*NOTA: Todos los problemas se suponen planteados en el espacio afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular.*

**1.–** *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$2x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2xz - 4yz - 2x + 2y = 0.$$

*clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.*

La matriz asociada a la cuádrica es:

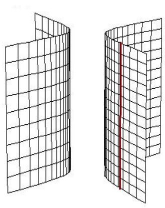
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para clasificar la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, multiplicada por un número o sumada a las demás:

$$A \xrightarrow{H_{13}} \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{31}(2)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{H_{42}(-1/3)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{42}(-1/3)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Vemos que la matriz diagonalzia; tiene rango 3 y su signatura es $(-, +, 0; -)$ o equivalentemente $(+, -, 0; -)$. Se trata por tanto de un cilindro hiperbólico.



**2.–** *Dada la ecuación:*

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 4x + 2y + 4z + 1 = 0,$$

*clasificar la cuádrica que define y esbozar un dibujo de la misma.*

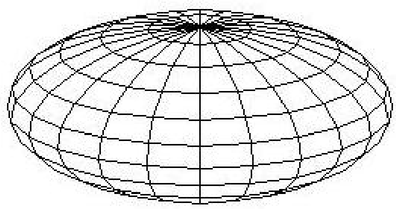
La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia, teniendo en cuenta que para que las operaciones elementales representen un cambio de referencia afín la última fila no puede ser cambiada de lugar, sumada a otras o multiplicada por un número.

$$A \xrightarrow{\substack{\mu_{21}(-1)\\ H_{21}(-1)}} \xrightarrow{\substack{\mu_{31}(-1)\\ H_{31}(-1)}} \xrightarrow{\substack{\mu_{41}(-2)\\ H_{41}(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\mu_{42}(1)\\ H_{41}(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La distribución de signos en la forma diagonal es $(+, +, +; -)$. Se trata por tanto de un elipsoide real.



---

**3.–** Escribir la ecuación de:

(a) *una cuádrica no degenerada que no contenga elipses.*

Un parabololide hiperbólico:

$$x^2 - y^2 - 2z = 0.$$

(b) *una cuádrica no degenerada que contenga elipses e infinitas rectas.*

Un hiperboloide de una hoja:

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0.$$

(c) *una cuádrica que contenga elipses, parábolas e hipérbolas.*

Un cono real:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

---

**4.–** *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 2xz + 4x - 4z - 1 = 0.$$

*clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.*

La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

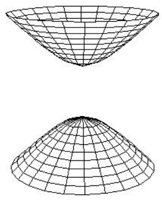
Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser ni sumada a las demás, ni cambiada de posición, ni multiplicada por un número.

$$A \xrightarrow{H_{13}} \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(1)} \xrightarrow{H_{41}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonaliza y la signatura obtenida es:

$$(-,+,+;+) \iff (+,+,-;+)$$

Se trata por tanto de un hiperboloide de dos hojas.



**5.–** *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 6xz - 2x + 4y - 6z + 3 = 0.$$

i) *Clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.*

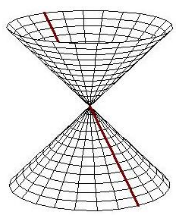
La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Para clasificar la cuádrica la diagonalizamos por congruencia:

$$A \xrightarrow{H_{31}(-3)} \xrightarrow{H_{41}(1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-3)} \xrightarrow{\mu_{41}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{42}(-1)} \xrightarrow{\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(+,+,-;0)$. Se trata por tanto de un cono real.



ii) *¿Existe algún plano que corte a la superficie en una parábola?.*

SI. Sabemos que las cónicas son precisamente las curvas que se obtienen cortando un cono con un plano. Por tanto cualquier cónica no degenerada puede obtenerse como corte de un plano con un cono. En particular las parábolas aparecen si tomamos un plano paralelo a una generatriz y que no pase por el vértice.

**6.**– *Consideramos la familia de cuádricas de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$Q_{\alpha,\beta} : x^2 + \alpha z^2 + 2\beta x + 2\beta y + 2\beta z = 0$$

*Clasificar en función de* $\alpha$ *y* $\beta$ *las diferentes cuádricas que pueden aparecer.*

Las matrices asociadas a estás cuádricas son:

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Para clasificarlas la diagonalizamos por congruencia, teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, ni sumada a las demás, ni multiplicada por un número:

$$A_{\alpha,\beta} \overset{\substack{H_{41}(-\beta) \\ \nu_{41}(-\beta)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \beta & -\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Si $\beta \neq 0$ no se puede diagonalizar. El tipo de cuádrica depende de la signatura de la matriz de términos cuadráticos:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Donde:

- Si $\alpha > 0$, la signatura de $T$ es $(+,+,0)$ y se trata de un paraboloide elíptico.

- Si $\alpha = 0$, la signatura de $T$ es $(+,0,0)$ y se trata de un cilindro parabólico.

- Si $\alpha < 0$, la signatura de $T$ es $(+,-,0)$ y se trata de un paraboloide hiperbólico.

Si $\beta = 0$, la matriz $A_{\alpha,0}$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

- Si $\alpha > 0$ se trata de dos planos imaginarios cortándose en una recta real.

- Si $\alpha = 0$ se trata de un plano doble.

- Si $\alpha < 0$ se trata de dos planos reales cortándose en una recta.

Resumimos la clasificación en la siguiente tabla:

| | $\beta = 0$ | $\beta \neq 0$ |
|---|---|---|
| $\alpha > 0$ | Paraboloide elíptico | Planos imaginarios secantes |
| $\alpha = 0$ | Cilindro parabólico | Plano doble |
| $\alpha < 0$ | Paraboloide hiperbólico | Planos reales secantes |

**(Examen final, diciembre 2005)**

**7.–** *En el espacio euclídeo y respecto de una referencia rectangular, se consideran las cuádricas que admiten por ecuaciones:*

$$x^2 - 2y^2 + az^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0, \qquad con \quad a \in \mathbb{R}.$$

*Clasificar dichas cuádricas según los distintos valores de $a$.*

Escribimos la matriz asociada y la diagonalizamos por congruencia, teniendo en cuenta que la última fila no puede ser movida ni sumada a las demás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{H_{31}(1) \\ H_{41}(-1)}}{\longrightarrow} \overset{\substack{\mu_{31}(1) \\ \mu_{41}(-1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1/2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 1/2$ se puede seguir diagonalizando:

$$\overset{H_{32}(-1/(a-1/2))}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}(-1/(a-1/2))}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(a-1/2) \end{pmatrix}$$

Vemos como varían los signos de los términos de la diagonal:

- Si $a < 1/2$, entonces los signos son $(+,-,-;+)$ o equivalentemente $(+,+,-;-)$. Se trata de un hiperboloide de una hoja.

- Si $a > 1/2$, entonces los signos son $(+,+,-;-)$. Se trata de un hiperboloide de una hoja.

- Si $a = 1/2$, no se puede seguir diagonalizando. La signatura de la matriz de términos cuadráticos es $(+,-,0)$. Se trata de un paraboloide hiperbólico.

**(Examen final, septiembre 2006)**

---

**8.–** *En el espacio afín y con respecto a una referencia rectangular se consideran las cuádricas de ecuaciones:*

$$ax^2 + (1-a)y^2 + az^2 + 2(1-a)xz + 2x + 2z + 3 = 0,$$

*con $a \in \mathbb{R}$. Clasificar las cuádricas en función del parámetro $a$.*

La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla hacemos congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser movida ni sumada a las demás.

$$A \overset{H_{12}}{\longrightarrow} \overset{\nu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow} \overset{\nu_{23}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1/2)H_{42}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}(-1/2)\mu_{42}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Distinguimos los distintos casos dependiendo de los valores de $a$ para los cuales los términos de la diagonal se anulan:

- Si $a < 1/2$ entonces la signatura es $(+,+,-;+)$. Se trata de un hiperboloide de dos hojas.

- Si $a = 1/2$ entonces la signatura es $(+,+,0;+)$. Se trata de un cilindro imaginario.

- Si $1/2 < a < 1$ entonces la signtaura es $(+,+,+;+)$. Se trata de una elipse imaginaria.

- Si $a = 1$ entonces la signatura es $(+,+,0;+)$. Se trata de un cilindro imaginario.

- Si $a > 1$ entonces la signatura es $(+,+,-;+)$. Se trata de un hiperboloide de dos hojas.

---

**9.–** *Clasificar, en función del parámetro $\lambda$, la cuádrica:*

$$(4-\lambda)x^2 + 2y^2 - \lambda z^2 + 4xy + 2\lambda xz + 4x - 4z - \lambda = 0.$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Intentamos diagonalizarla por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, ni multiplicada por un número, ni sumada a las demás:

$$A \overset{H_{12}}{\longrightarrow}\overset{\nu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & \lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\nu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow}\overset{\nu_{23}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow}\overset{\nu_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow}\overset{\nu_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda \neq 0$ seguimos así:

$$\overset{H_{42}(-2/\lambda)}{\longrightarrow}\overset{\nu_{42}(-2/\lambda)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda + 4/\lambda \end{pmatrix}$$

Los términos de la diagonal se anulan en $\lambda = -2, 0, 2$.

Distinguimos los siguientes casos:

- Si $\lambda < -2$ la signatura es $(+,+,+;+)$. Se trata de un elipsoide imaginario.

- Si $\lambda = -2$ la signatura es $(+,+,+;0)$. Se trata de un cono imaginario.

- Si $-2 < \lambda < 0$ la signatura es $(+,+,+;-)$. Se trata de un elipsoide real.

- Si $\lambda = 0$, la matriz nos queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

No podemos seguir diagonalizando. La signatura de la matriz $T$ de términos cuadráticos es $(+,+,0)$ y se trata por tanto de un paraboloide elíptico.

- Si $0 < \lambda < 2$ la signatura es $(+,+,-;+)$. Se trata de un hiperboloide de dos hojas.

- Si $\lambda = 2$ la signatura es $(+,+,-;0)$. Se trata de un cono real.

- Si $\lambda > 2$ la signatura es $(+,+,-;-)$. Se trata de un hiperboloide de una hoja.

---

**10.–** *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2 - 8z^2 + 4xy + 2xz - 8yz + 8y + 8z + 2 = 0$$

*clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.*

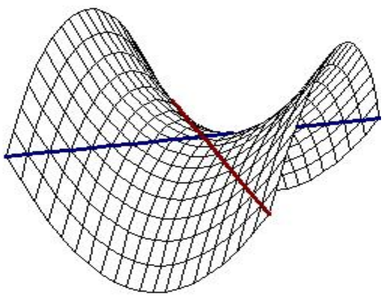
La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser sumada a las demás, cambiada por otra o multiplicada por un número:

$$A \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 4 \\ 0 & -6 & -9 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}-3/2}{\longrightarrow} \overset{H_{42}(1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}-3/2}{\longrightarrow} \overset{\mu_{42}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

No se pude seguir la diagonalización sin utilizar la última fila. El tipo de cuádrica depende de la signatura de la matriz de términos cuadráticos que es $(+, -, 0)$. Se trata por tanto de un paraboloide hiperbólico.



**11.–** *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz - 16yz - 12y + 12z + 3 = 0$$

*clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.*

La matriz asociada a la cuárica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -8 & -6 \\ 2 & -8 & 4 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia usando operaciones elementales (las mismas por fila que por columna), con la salvedad de que la cuarta fila no puede ser ni sumada a las demás, ni cambiada de posición, ni multiplicada por un número.

$$A \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & -6 \\ 0 & -10 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(5)}{\longrightarrow} \overset{H_{42}(3)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}(5)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{42}(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & -24 \\ 0 & 0 & -24 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_{43}(-12/25)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{43}(-12/25)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -87/250 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(+, +, -, -)$. Se trata por tanto de un hiperboloide de una hoja.