2$.

Ahora intersecamos el plano anterior con la cuádrica:

$$\begin{cases} x - z_0y - y_0z + y_0z_0 = 0 \\ x = yz \end{cases} \Rightarrow yz - z_0y - y_0z + y_0z_0 = 0 \iff (y - y_0)(z - z_0) = 0$$

Luego la intersección son las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} y - y_0 = 0 \\ x - z_0y - y_0z + y_0z_0 = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (y_0z_0, y_0, z_0) + \lambda(y_0, 0, 1) = (y_0z_0 + \lambda y_0, y_0, z_0 + \lambda)$$

y

$$s \equiv \begin{cases} z - z_0 = 0 \\ x - z_0y - y_0z + y_0z_0 = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (y_0z_0, y_0, z_0) + \lambda(z_0, 1, 0) = (y_0z_0 + \lambda z_0, y_0 + \lambda, z_0)$$

Vemos que la recta r es imagen por ψ de la recta de $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = (y_0, z_0) + \lambda(1, 0)$$

Y s es la imagen por ψ de la recta de $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = (y_0, z_0) + \lambda(0, 1)$$

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

9.— Clasificar, en función del parámetro λ , la cuádrica:

$$(4 - \lambda)x^2 + 2y^2 - \lambda z^2 + 4xy + 2\lambda xz + 4x - 4z - \lambda = 0.$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Intentamos diagonalizarla por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, ni multiplicada por un número, ni sumada a las demás:

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{H_{12}} \xrightarrow{\nu_{12}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 - \lambda & \lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{\nu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & \lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\nu_{23}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda & 2 - \lambda & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{\nu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\nu_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Si $\lambda \neq 0$ seguimos así:

$$\xrightarrow{H_{42}(-2/\lambda)} \xrightarrow{\nu_{42}(-2/\lambda)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda + 4/\lambda \end{pmatrix}$$

Los términos de la diagonal se anulan en $\lambda = -2, 0, 2$.

Distinguimos los siguientes casos:

- Si $\lambda < -2$ la signatura es $(+, +, +; +)$. Se trata de un elipsoide imaginario.
- Si $\lambda = -2$ la signatura es $(+, +, +; 0)$. Se trata de un cono imaginario.
- Si $-2 < \lambda < 0$ la signatura es $(+, +, +; -)$. Se trata de un elipsoide real.
- Si $\lambda = 0$, la matriz nos queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

No podemos seguir diagonalizando. La signatura de la matriz T de términos cuadráticos es $(+, +, 0)$ y se trata por tanto de un paraboloide elíptico.

- Si $0 < \lambda < 2$ la signatura es $(+, +, -; +)$. Se trata de un hiperboloide de dos hojas.
- Si $\lambda = 2$ la signatura es $(+, +, -; 0)$. Se trata de un cono real.
- Si $\lambda > 2$ la signatura es $(+, +, -; -)$. Se trata de un hiperboloide de una hoja.

10.— *Encontrar la única respuesta correcta, en las siguientes cuestiones:*

- (a) *En el espacio geométrico ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, la cuádrica de ecuación $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ es:*

La podemos escribir como $y^2 + z^2 - x^2 + 1 = 0$ y vemos que se trata de un hiperboloide de dos hojas. Además dado que la matriz T de términos cuadráticos tiene un autovalor doble, entonces es de revolución.

- ☐ *Un hiperboloide reglado y de revolución.*

FALSO.

- ☐ *Un hiperboloide de revolución pero no reglado.*

VERDADERO.

- ☐ *Un hiperboloide reglado pero no de revolución.*

FALSO.

- ☐ *Un hiperboloide que no es reglado ni es de revolución.*

FALSO. (Segundo parcial, junio 2002)

- (b) *De una cuádrica se sabe que todos los planos diametrales son paralelos entre sí. ¿De qué cuádrica se trata?*

- ☐ *Cilindro hiperbólico.*

FALSO. En el cilindro hiperbólico los planos diametrales contiene a la recta de centros.

- ☐ *Cilindro parabólico.*

VERDADERO. Todos los planos diametrales contienen a recta de centros impropios. Pero dicha recta es de puntos del infinito. Esto significa que todos los planos diametrales son paralelos.

- ☐ *2 planos secantes reales.*

FALSO. Los planos diametrales contienen a la recta intersección de ambos planos.

- ☐ *Paraboloide elíptico.*

FALSO. Los planos diametrales pasan por un punto del infinito, es decir contienen rectas paralelas, pero no son necesariamente paralelos.

(Segundo parcial, junio 1999)

(c) *En el Espacio Geométrico Ordinario*

- ☐ *todas las cuádricas no degeneradas tienen al menos 3 planos principales.*

FALSO. Por ejemplo el paraboloide hiperbólico o el paraboloide elíptico que no es de revolución no tiene 3 planos principales.

- ☐ *todas las cuádricas imaginarias tienen al menos un centro.*

VERDADERO. Ya que las cuádricas imaginarias son elipses o hipérbolas; o bien, conos elípticos o hiperbólicos; o bien, planos imaginarios. Todos ellos tienen al menos un centro.

- ☐ *ninguna cuádrica degenerada tiene 3 ejes perpendiculares.*

FALSO. Por ejemplo un cono real tiene tres ejes perpendiculares.

- ☐ *si una cuádrica tiene infinitos centros, entonces tiene 1 eje.*

FALSO. Si la cuádrica es un plano doble tiene infinitos centros, pero un único plano principal. Por tanto no hay eje.

(Segundo parcial, junio 1998)
